LINEARNE DIOFANTSKE JEDNADŽBE – ŠTO AKO ODSJEČAK NIJE CJELOBROJAN

Filip Nikolić, XV. gimnazija, Zagreb

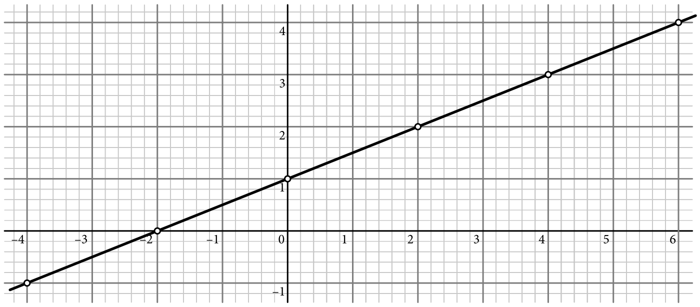
Podsjetimo se, što su diofantske jednadžbe?

Diofantske jednadžbe su jednadžbe kojima su sva rješenja cjelobrojna. Svako je rješenje diofantske jednadžbe s dvije nepoznanice oblika (x, y), $x, y \in \mathbb{Z}$.

Ponovimo!

Zadatak: Odredimo sva rješenja diofantske jednadžbe $y = \frac{1}{2}x + 1$ grafički i računski.

Grafičko rješenje – nacrtajmo pravac i označimo cjelobrojne točke. Rješenje su označene točke.



Rješenje možemo dobiti i računom.

Homogeno rješenje:

$$x_h = 2n$$
$$y_h = n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Pravac ne prolazi kroz ishodište, već je pomaknut za 1 prema gore ($b = 1$). Potrebno je svaku točku pomaknuti za 1 u y smjeru:

$$x = x_h = 2n$$
$$y = y_h + 1 = n + 1,\ \ n \in \mathbb{Z}$$

Rješenja su svi uređeni parovi oblika $(2n, n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$.

No, što ako odsječak pravca čija je jednadžba $y = ax + b$ na y-osi nije cjelobrojan ($b \notin \mathbb{Z}$)?

U slučaju da je odsječak na y-osi cjelobrojan, jedno rješenje diofantske jednadžbe bit će $(0, b)$, no sad nam to više neće služiti jer b više neće biti cjelobrojan.

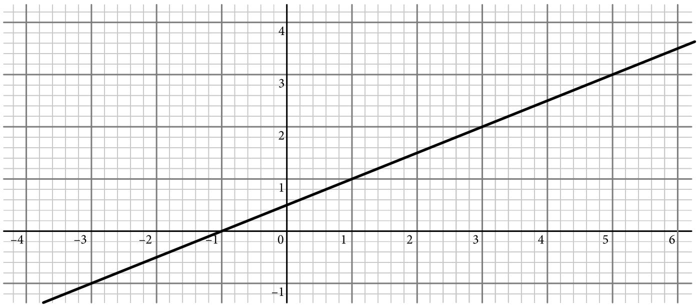
Podsjetimo se što nam govori koeficijent smjera/nagib pravca.

Koeficijent smjera $a = \frac{e}{f}$ $(e, f \in \mathbb{Z})$ kazuje da ako se pomaknemo od bilo koje točke pravca za f u x smjeru i za e u y smjeru, dolazimo do neke druge točke koja pripada istom pravcu.

Budući da e i f moraju biti cjelobrojni, ako se trenutačno nalazimo na cjelobrojnoj točki pravca i pomaknemo se za onoliko koliko nam koeficijent smjera kazuje, doći ćemo do sljedeće, također cjelobrojne, točke. Pretpostavimo da je nagib u obliku razlomka potpuno skraćen jer bismo inače dobili ne sljedeću, već onu iza točku. Razmisli zašto.

Ova tvrdnja bit će nam ključna u rješavanju diofantskih jednadžba kojima se bavimo u ovom članku.

Primjer 1. Promotrimo pravac čija je jednadžba $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$.



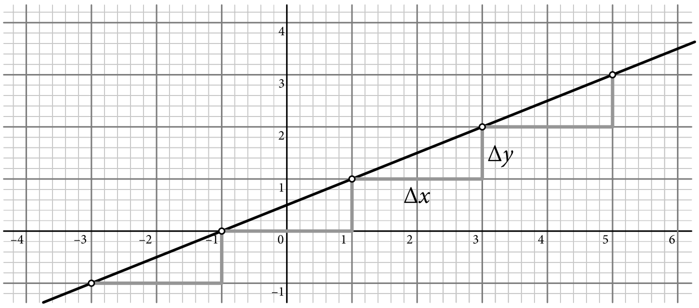
Pronađimo koje su točke rješenja diofantske jednadžbe, a zatim pokušajmo odrediti opće rješenje.

Pronađimo jednu cjelobrojnu točku, na primjer (1, 1), a zatim sljedeću, u ovom primjeru (3, 2). Primjećujemo li nešto? Pročitajmo tvrdnju o nagibu pravca. Ima li smisla?

Druga točka pomaknuta je od prve za onoliko koliko nam govori nagib.

Neka je $A(1, 1)$ i $a=\frac{1}{2}$. Tada je $\Delta x = 2$, $\Delta y = 1$, gdje simbol Δ (delta) prikazuje promjenu. Pri tome Δx prikazuje promjenu vrijednosti x, a Δy promjenu vrijednosti y. Možemo pisati

$$B = (3, 2), \text{ tj. } B = (1, 1)+ (\Delta x , \Delta y)\ B = A +(\Delta x , \Delta y)$$



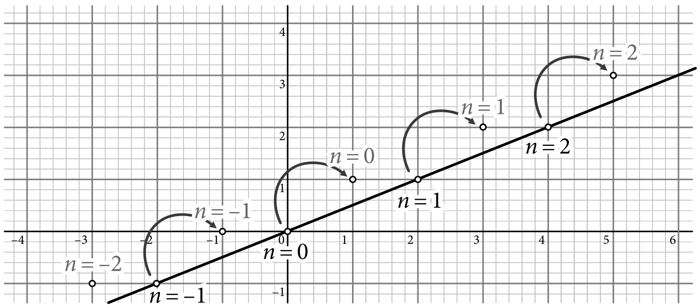
Započet ćemo rješavati ovaj zadatak kao i u prošlom članku: prvo ćemo riješiti homogenu jednadžbu.

Podsjetimo se: nagib pravca ovisi samo o koeficijentu smjera/nagiba, ne ovisi o odsječku.

Prvo trebamo dobiti homogenu jednadžbu tako da iz originalne maknemo odsječak. Tako ćemo dobiti jednadžbu $y = \frac{1}{2}x$. Njeno rješenje je:

$$x_h = 2n,$$
$$y_h = n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Za $n = 0$ dobivamo rješenje (0, 0), za $n = 1$ dobivamo (2, 1) itd. Zaključili smo da za $n = 0$ kao rješenje trebamo dobiti (1, 1), za $n = 1$ trebamo dobiti (3, 2) itd. Promotrimo sliku:



Na skici lako možemo vidjeti da je svaka tražena točka pomaknuta za 1 u x smjeru i za 1 u y smjeru.

Da dobijemo krajnje rješenje, svakoj točki koja je rješenje homogene jednadžbe dodat ćemo (1, 1):

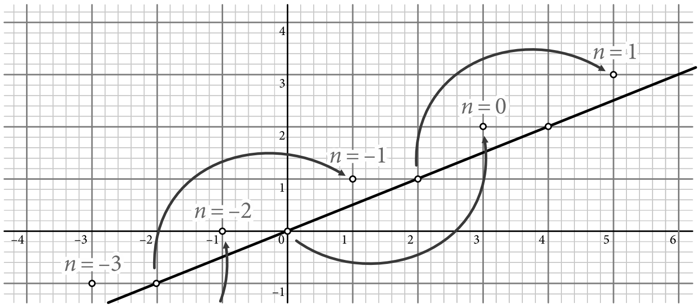
$$x = x_h + 1$$
$$y = y_h + 1$$
$$x = 2n + 1$$
$$y = n + 1,\ n \in \mathbb{Z}$$

Evo rješenja!

Možemo li generalizirati način na koji dođemo do rješenja bez da crtamo i originalnu i homogenu jednadžbu?

Ako malo razmislimo, jedno od rješenja homogene jednadžbe uvijek će biti (0, 0). Razmislite zašto! Trebamo tu točku (0, 0) pretvoriti u neku točku A za koju znamo da je rješenje zadane jednadžbe, pa će biti $(0, 0) + A = A$, isto kao što je $0 + k = k$.

Razmislite: znači li to da homogenom rješenju trebamo dodati neku točku za koju znamo da je rješenje originalne jednadžbe? Odgovor je potvrdan jer pomičemo pravac, a pomicanje pravca ne mijenja njegov nagib, a sljedeća točka definirana je nagibom. U redu, ali koju točno točku moramo dodati homogenom rješenju da dobijemo točno rješenje? Odgovor je: bilo koju točku!



Na ovoj skici prikazano je dodavanje točke (3, 2) homogenom rješenju.

Fokusirajmo se na točku $n = 0$ homogenog rješenja. Njoj dodamo (3, 2) i sada, ako stavimo $n = 0$ u konačno rješenje, dobijemo (3, 2), a točka koja je prije bila $n = 0$ sada je $n = -1$. Redni broj svake točke pomaknuo se.

Dakle, diofantske jednadžbe imaju više mogućih zapisa rješenja, tj. imaju ih beskonačno mnogo. Evo nekih od mogućih zapisa rješenja ove jednadžbe

$$x = 2n + 1$$
$$y = n + 1$$

$$x = 2n + 3$$
$$y = n + 2$$

$$x = 2n + 5$$
$$y = n + 3$$

$$x = 2n - 1$$
$$y = n + 0$$

$$x = 2n - 3$$
$$y = n - 1$$

...

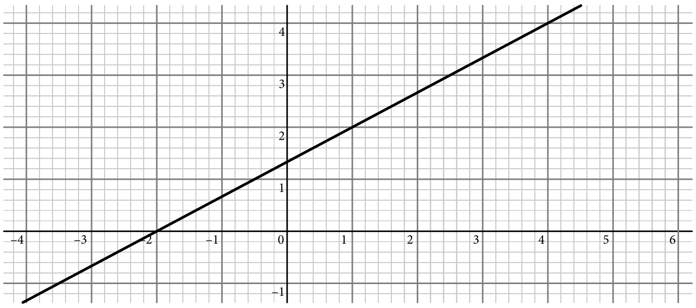
gdje je $n \in \mathbb{Z}$.

Provjerite možete li dobiti istu točku, npr. (5, 3), koristeći svako navedeno rješenje.

Znači, homogenom rješenju dodali smo **neku točku** za koju znamo da zadovoljava originalnu jednadžbu. Takva točka zove se partikularno rješenje.

Dakle: *konačno rješenje = homogeno rješenje + partikularno rješenje*.

Zadatak 2. Odredite računski i grafički sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$.



Homogeno rješenje:

$$x = 3n$$
$$y = 2n,\ n \in \mathbb{Z}$$

Partikularna rješenja:

$$(-2, 0), (1, 2), (4, 4)...$$

Jedno od mogućih zapisa konačnog rješenja:

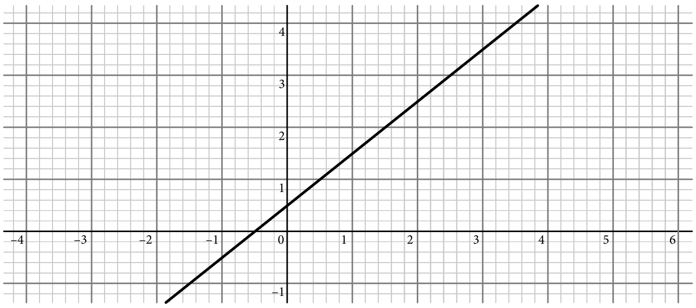
$$x = 3n + 1$$
$$y = 2n + 2,\ \ n \in \mathbb{Z}$$

Primjer 2. Odredimo sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $y=x+\frac{1}{2}$.

Ovaj put nećemo započeti s grafičkim prikazom. Razmislimo logički. Po definiciji diofantskih jednadžba, x i y moraju biti cijeli brojevi. Mogu li oni biti takvi u ovom primjeru?

Ako uzmemo da je x cijeli, y ne može biti cijeli jer cijelom broju x dodajemo broj koji nije cijeli. Rezultat nije cijeli broj.

Evo i grafičkog prikaza:



Uočite da svaki put kad pravac „prelazi" preko neke cjelobrojne vrijednosti x, cjelobrojnu vrijednost na y-osi „promašimo" za točno 0.5 .

Ista se stvar događa ako je nagib pravca cijeli broj, a odsječak nije cijeli broj – primjerice ako je odsječak $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{2}$ ... ili bilo koji drugi racionalan broj koji nije cijeli.

Primjer 3. Kako možemo unaprijed znati postoji li rješenje? Zadanu jednadžbu $y = ax + b$ možemo zapisati i u drugom obliku: $ex + fy = g$.

Budući da su a i b već „iskorištene" u prvoj jednadžbi, umjesto njih korištene su oznake e, f i g, ali nadalje ćemo koristiti zapis $ax + by = c$. Bitno je da su a, b i c cijeli brojevi. To možemo lako postići tako da sve pomnožimo najmanjim zajedničkim višekratnikom nazivnika razlomaka.

Jednadžbu $y = x + \frac{1}{2}$ iz prošlog primjera možemo pisati u obliku $y - x = \frac{1}{2}$, odnosno $2y - 2x = 1$.

Možemo vidjeti da lijevo oduzimamo dva parna broja (parni su brojevi oblika $2k$, $k \in \mathbb{Z}$), a rezultat toga oduzimanja treba biti 1, neparan broj. Oduzimanjem dvaju parnih brojeva uvijek se dobije paran broj. Zato ova jednadžba nema cjelobrojno rješenje.

Pogledajmo još neke primjere.

a) Jednadžbu $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ možemo napisati u obliku $2x + 4y = 1$

Ovdje bi zbroj dvaju parnih brojeva trebao biti 1, tj. neparan broj. Zbrajanjem dvaju parnih brojeva ne može se dobiti neparan broj. Zato ni jednadžba $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ nema cjelobrojnih rješenja.

b) Jednadžbu $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ možemo napisati u obliku $2y - x = 1$.

Budući da je $2y$ paran broj, a x je paran ili neparan broj, razlikujemo dva slučaja:

- Ako su $2y$ i x parni, jednadžba nema rješenja.
- Ako je $2y$ paran, a x neparan broj, razlika parnog i neparnog broja uvijek je neparan broj. Rezultat može biti 1, što znači da ova jednadžba može imati cjelobrojih rješenja.

c) Pogledajmo jednadžbu $6y - 3x = 4$. Lijevoj strani možemo izlučiti 3, tj. možemo je pisati u obliku $3(2y - x) = 4$. Razlika $2y - x$ je cijeli broj po definiciji diofantske jednadžbe, pa izraz možemo zamijeniti s k, $k \in \mathbb{Z}$, tj. Jednadžbu možemo napisati u obliku: $3k = 4$, $k \in \mathbb{Z}$. Lijeva strana djeljiva je brojem 3, a desna strana (4) nije! Jednadžba, dakle, nema cjelobrojnih rješenja.

Zaključujemo: diofantska jednadžba oblika $ax + by = c$ ima rješenja samo ako je desna strana (c) višekratnik najvećeg zajedničkog djelitelja koeficijenata lijeve strane (a, b).

Ranije spominjanje parnosti proizlazi iz prijašnje tvrdnje, ali nam može u nekim slučajevima ubrzati proces eliminacije jednadžbi koje nemaju rješenja.

Zadatci za vježbu:

Riješite sljedeće zadatke prvo računski, a zatim grafički.

1. $y = \frac{5}{2}x + \frac{1}{2}$
2. $y = -\frac{3}{4}x + \frac{4}{7}$
3. $y = -\frac{13}{5}x + \frac{12}{5}$
4. $y = \frac{5}{3}x + \frac{4}{6}$
5. $7x + 5y = 4$
6. $6x - 3y = 7$

Rješenja zadataka

1. $(2n + 1, 5n + 3)$
2. nema rješenja
3. $(5n - 1, -13n + 5)$
4. $(3n + 2, 5n + 4)$
5. $(5n + 2, -7n - 2)$
6. nema rješenja