ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 30. rujna 2023. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 2/294.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 285.

A) Zadatci iz matematike

3917. Ako su $a \neq b$ pozitivni brojevi, $ab \neq 0$, dokaži da jednadžba

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x-a}+\frac{1}{x-b}=0$$

ima dva različita realna rješenja.

3918. Dokaži da za pozitivne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost

$$\frac{ab}{a^5+a^2b^2c+b^5}+\frac{bc}{b^5+ab^2c^2+c^5}+\frac{ac}{a^5+a^2bc^2+c^5}\geq\frac{1}{abc}.$$

3919. Ako su a, b, c duljine stranica trokuta, s njegov opseg i r, r_a, r_b, r_c polumjeri upisane i pripisanih mu kružnica, dokaži nejednakost

$$\sqrt{\frac{a}{r_a}}+\sqrt{\frac{b}{r_b}}+\sqrt{\frac{c}{r_c}}\leq\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s}{r}}.$$

3920. Neka su x, y, z međusobno različiti realni brojevi. Dokaži da je

$$\sqrt[3]{x-y}+\sqrt[3]{y-z}+\sqrt[3]{z-x}\neq 0.$$

3921. Neka su m i n pozitivni cijeli brojevi koji zadovoljavaju jednadžbu

$$mn^2+876=4mn+217n.$$

Nađi sumu svih mogućih vrijednosti od m.

3922. Dokaži da n-ti prosti broj p_n zadovoljava uvjet $p_n \leq 2^{2^{n-1}}$ za svaki $n \geq 1$.

3923. Dan je Fibonaccijev niz $(F_1=1,$ $F_2=1,$ $F_n=F_{n-1}+F_{n-2},$ $n>2)$. Dokaži

$$\binom{n}{1}F_1+\binom{n}{2}F_2+\ldots+\binom{n}{n-1}F_{n-1}+F_n=F_{2n}.$$

3924. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz brojeva sa svojstvima:

i) $a_1=1$

ii) $a_{2n}=na_n$ za svaki $n\in\mathbb{N}$.

Koliko je $a_{2^{100}}$?

3925. U točki D kružnice polumjera r povučena je tangenta t. Neka je C drugi kraj promjera $\overline{CD}$ te kružnice i O njezino središte. Točkom O prolazi pravac koji siječe t u točki A tako da je $\sphericalangle DOA=30^\circ$. Na tangentu t nanese se dužina $\overline{AB}$ tako da je $|AB|=3r$ i to na onu stranu od A na kojoj je i točka D. Dokaži da je $|BC|\approx r\pi$. Pokaži da ta konstrukcija za broj π daje približnu vrijednost

$$\pi\approx\sqrt{\frac{2(20-3\sqrt{3})}{3}},$$

što daje točnost na četiri decimale.

3926. U trokutu ABC polovišta stranica $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ su redom D, E, F. Proizvoljan pravac kroz točku A siječe dužine $\overline{DE}$, $\overline{DF}$ (ili njihove produžetke) redom u G, H. Dokaži da su pravci CG i BH paralelni.

3927. Dan je šiljastokutan trokut ABC. Pravac na kojem leži njegova visina iz B siječe kružnicu dijametra $\overline{AC}$ u točkama P i Q, a visina iz C siječe kružnicu s dijametrom $\overline{AB}$ u točkama M i N. Dokaži da točke P, Q, M i N leže na istoj kružnici.

3928. Kružnica dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ pravokutnika $ABCD$, prolazi točkom C i siječe $\overline{BC}$ u K. Odredi površinu četverokuta $ABKD$ ako je $|AB|=8$ cm i $|AD|=9$ cm.

3929. Omjer duljina stranica paralelograma je $a:b=p:q$, a njegovih dijagonala $d_1:d_2=m:n$. Odredi kutove tog paralelograma.

3930. Za cijele brojeve $m \geq 0$ i $n > 0$, neka je $S_m(n) = 1^m + 2^m + \ldots + n^m$. Dokaži da vrijedi

$$\binom{m+1}{0} S_0(n) + \binom{m+1}{1} S_1(n) + \binom{m+1}{2} S_2(n) + \ldots + \binom{m+1}{m} S_m(n) = (n+1)^{m+1} - 1.$$

Odavde se mogu redom određivati formule za sume $S_0(n)$, $S_1(n)$, $S_2(n), \ldots, S_m(n), \ldots$

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 518. Kovanice od 10, 20 i 50 centi su zlatne boje. Napravljene su od legure koja se naziva nordijsko zlato. Tu je leguru teško rastaliti i upotrebljava se za izradu kovanica i medalja. Nordijsko zlato sadrži 89 posto bakra, po 5 posto aluminija i cinka i 1 posto kositra. Koliko je puta gustoća te legure manja od gustoće zlata? Gustoća je bakra $8920\ \mathrm{kg/m^3}$, aluminija $2700\ \mathrm{kg/m^3}$, cinka $7000\ \mathrm{kg/m^3}$, kositra $7310\ \mathrm{kg/m^3}$, a zlata $19\,320\ \mathrm{kg/m^3}$.

OŠ – 519. Na kalem okruglog presjeka je namotano 50 namotaja bakrene žice. Širina svih namotaja iznosi 6 cm. Kad se ta zavojnica spoji na izvor napona 4.5 V kroz nju poteče struja od 3 A. Koliki je promjer kalupa na koji je žica namotana? Električna otpornost bakra iznosi $1.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$.

OŠ – 520. Učenik ima maleni komadić metala kojem želi odrediti gustoću. Ima preciznu vagu kojom je odredio da je masa metala 52 grama, ali menzura koju ima je prevelika da bi točno izmjerio tako mali obujam. Zato je u menzuru natočio vodu do visine 30 cm i mjerio vrijeme koje treba metalu da padne na dno menzure kad ga ispusti s površine vode. Nakon nekoliko mjerenja izračunao je da je prosječno vrijeme iznosilo 0.29 s. Kolika je gustoća tog metala? Gustoća vode je $1000\ \mathrm{kg/m^3}$, a ubrzanje sile teže je $9.81\ \mathrm{m/s^2}$.

OŠ – 521. Marko je na električnu ploču štednjaka snage 1000 W stavio kuhati litru vode temperature $20\,^\circ\mathrm{C}$ jer je želio popiti čaj. Čim ju je stavio zazvonio je telefon, njegov ga je prijatelj Ivan pozvao da zajedno uče fiziku za test. Marko želi popraviti ocjenu iz fizike, zaboravio je na čaj i otišao kod Ivana koji živi u susjednom stanu. Nakon 45 minuta se sjetio da je ostavio vodu na štednjaku. Je li voda do tada isparila? Pretpostavimo da se 20 posto topline trošilo na zagrijavanje okoline. Specifična toplina isparavanja neke tvari je količina topline koju treba dovesti jednom kilogramu te tvari da prijeđe iz tekućeg u plinovito stanje, za vodu ona iznosi $2.26\ \mathrm{MJ/kg}$. Specifični toplinski kapacitet vode iznosi $4200\ \mathrm{J/kgK}$, a gustoća vode $1000\ \mathrm{kg/m^3}$.

1812. Jednoliko ubrzano gibanje s početnom brzinom v_0 odvija se tako da je prevaljeni put u četvrtoj sekundi gibanja 3.6 m veći nego u prvoj. Odredi ubrzanje tog gibanja.

1813. Satelit se giba oko Zemlje po eliptičnoj putanji. Najveća brzina (u perigeju) iznosi $9.2\ \mathrm{km/s}$, a brzina na 1000 km visine iznad površine je $8.5\ \mathrm{km/s}$. Odredi visinu perigeja nad površinom Zemlje. Uzmimo da je Zemlja kugla radijusa 6371 km i mase $6 \cdot 10^{24}$ kg.

1814. Projektil se pri kosom hicu popne do najviše točke 520 m iznad horizontalnog zemljišta, a brzina mu tada iznosi $120\ \mathrm{m/s}$. Koliki je ukupni domet projektila, početna brzina i kut izbačaja?

1815. Kod sabirne leće jačine $+3.25$ dpt oštra slika predmeta nastane na udaljenosti 2.8 cm *od fokusa*. Kolika je udaljenost predmeta od leće i koliko je uvećanje?

1816. U uzorku se nalazi $2 \cdot 10^9$ radioaktivnih jezgri nekog izotopa. Ako ih se u prvoj sekundi raspadne 150 000, koliko očekujemo da ih ostane neraspadnuto nakon 24 sata?

1817. Ako dva ohmska trošila spojimo paralelno na naponski izvor, imat će zajedno 7.2 puta veću snagu nego da smo ih spojili serijski na isti izvor. Ako je zbroj njihovih otpora $21\ \Omega$, koliko iznose pojedinačni otpori?

1818. U balonu na topli zrak moguće je postići $100\,^\circ\mathrm{C}$ veću temperaturu od temperature okolnog zraka koja iznosi $15\,^\circ\mathrm{C}$. Ako je volumen balona jednak volumenu kugle radijusa 6 m, kolika je ukupna nosivost balona? Gustoća zraka pri $15\,^\circ\mathrm{C}$ je $1.23\ \mathrm{kg/m^3}$.

C) Rješenja iz matematike

3889. *Za prirodan broj n dokaži nejednakost*

$$\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}+\sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}<2.$$

Rješenje. Koristimo Bernoullijevu nejednakost.

Ako je $x \geq -1$ i $0 < a < 1$ tada vrijedi

$$(1+x)^a \leq 1+ax.$$

Uzmemo li specijalno $x=\frac{\sqrt[n]{n}}{n}$ i $a=\frac{1}{n}$ slijedi

$$\left(1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}\right)^{\frac{1}{n}}<1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2},$$

dok za $x=-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}$ i $a=\frac{1}{n}$ slijedi

$$\left(1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}\right)^{\frac{1}{n}}<1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}.$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo

$$\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}+\sqrt[n]{1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n}} < 1+\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}+1-\frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}=2$$

što je i trebalo dokazati.

Marko Dodig (4),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3890. *Neka su x_1, x_2, x_3, x_4 rješenja jednadžbe*

$$x^4+kx^2+121x-2020=0.$$

Ako je $x_1x_2=20$, odredi k.

Rješenje. Neka su x_1, x_2, x_3 i x_4 rješenja dane jednadžbe i neka je $x_1x_2=20$. Vièteove formule za našu jednadžbu glase:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=0$$
$$x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4=k$$
$$x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+x_1x_3x_4+x_2x_3x_4=-121$$
$$x_1x_2x_3x_4=-2020.$$

Sada je

$$x_3x_4=\frac{x_1x_2x_3x_4}{x_1x_2}=\frac{-2020}{20}=-101.$$

Možemo zapisati zadanu jednadžbu kao:

$$\begin{aligned}&x^4+kx^2+121x-2020\\&=(x-x_1)\cdot(x-x_2)\cdot(x-x_3)\cdot(x-x_4)\\&=(x^2-px+20)\cdot(x^2-qx-101)\end{aligned}$$

za neke realne brojeve p i q. Uspoređujući koeficijente s obje strane jednakosti dobivamo:

$$p+q=0$$
$$101p-20q=121$$
$$k=-101+pq+20.$$

Prve dvije jednadžbe riješimo kao linearni sustav i dobivamo $p=1$ i $q=-1$, a iz treće jednadžbe je

$$k=-81+pq=-82.$$

Marko Dodig (4), Zagreb

3891. *Ako dva dvoznamenkasta broja napišemo jedan do drugog, dobijemo četveroznamenkasti broj koji je djeljiv njihovim produktom. Nađi sve takve parove brojeva.*

Rješenje. Neka su a i b traženi brojevi. Tada vrijedi

$$100a+b=k\cdot ab, \quad k\in\mathbb{N}.$$

Vidimo da $a|b$, tj. $b=ax$, gdje je $x\in\{1,2,4,5\}$. Iz gornje jednadžbe slijedi

$$100=x\cdot(ka-1), \quad k>1.$$

Sada razlikujemo četiri slučaja, uzimajući u obzir da je $k>1$ i a dvoznamenkasti broj:

1° za $x=1 \implies ka=101$, a ova jednadžba nema rješenja jer je 101 prost broj;

2° za $x=2 \implies ka=51$, i jedino moguće rješenje je $a=17$, $k=3$ i $b=34$;

3° za $x=4 \implies ka=26$, i jedino rješenje je $a=13$, $k=2$ i $b=52$;

4° za $x=5 \implies ka=21$, što u našem slučaju nema rješenja.

Dakle, imamo dva para dvoznamenkastih brojeva koji zadovoljaju uvjete zadatka

$$(a,b)\in\{(13,52),(17,34)\}.$$

Marko Dodig (4), Zagreb

3892. *Nađi sva rješenja sistema jednadžbi*

$$x^3+8y^3=x+2y$$
$$2x^2y+4xy^2=x+2y.$$

Rješenje. Ako jednadžbe sustava rastavimo na faktore, možemo ga zapisati kao:

$$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=x+2y$$
$$2xy\,(x+2y)=x+2y.$$

1° Ako je $x+2y=0 \implies x=r$ i $y=-\frac{r}{2}$ su rješenja sustava za bilo koji realan broj r.

2° Ako je $x+2y\neq 0$ obje jednadžbe sustava možemo podijeliti s $x+2y$ i on je ekvivalentan sustavu:

$$x^2-2xy+4y^2=1$$
$$2xy=1.$$

Iz druge jednadžbe je $y=\frac{1}{2x}$ i to uvrstimo u prvu odakle slijedi:

$$x^2-1+\frac{1}{x^2}=1$$
$$\implies x^4-2x^2+1=0$$
$$\implies (x^2-1)^2=0$$
$$\implies x^2-1=0$$
$$\implies x_{1,2}=\pm 1.$$

Skup svih rješenja našeg sustava možemo zapisati kao:

$$(x,y)\in\left\{\left(-1,-\frac{1}{2}\right),\left(1,\frac{1}{2}\right)\right\}$$
$$\cup\left\{\left(r,-\frac{r}{2}\right) : r\in\mathbb{R}\right\}.$$

Marko Dodig (4), Zagreb

3893. *Neka su realni brojevi k i k^2 korijeni jednadžbe $x^2+ax+b=0$. Dokaži da je $a\le 0.25$ i $a^3-3ab+b^2+b=0$.*

Rješenje. Vièteove formule za danu jednadžbu glase

$$x_1+x_2=-a$$
$$x_1x_2=b,$$

pa iz uvjeta zadatka je $k^2+k=-a$ i $k^3=b$.

Najprije imamo:

$$\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\ge 0 \implies k^2+k+\frac{1}{4}\ge 0$$
$$\implies -a\ge -\frac{1}{4} \implies a\le\frac{1}{4}.$$

Još je

$$\begin{aligned}
&a^3-3ab+b^2+b\\
&=(-k^2-k)^3+3\cdot(k^2+k)\cdot k^3+k^6+k^3\\
&=-k^3-3k^4-3k^5-k^6+3k^4+3k^5+k^6+k^3\\
&=0.
\end{aligned}$$

Marko Dodig (4), Zagreb

3894. *Dokaži jednakost*

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d\\ -b & a & d & -c\\ -c & -d & a & b\\ -d & c & -b & a\end{vmatrix}=(a^2+b^2+c^2+d^2)^2.$$

Rješenje. Razvijemo danu determinantu po prvom stupcu, pa imamo redom

$$\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} a & b & c & d\\ -b & a & d & -c\\ -c & -d & a & b\\ -d & c & -b & a\end{vmatrix}\\
&=a\begin{vmatrix} a & d & -c\\ -d & a & b\\ c & -b & a\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix} b & c & d\\ -d & a & b\\ c & -b & a\end{vmatrix}\\
&\quad-c\begin{vmatrix} b & c & d\\ a & d & -c\\ c & -b & a\end{vmatrix}+d\begin{vmatrix} b & c & d\\ a & d & -c\\ -d & a & b\end{vmatrix}\\
&=a\left(a\begin{vmatrix} a & b\\ -b & a\end{vmatrix}+d\begin{vmatrix} d & -c\\ -b & a\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & -c\\ a & b\end{vmatrix}\right)\\
&\quad+b\left(b\begin{vmatrix} a & b\\ -b & a\end{vmatrix}+d\begin{vmatrix} c & d\\ -b & a\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} c & d\\ a & b\end{vmatrix}\right)\\
&\quad-c\left(b\begin{vmatrix} d & -c\\ -b & a\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix} c & d\\ -b & a\end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} c & d\\ d & -c\end{vmatrix}\right)\\
&\quad+d\left(b\begin{vmatrix} d & -c\\ a & b\end{vmatrix}-a\begin{vmatrix} c & d\\ a & b\end{vmatrix}-d\begin{vmatrix} c & d\\ d & -c\end{vmatrix}\right)\\
&=a[a(a^2+b^2)+d(ad-bc)+c(bd+ac)]\\
&\quad+b[b(a^2+b^2)+d(ac+bd)+c(bc-ad)]\\
&\quad-c[b(ad-bc)-a(ac+bd)+c(-c^2-d^2)]\\
&\quad+d[b(bd+ac)-a(bc-ad)-d(-c^2-d^2)]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= a^2(a^2+b^2) + ad(ad-bc) + ac(bd+ac)\\
&\quad + b^2(a^2+b^2) + bd(ac+bd)\\
&\quad + bc(bc-ad) - bc(ad-bc)\\
&\quad + ac(ac+bd) + c^2(c^2+d^2) + bd(bd+ac)\\
&\quad - ad(bc-ad) + d^2(c^2+d^2)\\
&= (a^2+b^2)^2 + 2ad(ad-bc) + 2ac(bd+ac)\\
&\quad + 2bd(ac+bd) + 2bc(bc-ad)\\
&\quad + (c^2+d^2)^2\\
&= (a^2+b^2)^2 + 2a^2d^2 + 2a^2c^2 + 2b^2d^2\\
&\quad + 2b^2c^2 + (c^2+d^2)^2\\
&= (a^2+b^2+c^2+d^2)^2.
\end{aligned}
$$

Marko Dodig (4), Zagreb

3895. *Za koje x red*

$$\ln x + \ln^2 x + \ldots + \ln^n x + \ldots$$

konvergira?

Rješenje. Dakle imamo sumu: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\ln x)^n$.

Neka je $r = \ln x$. Tada je $\sum\limits_{n=0}^{\infty} r^n$. Red je konvergentan pod uvjetom da je $|r| < 1$. Slijedi $-1 < \ln x < 1$. Potrebno je odrediti za koje x vrijedi ova nejednakost. Koristimo potencije od e:

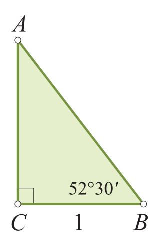
$$e^{-1} < e^{\ln x} < e^1$$
$$\frac{1}{e} < x < e.$$

Dakle, za $x \in \left(\frac{1}{e}, e\right)$ red konvergira.

Vilim Ivanuš (4), Prva gimnazija, Varaždin

3896. *U trokutu ABC je $|BC| = 1$, $\sphericalangle ABC = 52^\circ 30'$ i $\sphericalangle BCA = 90^\circ$. Izračunaj $|AC|$.*

Prvo rješenje.



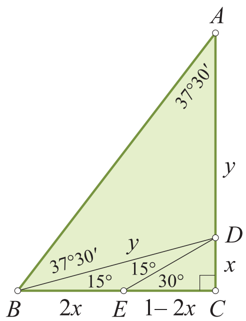
Sa slike vidimo

$$
\begin{aligned}
|AC| &= \operatorname{tg} 52^\circ 30' = \operatorname{tg}(30^\circ + 22^\circ 30')\\
&= \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 22^\circ 30'}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \cdot \operatorname{tg} 22^\circ 30'}\\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}}}\\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}}}\\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}}\\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{\frac{4-4\sqrt{2}+2}{2}}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{\frac{4-4\sqrt{2}+2}{2}}}\\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3-2\sqrt{2}}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3-2\sqrt{2}}}\\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{\left(\sqrt{2}-1\right)^2}}\\
&= \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{2} - 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \left(\sqrt{2}-1\right)}\\
&= \frac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 3}{3 - \sqrt{6} + \sqrt{3}}\\
&= \frac{\sqrt{3} \cdot \left(1 + \sqrt{6} - \sqrt{3}\right)}{\sqrt{3} \cdot \left(1 - \sqrt{2} + \sqrt{3}\right)}
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1+\sqrt{6}-\sqrt{3}}{1-\sqrt{2}+\sqrt{3}} \cdot \frac{1+\sqrt{3}+\sqrt{2}}{1+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$$
$$= \frac{4\sqrt{2}+2\sqrt{3}-2}{2\cdot\left(\sqrt{3}+1\right)}$$
$$= \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}$$
$$= \frac{2\sqrt{6}-2\sqrt{2}-2\sqrt{3}+4}{2}$$
$$= \sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2.$$

Marko Dodig (4), Zagreb

Drugo rješenje. Tada je $\sphericalangle BAC = 90^\circ - \sphericalangle ABC = 37^\circ 30'$.



Na stranici $\overline{AC}$ odredimo točku D tako da bude $\sphericalangle DBC = 15^\circ$, pa je $\sphericalangle ABD = 37^\circ 30'$. Trokut ABD je jednakokračan, što znači da je $|BD| = |DA| = y$. Na stranici $\overline{BC}$ odredimo točku E tako da je $\sphericalangle BDE = 15^\circ$. Trokut BED je jednakokračan pa je $|BE| = |ED| = 2x$ i $|CE| = |BC| - |BE| = 1 - 2x$. Budući da u pravokutnom trokutu CDE imamo $\sphericalangle DEC = 30^\circ$, zaključujemo da je $\frac{1}{2} = \sin 30^\circ = |CD| : 2x$, tj. $|CD| = x$. Primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut CDE dobijemo

$$(2x)^2 = x^2 + (1-2x)^2,$$

odakle je $x = 2 - \sqrt{3}$ jer mora biti $x < 1$. Kako je trokut BCD pravokutni imamo

$$y^2 = 1^2 + (2-\sqrt{3})^2,$$

a odavde je

$$y = 2\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}-\sqrt{2}.$$

Najzad, iz trokuta ABC slijedi

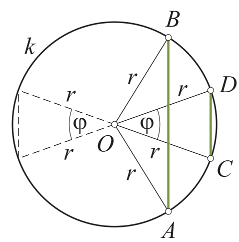
$$x + y = |AC| = \sqrt{6}-\sqrt{3}-\sqrt{2}+2.$$

Ur.

3897. *U kružnici $k(O, r)$ dane su paralelne tetive $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Ako je $|AB| = 46$, $|CD| = 18$ i $\sphericalangle AOB = 3\sphericalangle COD$, odredi r.*

Prvo rješenje. Označimo zadane elemente kao na slici: $|AB| = 46$, $|CD| = 18$ i koristimo kosinusov poučak:

$$18^2 = r^2 + r^2 - 2\cdot r\cdot r\cdot\cos\varphi$$
$$46^2 = r^2 + r^2 - 2\cdot r\cdot r\cdot\cos 3\varphi$$
$$r^2\cdot(1-\cos\varphi) = 162$$
$$r^2\cdot(1-\cos 3\varphi) = 1058.$$



Dijeljenjem druge jednadžbe prvom slijedi:

$$\frac{1-\cos 3\varphi}{1-\cos\varphi} = \frac{529}{81}$$
$$81(1-4\cos^3\varphi+3\cos\varphi) = 529(1-\cos\varphi)$$
$$81\cos^3\varphi - 193\cos\varphi + 112 = 0$$
$$81\cos^3\varphi - 81\cos\varphi - 112\cos\varphi + 112 = 0$$
$$81\cos\varphi\cdot(\cos^2\varphi - 1) - 112(\cos\varphi - 1) = 0$$
$$(\cos\varphi - 1)[81\cos\varphi\cdot(\cos\varphi+1) - 112] = 0.$$

U slučaju $\cos\varphi = 1 \implies \varphi = 0$, a to nema geometrijskog smisla. Znači imamo kvadratnu jednadžbu:

$$81\cdot\cos^2\varphi + 81\cdot\cos\varphi - 112 = 0,$$

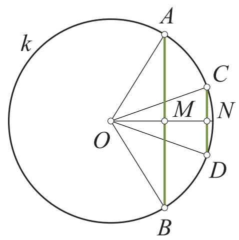
čija su rješenja $(\cos\varphi)_1 = -\frac{16}{9} < -1$, što nije moguće i $(\cos\varphi)_2 = \frac{7}{9}$, što je jedino moguće. Sada je

$$r^2 = \frac{162}{1-\cos\varphi} = 729$$
$$\implies r = 27.$$

Marko Dodig (4), Zagreb

Drugo rješenje. Neka su M i N polovišta od $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$, $\sphericalangle CON = x$. Tada je $\sphericalangle AON = 3x$ i

$$\frac{23}{9} = \frac{|AM|}{|CN|} = \frac{r\sin 3x}{r\sin x} = \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x}$$
$$= 3 - 4\sin^2 x.$$



Sada je

$$\sin^2 x = \frac{1}{4}\left(3 - \frac{23}{9}\right) = \frac{1}{9} \quad \text{i} \quad \sin x = \frac{1}{3}.$$

Dakle, $r = \dfrac{|CN|}{\sin x} = 27$.

Ur.

3898. *Težišnice t_a i t_b iz vrhova A i B trokuta ABC su okomite. Dokaži nejednakost*

$$5(a^2 + b^2 - c^2) \geq 8ab,$$

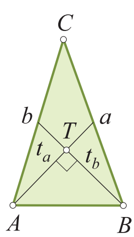
gdje su a, b, c stranice trokuta.

Prvo rješenje. Koristimo formule za duljine težišnica trokuta

$$t_a = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$$
$$t_b = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2(a^2+c^2)-b^2}$$

i činjenicu da težište svaku težišnicu dijeli u omjeru $2:1$, gledano od vrha trokuta. Tako, prema Pitagorinu poučku za $\triangle ABT$, slijedi jednakost:

$$\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\left(b^2+c^2\right)-a^2}\right)^2$$
$$+\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2\left(a^2+c^2\right)-b^2}\right)^2 = c^2.$$



Jednostavnim sređivanjem odmah slijedi

$$a^2 + b^2 = 5c^2.$$

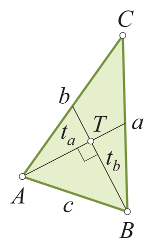
Na kraju, zadana nejednakost je ekvivalentna s

$$5\cdot(a^2+b^2-c^2) \geq 8ab$$
$$\Longleftrightarrow 5\cdot\left(a^2+b^2-\frac{a^2+b^2}{5}\right) \geq 8ab$$
$$\Longleftrightarrow 4\cdot(a^2+b^2) \geq 8ab$$
$$\Longleftrightarrow a^2+b^2 \geq 2ab$$
$$\Longleftrightarrow (a-b)^2 \geq 0,$$

što je uvijek točno. Jednakost se postiže samo u slučaju kada je $a = b$ tj. kada je trokut jednakokračan.

Marko Dodig (4), Zagreb

Drugo rješenje. $\sphericalangle BTA = \dfrac{\pi}{2}$.



$$c^2 = \left(\frac{2}{3}t_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}t_b\right)^2 = \frac{4}{9}(t_a^2 + t_c^2)$$
$$= \frac{1}{9}(4t_a^2 + 4t_c^2)$$
$$= \frac{1}{9}[2(b^2+c^2) - a^2 + 2(a^2+c^2) - b^2]$$
$$= \frac{a^2+b^2+4c^2}{9}$$
$$\Longrightarrow 5c^2 = a^2 + b^2.$$

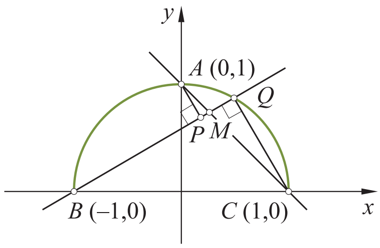
Tada je

$$5(a^2+b^2-c^2) = 5(a^2+b^2) - (a^2+b^2)$$
$$= 4(a^2+b^2) \geq 8ab.$$

Ur.

3899. *B i C su krajnje točke i A je polovište polukružnice. Neka je M točka na stranici $\overline{AC}$, a P i Q nožišta okomica iz A i C na pravac BM. Dokaži $|BP| = |PQ| + |QC|$.*

Prvo rješenje. Smjestimo danu polukružnicu u koordinatni sustav kao na slici, tj. neka je njezino središte u ishodištu i neka se nalazi u gornjoj poluravnini. Također možemo pretpostaviti da se radi o jediničnoj polukružnici. Kako su svi kutovi nad promjerom kružnice pravi, točka Q se nalazi na samoj polukružnici.



Jednadžba pravca AC glasi $y = -x + 1$, pa uzmimo da je $M(x_M, -x_M + 1)$. Sada je

$$BM \ldots \ y = \frac{1 - x_M}{1 + x_M}x + \frac{1 - x_M}{1 + x_M}.$$

Kako je $k_{CQ} = k_{AP} = \dfrac{x_M + 1}{x_M - 1}$, slijede jednadžbe tih pravaca:

$$AP \ldots \ y = \frac{x_M + 1}{x_M - 1}x + 1,$$

$$CQ \ldots \ y = \frac{x_M + 1}{x_M - 1}x - \frac{x_M + 1}{x_M - 1}.$$

$BM \cap AP = \{P\}$ pa rješavajući linearni sustav slijedi

$$P\left(\frac{x_M \cdot (1 - x_M)}{1 + x_M^2}, \frac{1 - x_M}{1 + x_M^2}\right),$$

i isto tako:

$$BM \cap CQ = \{Q\} \implies Q\left(\frac{2x_M}{1 + x_M^2}, \frac{1 - x_M^2}{1 + x_M^2}\right).$$

Sada računamo:

$$|BP| = \sqrt{\left(\frac{x_M(1-x_M)}{1+x_M^2}+1\right)^2 + \left(\frac{1-x_M}{1+x_M^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1 + x_M^2}},$$

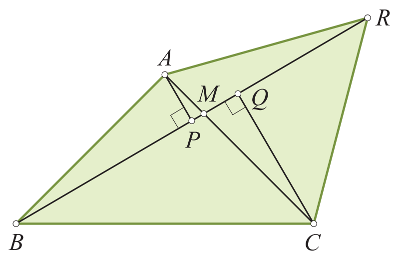
$$|PQ| = \left[\left(\frac{2x_M}{1 + x_M^2} - \frac{x_M(1 - x_M)}{1 + x_M^2}\right)^2 + \left(\frac{1 - x_M^2}{1 + x_M^2} - \frac{1 - x_M}{1 + x_M^2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}x_M}{\sqrt{1 + x_M^2}},$$

$$|QC| = \sqrt{\left(\frac{2x_M}{1 + x_M^2} - 1\right)^2 + \left(\frac{1 - x_M^2}{1 + x_M^2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2} \cdot (1 - x_M)}{\sqrt{1 + x_M^2}}.$$

Odavde vidimo da je $|BP| = |PQ| + |QC|$, što je i trebalo pokazati.

Marko Dodig (4), Zagreb

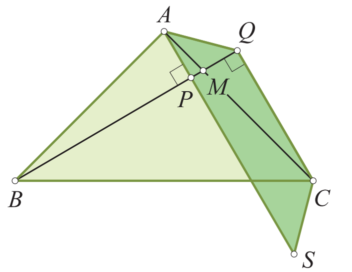
Drugo rješenje. Neka je $R \in BQ$ tako da je Q između B i R i $|QR| = |QC|$. Kako je $\sphericalangle BQC$ pravi, Q leži na polukružnici. Dakle, četverokut $BAQC$ je tetivni i $\sphericalangle AQC = 180^\circ - \sphericalangle ABC = 135^\circ$.



Odavde je $\sphericalangle AQR = 360^\circ - 135^\circ - 90^\circ = 135^\circ$. Zato su trokuti AQC i AQR sukladni, odakle je $|AR| = |AC| = |AB|$. U jednakokračnom trokutu ABR je $|AP|$ visina, pa je $|BP| = |PR|$ i $|PR| = |PQ| + |QC|$, što je i trebalo dokazati.

Ur.

Treće rješenje. Neka je S na AP tako da je $AQCS$ jednakokračan trapez. Kako je $\sphericalangle BQC = 90^\circ$, Q leži na polukružnici pa je četverokut $ABCQ$ tetivni. Odavde je $\sphericalangle AQB = \sphericalangle ACB = 45^\circ$. U pravokutnom trokutu PAQ je $\sphericalangle PAQ = 45^\circ$, pa je $\sphericalangle ASC = 45^\circ$.



Kako je $\sphericalangle ASC = \sphericalangle ABC$, četverokut $ABSC$ je tetivni, pa je $\sphericalangle ASB = \sphericalangle ACB = 45^\circ$. Trokut BPS je jednakokračan i $|BP| = |PS|$. Konačno, u jednakokračnom trapezu $AQCS$ imamo $|AS| = 2|AP| + |QC|$, tj.

$$|BP| = |PS| = |AP| + |QC| = |PQ| + |QC|.$$

Ur.

3900. *Neka su R i r duljine polumjera opisane i upisane kružnice trokuta ABC. Dokaži nejednakost*

$$\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2} \geq \frac{2r}{R}.$$

Rješenje. Prvo ćemo dokazati jedan poznati identitet, koji vrijedi u svakom trokutu

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{4R}.$$

Krenimo od kosinusovog poučka:

$$\begin{aligned}
a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha \\
&= b^2 + c^2 - 2bc\cdot\left(1 - 2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= (b-c)^2 + 4bc\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}
\end{aligned}$$

$$4bc\sin^2\frac{\alpha}{2} = a^2 - (b-c)^2$$

$$\begin{aligned}
bc\sin^2\frac{\alpha}{2} &= \frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2} \\
&= (s-b)\cdot(s-c)
\end{aligned}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

Analogno dobivamo

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}} \quad \text{i}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}.$$

Množenjem ovih jednakosti slijedi traženi identitet:

$$\begin{aligned}
\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} &= \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{abc} \\
&= \frac{P^2}{s\cdot 4RP} = \frac{P}{4Rs} \\
&= \frac{r}{4R}.
\end{aligned}$$

Sada danu nejednakost pišemo u obliku:

$$\begin{aligned}
&\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2} \geq 8\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\
&\iff \cos^2\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}\right) \\
&\geq 8\sin\left(90^\circ - \frac{\beta}{2} - \frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\
&\iff \cos^2\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\gamma}{2}\right) \\
&\geq 8\cos\left(\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \\
&\iff \left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2 \\
&\geq 8\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right) \\
&\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2} + 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \\
&\quad + \sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} \\
&\geq 8\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - 8\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} \\
&\iff \cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2} - 6\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \\
&\quad + 9\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2} \geq 0 \\
&\iff \left(\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - 3\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)^2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Kako posljednja nejednakost očito vrijedi i dana nejednakost također vrijedi i zadatak je riješen. Jednakost se postiže u slučaju $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$, tj. kada je trokut jednakostraničan.

Marko Dodig (4), Zagreb

3901. *Odredi sumu*

$$\binom{100}{0}+\frac{1}{2}\binom{100}{1}+\frac{1}{3}\binom{100}{2}+\ldots+\frac{1}{101}\binom{100}{100}.$$

Prvo rješenje. Krenimo od binomnog poučka:

$$(x+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k \Big/ \int_0^x dt$$

$$\frac{(t+1)^{n+1}}{n+1}\Big|_0^x=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}$$

$$\frac{(x+1)^{n+1}-1}{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{x^{k+1}}{k+1}.$$

Sada uvrstimo $x=1$, pa slijedi

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\binom{n}{k}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}.$$

Specijalno za $n=100$ dobivamo danu sumu:

$$\sum_{k=0}^{100}\frac{1}{k+1}\binom{100}{k}=\frac{2^{101}-1}{101}.$$

Marko Dodig (4), Zagreb

Drugo rješenje.

$$\frac{1}{k+1}\binom{100}{k}$$
$$=\frac{100\cdot(100-1)\cdot\ldots\cdot(100-k+1)}{(k+1)\cdot k\cdot(k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}$$
$$=\frac{1}{101}\cdot\frac{101\cdot(101-1)\cdot\ldots\cdot(101-k)}{(k+1)!}$$
$$=\frac{1}{101}\binom{101}{k+1}$$

$$S=\frac{1}{101}\left[\binom{101}{1}+\binom{101}{2}+\ldots+\binom{101}{101}+\binom{101}{0}-\binom{101}{0}\right]$$
$$=\frac{1}{101}[(1+1)^{101}-1]=\frac{1}{101}(2^{101}-1).$$

Ur.

3902. *Neka je a duljina baze i v pripadna visina jednakokračnog trokuta. Odredi polumjer ρ kružnice koja dodiruje bazu, visinu i iznutra opisanu kružnicu tog trokuta. Dokaži da je ρ jednako polumjeru upisane kružnice danog trokuta.*

Rješenje. Najprije izračunajmo duljinu kraka ovog jednakokračnog trokuta po Pitagorinu poučku:

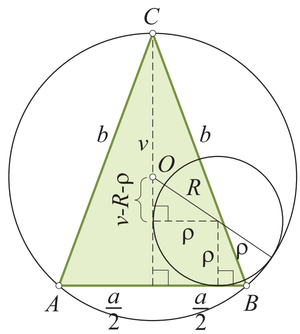
$$b=\sqrt{v^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{a^2+4v^2}}{2}.$$

Polumjer opisane kružnice računamo iz

$$R=\frac{abc}{4P}=\frac{a^2+4v^2}{8v},$$

a polumjer upisane kružnice iz formule

$$r=\frac{P}{s}=\frac{\frac{av}{2}}{\frac{a+2b}{2}}=\frac{av}{a+\sqrt{a^2+4v^2}} \qquad (1)$$



Sa slike sada vidimo

$$(R-\rho)^2=[v-(R+\rho)]^2+\rho^2.$$

Sređivanjem dobivamo

$$\rho^2+4R\rho-2v\rho+v^2-2Rv=0,$$

te uvrštavanjem gore dobivene vrijednosti za R i daljim sređivanjem dobivamo kvadratnu jednadžbu po nepoznanici ρ

$$4v\cdot\rho^2+2a^2\cdot\rho-va^2=0,$$

čija su rješenja

$$\rho_{1,2}=\frac{-a^2\pm a\sqrt{a^2+4v^2}}{4v}.$$

Iz geometrijskih razloga jedino moguće rješenje je:

$$\rho=\frac{a\left(\sqrt{a^2+4v^2}-a\right)}{4v}\cdot\frac{\sqrt{a^2+4v^2}+a}{\sqrt{a^2+4v^2}+a}$$
$$=\frac{av}{a+\sqrt{a^2+4v^2}}=r.$$

Ovime je zadatak riješen.

Marko Dodig (4), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 510. *Električno kuhalo ugrije litru vode od 20 °C do 90 °C za 3 minute. Korisnost mu je 90 posto. Kolika struja teče kroz kuhalo? Napon električne gradske mreže je 230 V. Specifični toplinski kapacitet vode je 4200 J/kgK, a njena je gustoća 1000 kg/m³.*

Rješenje.

$V = 1\ \mathrm{L}$

$m = 1\ \mathrm{kg}$

$t_1 = 20\ ^\circ\mathrm{C}$

$t_2 = 90\ ^\circ\mathrm{C}$

$\Delta t = 70\ ^\circ\mathrm{C}$

$\Delta T = 70\ \mathrm{K}$

$t = 3\ \mathrm{min} = 180\ \mathrm{s}$

$\eta = 90\ \%$

$c = 4200\ \dfrac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}}$

$\underline{U = 230\ \mathrm{V}}$

$I = ?$

$$\begin{aligned} W_{\text{korisni}} &= Q = cm\Delta t \\ &= 4200\ \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{kgK}} \cdot 1\ \mathrm{kg} \cdot 70\ \mathrm{K} \\ &= 294\,000\ \mathrm{J} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W_{\text{ukupni}} &= \frac{W_{\text{korisni}}}{\eta} = \frac{294\,000\ \mathrm{J}}{0.9} \\ &= 326\,666.7\ \mathrm{J} \end{aligned}$$

$$P = \frac{W}{t} = \frac{326\,666.7\ \mathrm{J}}{180\ \mathrm{s}} = 1814.8\ \mathrm{W}$$

$$I = \frac{P}{U} = \frac{1814.8\ \mathrm{W}}{230\ \mathrm{V}} = 7.89\ \mathrm{A}.$$

Iva Stijaković (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 511. *Prva široko korištena temperaturna ljestvica bila je ona koju je izumio njemački fizičar Daniel Gabriel Fahrenheit. Ta se ljestvica sada službeno koristi samo u SAD-u, Liberiji i Kajmanskim otocima. Temperatura smrzavanja vode u toj ljestvici iznosi 32 °F, a voda vrije na 212 °F. Koliko stupnjeva Celzija odgovara temperaturi od 0 °F?*

Rješenje.

$0\ ^\circ\mathrm{C} = 32\ ^\circ\mathrm{F}$

$\underline{100\ ^\circ\mathrm{C} = 212\ ^\circ\mathrm{F}}$

$0\ ^\circ\mathrm{F} = ?\ ^\circ\mathrm{C}$

$t_{^\circ\mathrm{F}} = at_{^\circ\mathrm{C}} + b$

$32\ ^\circ\mathrm{F} = a \cdot 0\ ^\circ\mathrm{C} + b$

$b = 32$

$212\ ^\circ\mathrm{F} = a \cdot 100\ ^\circ\mathrm{C} + 32$

$$a = \frac{212 - 32}{100} = 1.8$$

$t_{^\circ\mathrm{F}} = 1.8 \cdot t_{^\circ\mathrm{C}} + 32$

$$t_{^\circ\mathrm{C}} = \frac{t_{^\circ\mathrm{F}} - 32}{1.8} = -17.8\ ^\circ\mathrm{C}.$$

Petar Celjak (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 512. *Vozač je parkirao automobil na nizbrdici i zaboravio povući ručnu kočnicu pa se automobil počeo kretati nizbrdo. Nizbrdica je duga 20 i visoka 4 m, a nakon nje je cesta vodoravna. Automobil se sam zaustavio prešavši 30 m po vodoravnom dijelu ceste. Izračunajte silu trenja između kotača i ceste uz pretpostavku da je ta sila jednaka i na nizbrdici i na vodoravnom dijelu ceste. Koliku je kinetičku energiju imao automobil na početku vodoravnog dijela puta? Masa automobila je 1500 kg.*

Rješenje.

$l_1 = 20\ \mathrm{m}$

$h = 4\ \mathrm{m}$

$l_2 = 30\ \mathrm{m}$

$\underline{m = 1500\ \mathrm{kg}}$

$F_{tr} = ?$

$$\begin{aligned} E_{gp} &= mgh \\ &= 1500\ \mathrm{kg} \cdot 10\ \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{kg}} \cdot 4\ \mathrm{m} \\ &= 60\,000\ \mathrm{J} = W_{\text{sile trenja}} \end{aligned}$$

$$F_{tr} = \frac{W}{s}$$

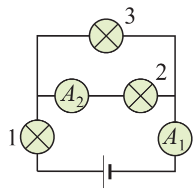
$s = l_1 + l_2 = 50\ \mathrm{m}$

$$F_{tr} = \frac{60\,000\ \mathrm{J}}{50\ \mathrm{m}} = 1200\ \mathrm{N}$$

$$W_{F_{tr}\ \text{na nizbdici}} = F_{tr} l_1$$
$$= 1200\ \text{N} \cdot 20\ \text{m} = 24\,000\ \text{J}$$
$$E_k = E_{gp} - W_{F_{tr}\ \text{na nizbrdici}}$$
$$= 60\,000\ \text{J} - 24\,000\ \text{J} = 36\,000\ \text{J}.$$

Marija Miloš (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 513. *Izračunajte naboj koji prođe kroz treće trošilo za 10 minuta ako prvi ampermetar mjeri struju od 500 mA, a drugi od 400 mA. Napon na prvom trošilu je 10 V, a napon izvora je 24 V. Izračunajte otpore svih trošila.*



Rješenje.

$I_1 = 500\ \text{mA} = 0.5\ \text{A}$

$I_2 = 400\ \text{mA} = 0.4\ \text{A}$

$t = 10\ \text{min} = 600\ \text{s}$

$U = 24\ \text{V}$

$\underline{U_1 = 10\ \text{V}}$

$Q_1 = ?$

$R_1,\ R_2,\ R_3 = ?$

$I_3 = I_1 - I_2 = 0.5\ \text{A} - 0.4\ \text{A} = 0.1\ \text{A}$

$Q_3 = I_3 t = 0.1\ \text{A} \cdot 600\ \text{s} = 60\ \text{C}$

$$R_1 = \frac{U_1}{I_1} = \frac{10\ \text{V}}{0.5\ \text{A}} = 20\ \Omega$$

$U_2 = U_3 = U - U_1 = 14\ \text{V}$

$$R_2 = \frac{U_2}{I_2} = \frac{14\ \text{V}}{0.4\ \text{A}} = 35\ \Omega$$
$$R_3 = \frac{U_3}{I_3} = \frac{14\ \text{V}}{0.1\ \text{A}} = 140\ \Omega.$$

Gregor Klarić (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

1798. *Kojom brzinom kruži orbiter oko Mjeseca (LRO), ako mu je radijus kruženja 1825 km, a masa Mjeseca je* $7.342 \cdot 10^{22}$ *kg ?*

Rješenje. Izjednačavanje centripetalne sile i gravitacijskog privlačenja (uvjet kruženja) daje:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{GmM_m}{r^2}.$$

Skraćivanje s r i m daje

$$v^2 = \frac{GM_m}{r} = \frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 7.342 \cdot 10^{22}}{1\,825\,000}.$$

Odatle je

$$v = 1638.6\ \text{m/s} = 5899\ \text{km/h}.$$

Marko Dodig (4),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

1799. *Koliki je indeks loma tanke bikonveksne leće, ako je žarišna daljina 30 cm, a radijusi zakrivljenosti dioptara 25 cm i 20 cm?*

Rješenje. Jačina leće izražena preko žarišne daljine ili radijusa zakrivljenosti dioptara glasi

$$J = \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right).$$

Uvrštavanjem zadanih dimenzija (u metrima) daje

$$\frac{1}{0.3} = (n-1)\left(\frac{1}{0.25} + \frac{1}{0.2}\right),$$
$$n = 1 + \frac{1}{9 \cdot 0.3} = 1.3704.$$

Ur.

1800. *Odredi broj protona i broj neutrona u jednom gramu prirodnog bakra (Cu). Bakar ima 2 izotopa, čije su atomske mase i učestalosti u prirodi određene tablicom:*

I	M	P
^{63}Cu	62.929601	69.17 %
^{65}Cu	64.927794	30.83 %

Rješenje. Jedan gram prirodnog bakra sadrži $N = N_A \cdot 1/M$ atoma, gdje je $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$ Avogadrov broj, a

$$M = \phi_1 M_1 + \phi_2 M_2$$
$$= 0.6917 \cdot 62.929601 + 0.3083 \cdot 64.927794$$
$$= 63.5456\ \text{g/mol}.$$

Dakle atoma bakra ima ukupno

$$N = 9.47665 \cdot 10^{21}.$$

S obzirom da svi atomi bakra imaju 29 protona, ukupan broj protona je

$$N_p = N \cdot 29 = 2.7482 \cdot 10^{23}.$$

Broj neutrona dobijemo oduzimanjem 29 od ukupnog broja nukleona, dakle $63-29=34$ za ^{63}Cu i $65-29=36$ za ^{65}Cu. Broj neutrona je tada

$$\begin{aligned} N_n &= (\phi_1 \cdot 34 + \phi_2 \cdot 36)N \\ &= (23.5178 + 11.0988)N \\ &= 3.2805 \cdot 10^{23}. \end{aligned}$$

Uočimo da je broj neutrona nešto veći od broja protona, i da je njihov zbroj neznatno veći od Avogadrovog broja ($N_p + N_n = 6.0287 \cdot 10^{23}$). Višak pripisujemo energiji vezanja nukleona, koja je velika za bakar (veća od ^{12}C koji definira Avogadrov broj), pa nukleoni imaju nešto manju masu i stane ih više u 1 gram tvari.

Ur.

1801. *Horizontalni domet kosog hica povećа se za 120 m, a vrijeme leta za 0.8 s, ako početnu brzinu povećamo za 10 m/s uz isti kut izbačaja. Odredi početnu brzinu, horizontalni domet i vrijeme leta prije povećanja. Otpor zraka zanemari.*

Rješenje. Izrazi za horizontalni domet D i vrijeme leta T kosog hica su:

$$\begin{aligned} D &= \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha, \\ T &= \frac{2v_0}{g}\sin\alpha. \end{aligned}$$

Odatle je odnos veličina zadan sa:

$$\begin{aligned} \frac{(v_0+10)^2}{g}\sin 2\alpha &= \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha + 120, \\ \frac{2v_0+20}{g}\sin\alpha &= \frac{2v_0}{g}\sin\alpha + 0.8. \end{aligned}$$

Donja jednadžba je linearna i kraćenjem iz nje dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{20}{g}\sin\alpha &= 0.8, \\ \sin\alpha &= \frac{0.8 \cdot 9.81}{20} = 0.3924. \end{aligned}$$

Drugu jednadžbu pomnožimo s $g/\sin 2\alpha = 13.59$:

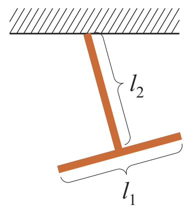
$$\begin{aligned} (v_0+10)^2 &= v_0^2 + 120 \cdot 13.59, \\ 20v_0 + 100 &= 1630.8, \\ v_0 &= 76.54 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Iz početne brzine i kuta izbačaja dobijemo

$$\begin{aligned} D &= 431.08 \text{ m}, \\ T &= 6.123 \text{ s}. \end{aligned}$$

Marko Dodig (4), Zagreb

1802. *Dva štapa na slici čine fizičko njihalo. Izrazi period malih njihaja pomoću l_1 i l_2, ako su štapovi jednake linijske gustoće.*



Rješenje. Period malih njiha T određen je iz

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}},$$

gdje je I moment inercije oko osi rotacije, $M = m_1 + m_2$ ukupna masa, a d udaljenost težišta od osi rotacije. Kako je težište štapa 2 na polovici ($l_2/2$), a težište štapa 1 na kraju štapa 2 (l_2), imamo

$$Md = m_1 l_2 + m_2\frac{l_2}{2}.$$

Moment tromosti je po poučku o paralelnim osima:

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{12}m_1 l_1^2 + m_1 l_2^2 \\ I_2 &= \frac{1}{3}m_2 l_2^2 \\ I &= I_1 + I_2 = \frac{1}{12}m_1 l_1^2 + m_1 l_2^2 + \frac{1}{3}m_2 l_2^2. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem dobijemo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{12}m_1 l_1^2 + m_1 l_2^2 + \frac{1}{3}m_2 l_2^2}{g l_2\left(m_1 + \frac{m_2}{2}\right)}}$$

kako su štapovi iste linijske gustoće, $m_1/l_1 = m_2/l_2$, kraćenjem razlomla s m_1 dobivamo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{12}l_1^2 + l_2^2 + \frac{l_2^3}{3l_1}}{gl_2\left(1 + \frac{l_2}{2l_1}\right)}}.$$

Marko Dodig (4), Zagreb

1803. *Četiri otpornika otpora* $1\ \Omega$, $2\ \Omega$, $3\ \Omega$ *i* $4\ \Omega$ *spojena su na naponski izvor tako da je njihov ukupni otpor* $1\ \Omega$, *a struja kroz otpor* $3\ \Omega$ *iznosi 3 A. Kolika struja prolazi kroz otpor* $2\ \Omega$*? Koliki je napon izvora?*

Rješenje. Da bi ukupan otpor bio $1\ \Omega$, otpornici moraju biti spojeni u tri paralelne grane, s otporima $2\ \Omega$, $4\ \Omega$ i $1+3\ \Omega$. Provjerimo ukupan otpor:

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} &= \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{1+3}}\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1.\end{aligned}$$

S obzirom da R_2 ima dvostruko manji otpor od R_{1+3}, struja kroz R_2 je dva puta veća,

$$I_2 = 3 \cdot 2 = 6\ \text{A}.$$

Napon izvora izračunamo iz bilo koje grane kao:

$$U = I_2R_2 = I_3(R_1 + R_3) = I_4R_4 = 12\ \text{V}.$$

Vilim Ivanuš (4),
Prva gimnazija, Varaždin

1804. *Kuglica matematičkog njihala mase 5 g nakon 0.3 sekunde od prolaska ravnotežnim položajem udaljena je 5.6 cm i udaljava se brzinom od 8 cm/s. Kolika je duljina njihala i ukupna energija njihanja kuglice?*

Rješenje. Za dani trenutak $t = 0.3$ s, jednadžbe gibanja kod harmonijskog titranja su

$$x = A\sin\omega t,$$

$$v = A\omega\cos\omega t,$$

uz $x = 5.6$ cm i $v = 8$ cm/s, gdje je A amplituda njihanja. Izbacivanjem A iz jednadžbe i uvrštavanjem $t = 0.3$ s dobijemo:

$$\begin{aligned}8\omega\cos 0.3\omega &= 5.6\sin 0.3\omega,\\ 0.7\omega &= \operatorname{tg} 0.3\omega,\\ \frac{\operatorname{arc\,tg} 0.7\omega}{0.3} &= \omega.\end{aligned}$$

Ovu jednadžbu ne možemo egzaktno riješiti, ali uzmemo li $\omega = 1$ rad/s kao inicijalnu vrijednost, uvrstimo na lijevu stranu i izračunamo ω na desnoj, bit ćemo bliže točnom rješenju. Onda dobiveni rezultat ponovno uvrstimo lijevo i izračunamo desnu vrijednost. Dobit ćemo niz vrijednosti za ω koji konvergira prema rješenju:

1.0000
2.0357
3.1963
3.8350
4.0474
4.1049
4.1196
4.1233
4.1243
4.1245
4.1246
4.1246.

Dobivenu vrijednost $\omega = 4.1246$ rad/s preračunamo u duljinu njihala:

$$l = \frac{g}{\omega^2} = 0.5766\ \text{m}.$$

Energiju njihanja odredimo iz maksimalne brzine kuglice v_m (u položaju ravnoteže):

$$\begin{aligned}v &= v_m\cos\omega t,\\ 8 &= v_m\cos(4.1246 \cdot 0.3)\\ v_m &= 24.44\ \text{cm/s}.\end{aligned}$$

Energija je tada

$$E = \frac{1}{2}mv_m^2 = 0.0001494\ \text{J}.$$

Ur.