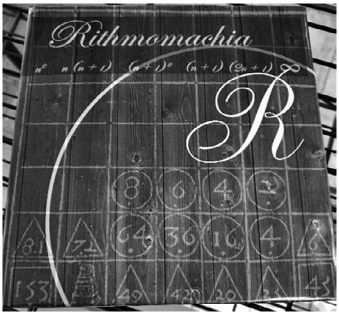
BITKA BROJEVA

Matematičko putovanje kroz drevnu igru zvanu ritmomahija

Siniša Režek, Zagreb



Iako se prva znanstvena promišljanja o igrama pojavljuju krajem 19. i početkom 20. stoljeća, poznato je da je igra praktički jednako stara kao i čovječanstvo. Igru je teško doslovno opisati jednom rečenicom i obuhvatiti svu njezinu širinu.

S druge strane, smatra se kako je matematika najstarija kompleksna znanost koja proučava aksiomatski definirane strukture koristeći matematičku logiku. Međutim, mnogi bi matematičari matematiku opisali potpuno drugačije. Univerzalna definicija matematike ne postoji, nego se mijenjala s vremenom. Matematika je svakako instrument u istraživanju svijeta, određeni model razmišljanja, ona je često izazov i u službi umjetnosti, no matematika je i – igra. U povijesti matematike često se događalo da su zanimljiva pitanja razmatrana u nekoj igri prerasla u prave matematičke probleme koji su doveli do novih modela razmišljanja. Veza između igre i matematike je i obrnuta; puno je matematičkih modela koji su primijenjeni u raznim igrama, bilo za njihovo kreiranje ili rješavanje, npr. Teorem četiri boje, Raveyjev teorem, Hellyjev teorem...

Krenimo na matematičko putovanje kroz davnu srednjovjekovnu obrazovnu igru i ispravimo matematičku pogrešku u priručniku za igru iz 16. stoljeća.

Ugodna korist i korisna ugoda

Igra zvana *rithmomachia* ili ritmomahija doslovce na grčkome znači *borba brojeva*. Poznata je još kao Filozofova igra. Igra se figurama u obliku geometrijskih likova označenih različitim brojevima, na ploči poput dvostruke šahovske ploče.

Učenjak iz 12. st. Fortolfus opisao je iskustvo igranja ritmomahije kao vrhunac obrazovane dokolice: „Doista, u ovoj umjetnosti, kojoj ćete se diviti na dva načina, ugodna je korist i korisna ugoda. Ne samo da ne uzrokuje dosadu, već je i otklanja; korisno zaokuplja beskorisno besposlenog."

Pravila igre su razrađena. Njihova važnost i privlačnost za srednjovjekovne intelektualce leži u njihovoj povezanosti s *quadriviumom*. Aritmetika, geometrija, astronomija i glazba bile su četiri napredne umjetnosti u srednjovjekovnom kurikulumu slobodnih umjetnosti. Sve četiri zahtijevaju razumijevanje omjera i nizova. Igranje ritmomahije omogućilo je srednjovjekovnim ljudima da vježbaju svoje matematičke vještine i pokažu svoju obrazovanje.

Neki zagovornici ritmomahije čak su tvrdili da ta igra osobu čini boljom. Često su citirali pokojnog rimskog filozofa Boetija koji je tvrdio da „svaka nejednakost proizlazi iz jednakosti” i koji je o matematičkoj igri rekao: „Sada nam preostaje obraditi određenu vrlo duboku disciplinu koja se s uzvišenom logikom odnosi na svaku silu prirode i na samu cjelovitost stvari. Postoji velika plodnost u ovom znanju ako ga se ne zanemari, jer je definirana sama dobrota koja tako dolazi do spoznatljivog oblika, oponašanog umom.”

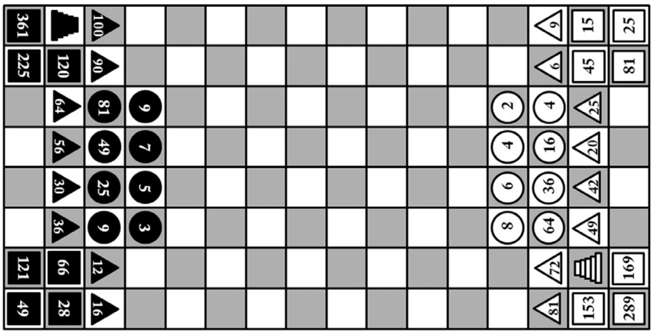
Boetije opisuje poseban postupak za stvaranje različitih vrsta nizova i omjera, počevši s istim brojem: „Neka nam budu upisana tri jednaka pojma, to jest tri jedinice, ili tri dvojke, ili koliko god hoćete. Što god se dogodi u jednoj, dogodi se i u drugoj. Ovo su tri pravila: da prvi broj bude jednak prvom, zatim zapišete broj jednak prvom i drugom, na kraju jedan jednak prvom, dva puta drugom i trećem.”

Na primjer, ako počnemo s 1, 1, 1, dobivamo 1, 2, 4.

Ovo je početak geometrijskog niza gdje se brojevi udvostručuju na svakom koraku. Boetijevim jezikom, to je dupleks. Primjenom istog pravila na novi niz brojeva stvorit će se niz s kompliciranijim odnosima.

Osnovna pozicija – ritmomahija figure

Svaka ritmomahijska figura ima svoj broj (ili, u nekim slučajevima, hrpu brojeva):



Prema dostupnim izvorima, zato što je ploča mnogo duža nego šira, i zato što su srednjovjekovni igrači obično koristili ploču s relativno velikim poljima, sličnima onim na šahovnici, sa stranicom polja barem oko 5 cm, umjesto da sjede iza vlastitih figura, kao što je uobičajeno kod šaha, igrači su obično sjedili sa strane kako bi mogli bolje dosegnuti cijelu ploču.

Izbor brojeva nije proizvoljan; stvaraju ih pravila slična Boetijevim pravilima za stvaranje nejednakosti iz jednakosti. Tradicionalno, bijele figure smatraju se „parnim” brojevima, a crne „neparnim” brojevima, iako se, kao što ćemo vidjeti, ova podjela na parne i neparne odnosi samo na krugove.

Krugovi

Svaka strana ima osam krugova, danih prva četiri parna ili neparna broja i njihovim savršenim kvadratima. Neparni brojevi preskaču 1, što je mističnije „jedinstvo" u Boetijevoj shemi.

Parni / bijeli

2	4	6	8
4	16	36	64

Neparni / crni

3	5	7	9
9	25	49	81

Trokuti

Svaka strana ima i osam trokuta. Trokuti u ritmomahija nizu pojavljuju se u parovima koji pokazuju superpartikularne proporcije. To su omjeri oblika $(n + 1) : n$, kao što je 3 : 2 ili 4 : 3. Praktično govoreći, figure trokuta i kruga možete postaviti na ploču. Brojevi za prvi red trokuta dobivaju se zbrajanjem dvaju brojeva kruga iznad tog broja, u istom stupcu. Brojeve za drugi red trokuta možete pronaći pomoću omjera. U svakom su stupcu omjer broja u prvom retku trokuta prema broju u zadnjem retku kružića, te omjer broja u drugom retku trokuta prema broju u prvom retku trokuta – isti.

Počet ćemo s djelomično ispunjenim tablicama (u slučaju da želite sami pokušati pronaći vrijednosti):

Bijeli

Krugovi I	2	4	6	8
Krugovi II	4	16	36	64
Trokuti I	6	20		
Trokuti II	9			
Omjer	3 : 2			

Crni

Krugovi I	3	5	7	9
Krugovi II	9	25	49	81
Trokuti I				
Trokuti II				
Omjer				

U srednjovjekovnoj i renesansnoj glazbi različiti omjeri korišteni su za stvaranje različitih glazbenih ljestvica i analizu razlika između glazbenih nota unutar tih ljestvica. Na primjer, pitagorejski temperament temelji se na omjeru 3 : 2 koji se pojavljuje kada se pronađu prve vrijednosti trokuta. Ovdje su sve vrijednosti trokuta:

Bijeli

Krugovi I	2	4	6	8
Krugovi II	4	16	36	64
Trokuti I	6	20	42	72
Trokuti II	9	25	49	81
Omjer	3 : 2	5 : 4	7 : 6	9 : 8

Crni

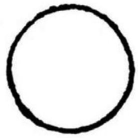
Krugovi I	3	5	7	9
Krugovi II	9	25	49	81
Trokuti I	12	30	56	90
Trokuti II	16	36	64	100
Omjer	4 : 3	6 : 5	8 : 7	10 : 9

Matka 31 (2022./2023.) br. 122

Kvadrati

Svaka strana ima sedam kvadrata. Trokutaste ritmomahijske figure koristile su omjere oblika $(n + 1) : n$. Kvadrati koriste omjere oblika $[\ n + (\ n - 1\ ) : n\ ]$, što možemo pojednostaviti na izraz oblika $(2n - 1) : n$. Ovo je poseban slučaj općenitijih proporcija superpartijenta. Superpartijent proporcija je svaki omjer oblika $(n + \mathrm{a}) : n$, gdje je a cijeli broj veći od 1 i a i n su relativno prosti (to jest, njihov najveći zajednički djelitelj je 1).

Brojevi za kvadratne figure mogu se pronaći ponavljanjem metode za pronalaženje brojeva za trokutaste figure, ali sada pomaknuti dva reda prema dolje. Brojevi za prvi red kvadrata dobivaju se zbrajanjem dvaju brojeva trokuta iznad toga broja, u istom stupcu. Brojeve za drugi red kvadrata možete pronaći pomoću omjera. U svakom je stupcu omjer broja u prvom retku kvadrata prema broju u zadnjem retku trokuta, te omjer broja u drugom retku kvadrata prema broju u prvom retku kvadrata – isti.

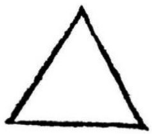


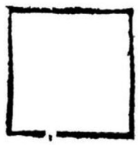
Bijeli

Krugovi I	2	4	6	8
Krugovi II	4	16	36	64
Trokuti I	6	20	42	72
Trokuti II	9	25	49	81
Kvadrati I	15	45	91 P	153
Kvadrati II	25	81	169	289
Omjer	5 : 3	9 : 5	13 : 7	17 : 9

Crni

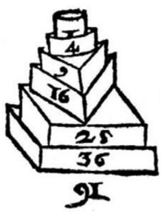
Krugovi I	3	5	7	9
Krugovi II	9	25	49	81
Trokuti I	12	30	56	90
Trokuti II	16	36	64	100
Kvadrati I	28	66	120	190 P
Kvadrati II	49	121	225	361
Omjer	7 : 4	11 : 6	15 : 8	19 : 10



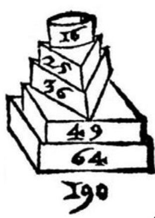


Piramide

Piramide ili kraljevi zbrojevi su savršenih kvadrata. U idealnom slučaju trebali bi biti izgrađeni od rezervnih figura odgovarajuće boje s ovim vrijednostima. Bijela parna piramida ima vrijednost 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91. Crna neparna piramida ima vrijednost 16 + 25 + 36 + 49 + 64 = 190.



Zbroj brojčanih vrijednosti crnih figura iznosi 1752, dok zbroj brojčanih vrijednosti bijelih figura iznosi 1312 bodova.



Igra je bila vrijedna pažnje po tome što crno-bijela strana nije simetrična. Iako svaka strana ima iste količine i oblike figura, brojevi na njima se razlikuju, dopuštajući igračima različita moguća uzimanja i pobjedničke pozicije.

Tu ćemo napraviti stanku kako bismo usustavili svoje misli. Nakon kraćeg odmora nastavljamo dalje širokom cestom na matematičkom putovanju kroz ovu drevnu igru!