ZANIMLJIVOSTI

Županijsko natjecanje iz matematike, 1. ožujka 2023.

Zadatci za A varijantu

I. razred

1. Dokaži da jednadžba

$$(n-20)^3+2n^3=(n+20)^3$$

nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

2. Odredi sva realna rješenja sustava jednadžbi

$$\frac{xy}{4y-3x}=20,$$
$$\frac{xz}{2x-3z}=15,$$
$$\frac{zy}{4y-5z}=12.$$

2. Marijan je na ploču napisao niz od n prostih brojeva tako da je svaki sljedeći broj za 6 veći od prethodnog. Dokaži da postoji najveći prirodan broj n za koji je to moguće. Koji je to najveći n i koje je sve nizove Marijan mogao napisati na ploču za taj najveći n?

4. Trokutu ABC upisana je kružnica koja dira stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$ redom u točkama D, E i F. Pravac koji prolazi točkom C i paralelan je s DE siječe pravac DF u točki M, a pravac koji prolazi točkom C i paralelan je s DF siječe pravac DE u točki N. Dokači da pravac MN sadrči srednjicu trokuta ABC.

5. U krugu sjede 2023 osobe. Među njima je N osoba koje uvijek govore istinu, dok svi ostali uvijek lažu. Svi su dali izjavu: *Obje osobe koje sjede do mene lažu.* Odredi sve vrijednosti broja N za koje je to moguće.

II. razred

1. U ovisnosti o parametru $a\in\mathbb{R}$, odredi sliku funkcije $f(x)=\dfrac{2023}{x^2-a^2-x-a}$.

2. Jednadžba

$$(x^2+ax+b)(x^2+ax+c)=0$$

ima četiri različita realna rješenja i to su a, b, c i -1. Odredi brojeve a, b i c.

3. Odredi sve uređene trojke (m,n,p) gdje su m i n prirodni brojevi, a p prost za koje vrijedi

$$25^n+2\cdot 5^n=p^m+8.$$

4. Unutar paralelograma $ABCD$ odabrana je točka T tako da vrijedi $|TC|=|BC|$. Neka su P i M redom polovišta dužina $\overline{CD}$ i $\overline{AT}$. Dokaži da je pravac BT okomit na pravac PM.

5. Žaba Žana nalaze se u ishodištu brojevnog pravca, te u svakom koraku skaču za jedan ulijevo, za jedan udesno ili ostaje na mjestu. Lina i Dina izabrale su relativno proste brojeve m i n, gdje je $m > n$. Nakon svakih n koraka Lina zapovijeda: *Lijevo!*, a nakon svakih m koraka Dina zapovijeda: *Desno!* Žana miruje dok ne čuje prvu zapovijed, a nakon toga počinje (ili nastavlja) skakati u smjeru prema zapovijedi. Zaustavlja se u prvom koraku u kojem čuje obje zapovijedi. U ovisnosti o brojevima m i n odredi na kojoj se udaljenosti od ishodišta Žana zaustavila.

III. razred

1. Odredi sva realna rješenja jednadžbe

$$1225 \cdot 5^{x^2-3x} = 7^{x+1}.$$

2. Ovisno o realnom parametru p odredi broj rješenja jednadžbe

$$\cos 2x = p\,(\sin x + \cos x)$$

na intervalu $[0, 2\pi]$.

3. Dan je trokut ABC takav da je $\sphericalangle ACB = 60^\circ$, $|AC| = \sqrt{3} - 1$ i $|BC| = 2$. Neka je M polovište stranice $\overline{AB}$. Odredi mjeru kuta $\sphericalangle ACM$.

4. Odredi sve racionalne brojeve x za koje vrijedi

$$x \cdot \lfloor x \rfloor \cdot (x - \lfloor x \rfloor) = 254.$$

Za racionalni broj t, $\lfloor t \rfloor$ najveći je cijeli broj koji nije veći od t. Na primjer, $\lfloor 3.14 \rfloor = 3$, $\lfloor -3.14 \rfloor = -4$.

5. Dana je ploča $n \times n$, obojana poput šahovske, pri čemu je gornje lijevo polje crne boje. Azra u svakom koraku bira šest polja ploče koja tvore 2×3 ili 3×2 pravokutnik i sadrže točno tri bijela polja, te ta tri polja zacrni. Za koje n Azra može postići da sva polja budu crne boje?

IV. razred

1. Odredi sve brojeve $a, b \in \mathbb{N}_0$ i $n \in \mathbb{N}$ za koje vrijedi

$$2^a + 3^b + 1 = n!.$$

2. Za svaki prirodan broj n neka su a_n i b_n realni brojevi takvi da je $(\sqrt{3} + i)^n = a_n + ib_n$. Dokaži da izraz

$$\frac{a_n b_{n+1} - a_{n+1} b_n}{a_{n+1} a_n + b_{n+1} b_n}$$

poprima istu vrijednost za sve $n \in \mathbb{N}$ te odredi tu vrijednost.

3. Neka su a, b i c različiti cijeli brojevi i $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ polinom takav da je $P(a) = a^3$ i $P(b) = b^3$. Odredi $P(1)$.

4. Dvije kružnice sijeku se u točkama A i B, a pritom manja kružnica prolazi središtem veće. Tangente na manju kružnicu u točkama A i B sijeku veću kružnicu ponovno u točkama A_1 i B_1. Dokaži da je pravac A_1B simetrala kuta $\sphericalangle AA_1B_1$.

5. Nikola je zamislio deveteroznamenkasti broj $\overline{a_1a_2a_3\dots a_9}$ u čijem se dekadskom prikazu svaka od znamenaka od 1 do 9 pojavljuje točno jednom. Zatim je izračunao 6 zbrojeva

$$\overline{a_1a_2a_3} + \overline{a_2a_3a_4}, \quad \overline{a_2a_3a_4} + \overline{a_3a_4a_5}, \quad \overline{a_3a_4a_5} + \overline{a_4a_5a_6},$$
$$\overline{a_4a_5a_6} + \overline{a_5a_6a_7}, \quad \overline{a_5a_6a_7} + \overline{a_6a_7a_8}, \quad \overline{a_6a_7a_8} + \overline{a_7a_8a_9}$$

i napisao na papir najveći od njih. Koji je najmanji broj koji je mogao zapisati na papir?

Zadatci za B varijantu

I. razred

1. Skratite razlomak

$$\frac{(x+1)^4-4(x+x^2)^2+4x^2-(1+x)^2}{3x^2+x}$$

ako je $x \neq 0$, $x \neq -\frac{1}{3}$.

2. U nizu od šest prirodnih brojeva treći i svaki sljedeći broj jednak je zbroju dva prethodna. Odredite sve takve nizove brojeva, ako je peti broj u nizu jednak 25.

3. Može li se broj 24 024 zapisati u obliku razlomka $\frac{m!}{n!}$ pri čemu $m!$ označava umnožak prvih m prirodnih brojeva, a $n!$ označava umnožak prvih n prirodnih brojeva? Obrazložite.

4. Odredite sve realne brojeve a za koje jednadžba

$$\frac{a}{1-\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}=2023x$$

nema rješenja.

5. Kružnica polumjera 3 cm upisana je u paralelogram tako da dodiruje tri njegove stranice. Mjera šiljastog kuta paralelograma iznosi 60°, a jedna stranica paralelograma je za $2\sqrt{3}$ cm dulja od druge stranice. Odredite udaljenost središta kružnice od najudaljenijeg vrha paralelograma.

6. Koliko ima uređenih parova prirodnih brojeva (m, n) za koje je broj 3^m+7^n djeljiv s 10 ako je $1 \leq m \leq 80$, $81 \leq n \leq 185$?

7. Zadan je četverokut $ABCD$. Ako je $|AB| = 6$ cm, $|AD| = 4$ cm, $\sphericalangle DAB = \sphericalangle ABC = 60^\circ$ i $\sphericalangle ADC = 90^\circ$, izračunajte duljine dijagonala i površinu toga četverokuta.

II. razred

1. Odredite sve vrijednosti cijeloga broja x za koje vrijedi $(x^2-5x+5)^{(x^2-4x-5)}=1$.

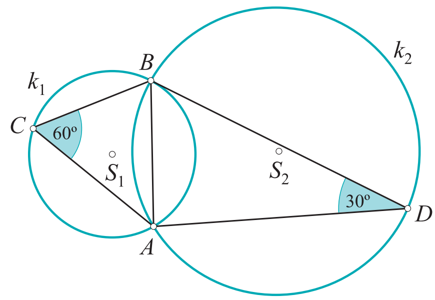
2. Odredite prirodno područje definicije (domenu) funkcije

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+x-12}}{|5+x|-2}-\frac{x^2-81}{\sqrt{10-2x}}.$$

3. Zadan je trokut ABC. Ako je $|AB| = 3\sqrt{3}$ cm, $|AC| - 2|BC| = 3$ cm, a mjera kuta nasuprot stranici $\overline{AC}$ iznosi 150°, odredite sinus kuta nasuprot stranici $\overline{AB}$.

4. Na koliko načina možemo izabrati dva različita broja iz skupa $\{1, 2, \ldots, 2022, 2023\}$ tako da njihov zbroj bude djeljiv s 5?

5. Kružnice k_1 i k_2 sijeku se u točkama A i B kao što je prikazano na slici. Točka C nalazi se na kružnici k_1, a točka D na kružnici k_2 tako da vrijedi $\measuredangle ACB = 60°$ i $\measuredangle BDA = 30°$. Ako su središta kružnica k_1 i k_2 udaljena $4\sqrt{3}$ cm, kolika je duljina njihove zajedničke tetive $\overline{AB}$?



6. Odredite sve uređene parove realnih brojeva $(x,\ y)$ koji su rješenje sustava jednadžbi.

$$\begin{cases} \sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{7-y}=-1 \\ \sqrt{x+y}=4 \end{cases}$$

7. Zadan je jednakokračan trokut ABC s osnovicom $\overline{AB}$ duljine 14 cm i krakovima duljine 25 cm. Točka P polovište je osnovice $\overline{AB}$. Na stranici $\overline{BC}$ odabrana je točka Q, a na stranici $\overline{AC}$ točka R tako da je $AB \parallel QR$ i da je površina trokuta PQR najveća moguća. Odredite opseg i površinu trokuta PQR.

III. razred

1. Odredite sva rješenja jednadžbe $|\cos^2 x - 2\sin x| = 2$.

2. Ana, Bruno, Cvita, Dino i Ema pokušavaju se rasporediti u kinu na pet stolica u jednomu redu. Na koliko načina to mogu učiniti ako Ana ne želi sjediti ni pored Brune ni pored Cvite, a Dino ne želi sjediti pored Eme?

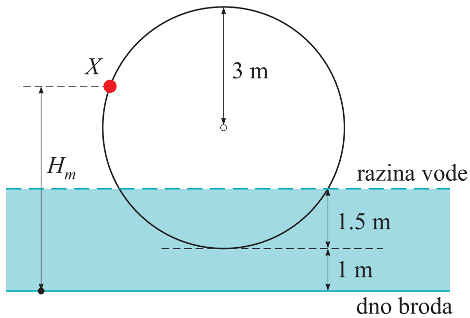
3. Neka su α i β mjere dvaju kutova u trokutu čiji polumjer opisane kružnice iznosi 6 cm. Odredite sinus trećeg kuta toga trokuta i duljinu njemu nasuprotne stranice, ako vrijede sljedeće jednakosti:

$$3\sin\alpha + 4\cos\beta = 6, \qquad 4\sin\beta + 3\cos\alpha = 2.$$

4. Broj Klarinih godina jednak je $\log_{\sqrt[3]{5}} a^2$, broj Marijinih godina jednak je $\log_{5\sqrt{5}}(125b^9)$, a broj Janovih godina jednak je $\dfrac{1}{\log_{c^2}\sqrt[3]{5}}$. Koliko iznosi zbroj njihovih godina ako je $abc = 625$?

5. Četiri grada na karti određuju vrhove četverokuta $ABCD$ kojemu se može opisati kružnica polumjera R. Udaljenost između gradova A i C je $2R$, a udaljenost između gradova A i B jednaka je udaljenosti između gradova B i C. Omjer udaljenosti između gradova A i D i gradova C i D jednak je $\sqrt{3}$. Kolika je udaljenost između gradova B i D?

6. Mrlja, na slici označena s X, nalazi se u nekom trenutku na vanjskom rubu kotača modela parobroda s lopaticama. Kotač ima polumjer 3 m, a rotira u smjeru suprotnom od kazaljke sata konstantnom brzinom i napravi 8 punih okreta u minuti. Ako se u trenutku $t = 0$ mrlja X nalazi na najvišoj točki kotača, odredite funkciju koja modelira gibanje kotača, odnosno određuje udaljenost mrlje (H) od dna broda u metrima nakon t sekundi. Najniža točka kotača je 1 metar iznad dna broda, a 1.5 metar ispod razine vode. U kojemu će trenutku t mrlja prvi puta ući u vodu i koliko će dugo biti pod vodom?



7. Zadana je trostrana piramida $SABC$ kojoj je strana SBC okomita na bazu ABC, pri čemu je $\sphericalangle ASB = \sphericalangle BSC = \sphericalangle CSA = 60°$ i $|SB| = |SC| = 1$. Odredite obujam piramide $SABC$.

IV. razred

1. Zadana je funkcija

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2}\left(a^x + a^{-x}\right),$$

pri čemu je a pozitivan realan broj različit od 1. Koliko je $f(p+t) + f(p-t)$ ako je $f(t) = 20$ i $f(p) = 25$?

2. Niz (x_n) je zadan rekurzivnom formulom:

$$x_1 = 1, \quad x_{n+1} = x_n + 2n + 1, \quad n \geq 1.$$

Odredite x_{2023}.

3. Zbroj svih 1002-znamenkastih brojeva koji u svojem zapisu imaju tisuću nula i dvije jedinice iznosi S. Odredite ostatak koji se dobije pri dijeljenju broja S brojem 3.

4. Odredite sve kompleksne brojeve z za koje vrijedi:

$$|z + iz| = 2, \quad Re(z^4) = -2 \quad \text{i} \quad \frac{3\pi}{2} < \arg(z) < 2\pi.$$

5. Izračunajte zbroj

$$\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \frac{7}{3^2 \cdot 4^2} + \cdots + \frac{199}{99^2 \cdot 100^2}.$$

6. Zadane su točke $M(2, -5)$ i $N(-6, 7)$. Koje točke na pravcu $x - y + 5 = 0$ s točkama M i N određuju pravokutan trokut?

7. Zadan je paralelogram $ABCD$. Točke E i F su redom nožišta visina povučenih iz vrha D na stranicu $\overline{AB}$, odnosno $\overline{BC}$. Ako je $\cos \sphericalangle EDF = \frac{1}{3}$, $|DE| = 20$, $|DF| = 32$, koliko iznosi površina četverokuta $DEBF$?

Matko Ljulj