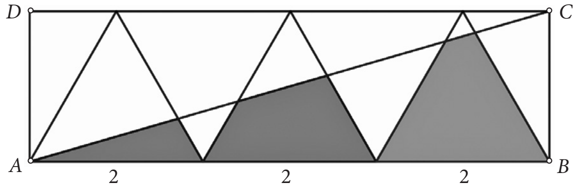
Matka 31 (2022./2023.) br. 121

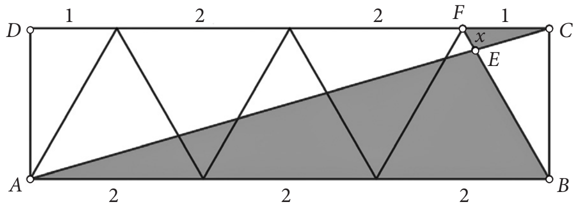
# TROKUT, ČETVEROKUT I KRUG

Zlatko Lobor, Zagreb

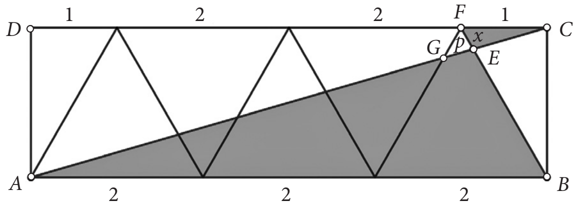
**Primjer 1.** Unutar pravokutnika $ABCD$ upisana su tri sukladna jednakostranična trokuta sa stranicom duljine 2. Trokuti su presječeni dijagonalom $\overline{AC}$. Pokažimo da je zbroj osjenčanih površina na prva dva trokuta veći od površine osjenčane na trećem trokutu.



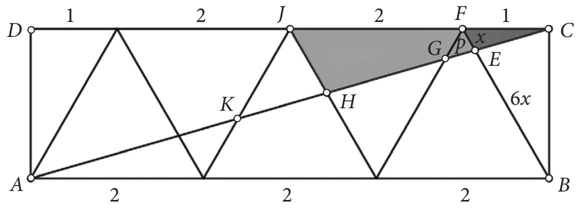

***Rješenje:*** Istaknimo na slici točke $E$ i $F$ te duljinu dužine $\overline{EF}$ označimo $x$.



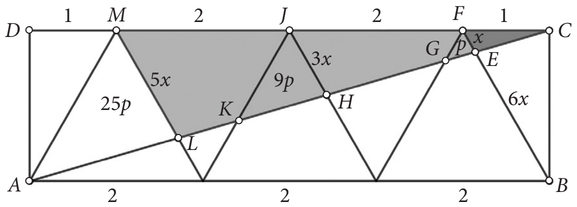

Uočimo da su trokuti $ABE$ i $CFE$ slični po K-K poučku jer su im odgovarajući kutovi sukladni. Iz $|AB| = 6|CF|$ slijedi da je $|BE| = 6|EF| = 6x$, a stranice svih jednakostraničnih trokuta imaju duljinu $7x$. Dakle, vrijedi $x = \dfrac{2}{7}$. Usput označimo s $p$ površinu trokuta $EFG$.



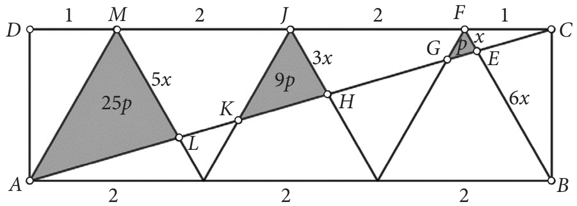

Istaknimo na slici točke $H$, $J$ i $K$. Trokuti $CJH$ i $CFE$ slični su po K-K poučku. Iz $|CJ| = 3|CF|$ slijedi $|HJ| = 3|EF| = 3x$.



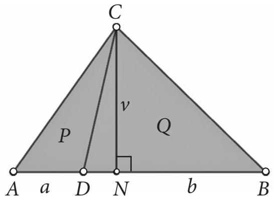

Na sličan način, ako istaknemo točke $L$ i $M$, trokuti $CML$ i $CFE$ također su slični po K-K poučku. Iz $|CM| = 5|CF|$ slijedi $|LM| = 5|EF| = 5x$.




Trokuti *EFG*, *HJK* i *ALM* međusobno su slični po K-K poučku jer svi imaju jedan kut veličine 60°, a ostali odgovarajući kutovi imaju paralelne krakove. Njihove se površine odnose s kvadratom omjera odgovarajućih stranica, što znači da je površina trokuta *HJK* jednaka 9*p*, a trokuta *ALM* 25*p*.



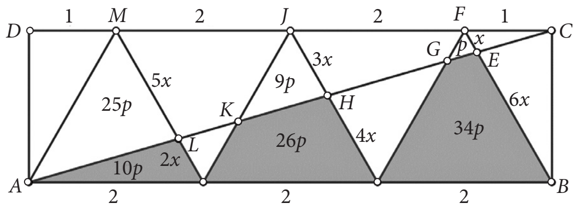

U nastavku će nam trebati jedna pomoćna tvrdnja.




Omjer površina *P* i *Q* trokuta *ADC* i *DBC* jednak je omjeru duljina njihovih stranica *a* i *b*.

Dokaz tvrdnje: Trokuti imaju jednaku visinu na stranice *a* odnosno *b*, iz čega se dobiva $\dfrac{P}{Q}=\dfrac{\frac{av}{2}}{\frac{bv}{2}}=\dfrac{a}{b}$.

Primijenimo li ovu tvrdnju na lijevi jednakostranični trokut, dobiva se površina njegova dijela ispod dijagonale pravokutnika.

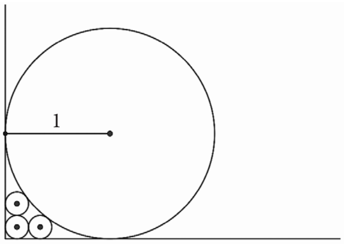



Ta površina iznosi 10*p* jer omjer površina iznad i ispod dijagonale mora biti $\dfrac{5}{2}$.

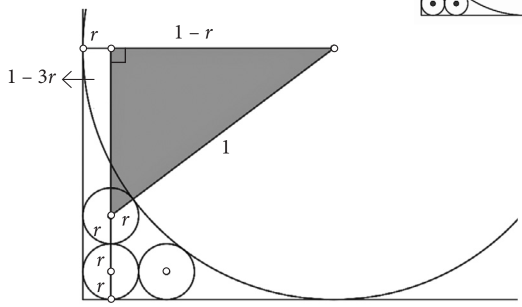
Sada se mogu dobiti i površine dijelova ostalih dvaju trokuta ispod dijagonale jer su površine svih jednakostraničnih trokuta 35*p*. Površina srednjeg dijela iznosi 26*p*, a desnoga 34*p*.

Zbroj površina prvih dvaju dijelova je 36*p,* što je više od 34*p,* čime je dokazana tvrdnja zadatka.

**Primjer 2.** U pravi kut upisane su tri kružnice radijusa *r* koje diraju krakove i veliku kružnicu radijusa 1, kako je prikazano na slici. Koliki je radijus *r* malih kružnica?




***Rješenje:*** Istaknimo na slici sljedeći pravokutni trokut.




Njegove katete imaju duljine $1-r$ i $1-3r$, a hipotenuza ima duljinu $1+r$.

Prema Pitagorinu poučku vrijedi:

$$(1-r)^2+(1-3r)^2=(1+r)^2$$

$$1-2r+r^2+1-6r+9r^2=1+2r+r^2$$

Nakon sređivanja dobiva se jednadžba $9r^2-10r+1=0$ u kojoj ćemo lijevu stranu napisati u obliku umnoška koristeći svojstvo distributivnosti množenja prema oduzimanju.

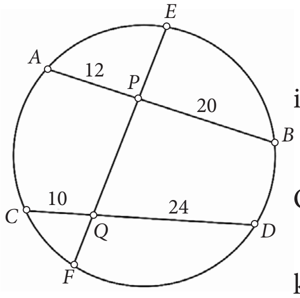
$$9r^2-9r-r+1=0$$

$$9r(r-1)-(r-1)=0$$

$$(r-1)(9r-1)=0$$

Ovaj umnožak može biti jednak 0 samo ako je $r=1$ ili $r=\frac{1}{9}$.

Za $r=1$ prema zadanim uvjetima zadatak ne bi imao smisla pa zadatak ima samo jedno rješenje, $r=\frac{1}{9}$.

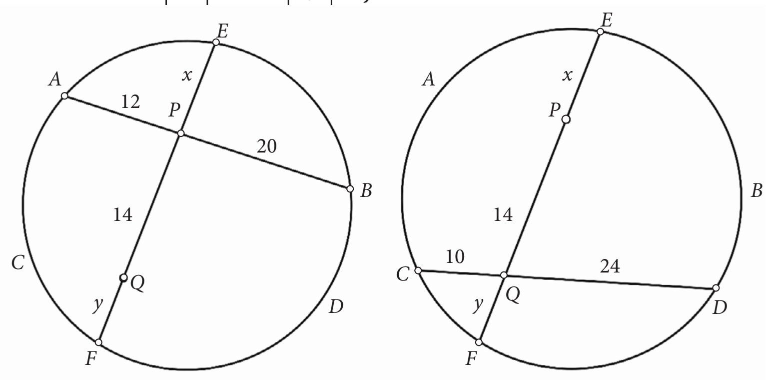



**Primjer 3.** U kružnici su zadane tri tetive, kako je prikazano na slici lijevo. Odredimo duljinu tetive $\overline{EF}$ ako je $|PQ| = 14$.

***Rješenje:*** U rješavanju zadatka poslužit ćemo se pomoćnom tvrdnjom koja je već ranije dokazana (Vidi Matka br. 117, str. 50)

Budući da su nam poznate duljine dviju tetiva, problem ćemo promatrati u dva dijela.

Pritom označimo $|EP| = x$ i $|QF| = y$ .




Prema spomenutoj tvrdnji vrijedi:

$$x(y+14) = 12 \cdot 20 \qquad y(x+14) = 10 \cdot 24$$
$$xy + 14x = 240 \qquad xy + 14y = 240$$

Iz ove dvije jednakosti slijedi da je nužno $x = y$.

Uvrstimo li to u jednu od jednakosti, dobiva se jednadžba

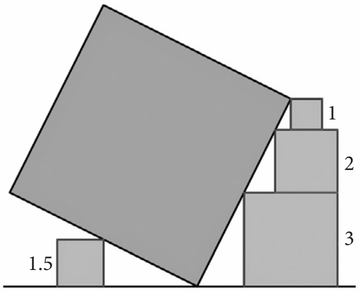
$$x^2 + 14x - 240 = 0 .$$

I ovdje ćemo lijevu stranu zapisati u obliku umnoška.

$$x^2 - 10x + 24x + 240 = 0$$
$$x(x-10) + 24(x-10) = 0$$
$$(x-10)(x+24) = 0$$

Budući da $x$ mora biti pozitivan broj, lijeva strana jednakosti jednaka je nuli samo ako je $x = 10$. To znači da je i $y = 10$. Dakle $|EF| = x + 14 + y = 34$ .

**Zadatak 1.** Izračunajte površinu najvećega kvadrata na slici ako su zadane duljine stranica manjih kvadrata.




## Izvori:

1. https://www.youtube.com/c/MindYourDecisions
2. https://www.youtube.com/c/AcademiaInternet