Matka 31 (2022./2023.) br. 121

GEOMETRIJSKI DOKAZ JEDNAKOSTI IZMEĐU SREDINA

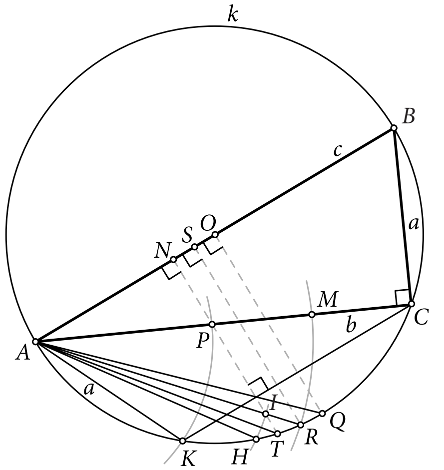
Jens Carstensen i Alija Mumunagić, Danska

Postoji mnogo dokaza tvrdnje da za pozitivne realne brojeve a i b vrijedi

$$H \le G \le A \le K,$$

pri čemu je $H = \dfrac{2ab}{a+b}$ harmonijska, $G = \sqrt{ab}$ geometrijska, $A = \dfrac{a+b}{2}$ aritmetička i $K = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ kvadratna sredina brojeva a i b. U ovom će članku biti proveden jedan geometrijski dokaz ove tvrdnje.

Neka je trokut $\triangle ABC$ pravokutan, s pravim kutom u vrhu C, $|BC| = a$, $|AC| = b$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $a < b$. Promotrimo sliku:



Točka O je središte kružnice k opisane trokutu $\triangle ABC$, dakle točka O je polovište hipotenuze $\overline{AB}$. Na duljoj kateti $\overline{AC}$ označimo točku P tako da je $|AP| = a$, a na kružnici k točku K tako da je $|AK| = a$, pri čemu se točke K i B nalaze s različitih strana katete $\overline{AC}$. Simetrala kuta $\angle CAK$ siječe kružnicu k u točki Q. Neka je točka M polovište dužine $\overline{PC}$ i neka je R točka kružnice k takva da je $|AM| = |AR|$. Dužinom spojimo točke K i C. Okomica točkom P na dužinu $\overline{KC}$ siječe dužinu $\overline{AR}$ u točki D i kružnicu k u točki T. Točka H na kružnici k je ona za koju vrijedi da je $|AH| = |AL|$.

Sa slike je vidljivo da je $|AH| < |AT| < |AR| < |AQ|$.

Dokazat ćemo da, na temelju konstrukcije točaka na slici, vrijedi da je $|AQ|$ kvadratna, $|AR|$ aritmetička, $|AT|$ geometrijska i $|AH|$ harmonijska sredina brojeva a i b.

Dokaz: Polumjer kružnice k opisane trokutu $\triangle ABC$ jednak je

$$|OA| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} \tag{1}$$

Zbog $|AK| = |BC|$ četverokut $ABCK$ je jednakokračni trapez, pa je $AB \parallel KC$. Budući da je AQ simetrala kuta $\angle CAK$, to znači da je točka Q polovište luka $\overset{\frown}{KC}$ te je $OQ \perp KC$. To znači da su polumjeri $\overline{OQ}$ i $\overline{OA}$ međusobno okomiti pa je

$$|AQ| = \sqrt{2} \cdot |OA| = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}} = K \tag{2}$$

Dalje je

$$|AR| = |AM| = |AP| + |PM| = |AP| + \frac{|PC|}{2} = a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} = A \tag{3}$$

Pravac PT siječe hipotenuzu $\overline{AB}$ u točki N. Iz sličnosti trokuta $\triangle APN$ i $\triangle ABC$ slijedi

$$|AN| : |AP| = |AC| : |AB|, \text{ tj. } |AN| \cdot |AB| = |AP| \cdot |AC|, \tag{4}$$

a primjenom Euklidovog poučka na trokut $\triangle ABT$ dobivamo da je

$$|AT|^2 = |AN| \cdot |AB| = |AP| \cdot |AC| \Leftrightarrow |AT| = \sqrt{a \cdot b} = G \tag{5}$$

Neka je S projekcija točke R na hipotenuzu $\overline{AB}$. U pravokutnom trokutu $\triangle ABR$ dužina $\overline{RS}$ je visina, pa je

$$|AR|^2 = |AS| \cdot |AB| \tag{6}$$

Iz sličnosti trokuta $\triangle ANL$ i $\triangle ASR$ slijedi $|AL| : |AR| = |AN| : |AS|$,

tj.

$$|AH| = |AL| = |AR| \cdot \frac{|AN|}{|AS|} = |AR| \cdot \frac{|AN|}{|AS|} \cdot \frac{|AB|}{|AB|} = |AR| \cdot \frac{|AT|^2}{|AR|^2} = \frac{a \cdot b}{\frac{a+b}{2}} = \frac{2ab}{a+b} = H \tag{7}$$

Time smo dokazali da je $|AH| = H$, $|AT| = G$, $|AR| = A$ i $|AQ| = K$, tj. da je $H < G < A < K$.

Kada vrijedi znak jednakosti?