O DIOFANTSKIM JEDNADŽBAMA

Daniela Zubović i Šefket Arslanagić, Sarajevo

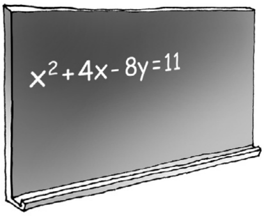
O rješavanju Diofantskih jednadžbi bilo je govora u ranijim brojevima *Matke*. No, ovdje će biti govora o Diofanskim jednadžbama koje nemaju rješenja u skupu cijelih brojeva. Dat ćemo više primjera takvih jednadžbi.

Primjer 1. Dokažimo da jednadžba $x^2 - 3y = 17$ nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

Rješenje: Očigledno je da x nije djeljivo brojem 3 jer bi to u protivnom slučaju, da je $(x^2 - 3y)$ djeljivo brojem 3, značilo da je 17 djeljivo brojem 3, što nije točno. Zato je $x = 3k \pm 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Iz dane jednadžbe dobivamo da je

$$9k^2 \pm 6k + 1 - 3y = 17, \text{ tj. } 3(3k^2 \pm 2k - y) = 16,$$

što je nemoguće jer 16 nije djeljivo brojem 3. Dakle, dana jednadžba nema rješenja u skupu $\mathbb{Z}$.



Primjer 2. Dokažimo da jednadžba $x^2 + 4x - 8y = 11$ nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

Rješenje: Kako je $4x - 8y$ za sve $x, y \in \mathbb{Z}$ paran broj, a desna je strana dane jednadžbe neparan broj, to ako jednadžba ima rješenja iz skupa $\mathbb{Z}$ znači da x^2 odnosno x mora biti neparan broj. Napišimo danu jednadžbu u obliku:

$$x^2 + 4x + 3 - 8y = 14, \text{ tj.}$$

$$(x + 1)(x + 3) - 8y = 14. \qquad (1)$$

Kako je x neparan broj, to znači da su $x + 1$ i $x + 3$ dva uzastopna parna broja čiji je umnožak djeljiv brojem 8. Kako je i $8y$ djeljivo brojem 8, to znači da je lijeva strana jednadžbe (1) djeljiva brojem 8. No, desna strana te jednadžbe (broj 14) nije djeljiva brojem 4. Dakle, jednadžba (1), a sami time i polazna jednadžba, nema rješenja ni za koje cijele brojeve x i y.

Primjer 3. Dokažimo da jednadžba $3x^2 - 4y^2 = 13$ nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

Rješenje: Danu jednadžbu napišimo u obliku:

$$3x^2 - 3 - 4y^2 = 10,$$

$$3(x^2 - 1) - 4y^2 = 10,$$

$$3(x - 1)(x + 1) - 4y^2 = 10. \qquad (2)$$

Kako je $3x^2 - 4y^2 = 13$ neparan broj, jasno je da x^2 odnosno x mora biti neparan broj. To znači da je $(x - 1)(x + 1)$ umnožak dvaju uzastopnih parnih brojeva koji je djeljiv brojem 4.

[1]Diofant, starogrčki matematičar (200. – 284.)

Dakle, lijeva strana jednadžbe (2) djeljiva je brojem 4, no desna strana od (2) (broj 10) nije djeljiva brojem 4 pa (2) ne vrijedi ni za koje cijele brojeve x i y, tj. dana jednadžba nema rješenja u skupu $\mathbb{Z}$.

Primjer 4. Dokažimo da jednadžba $2x^2 - 5y^2 = 7$ nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

***Rješenje**:* Kako je $2x^2 - 7$ neparan broj, to i $5y^2$ mora biti neparan broj, te i y mora biti neparan broj. Stavimo $y = 2z + 1$, pa imamo da je

$$2x^2 - 20z^2 - 20z - 5 = 7, \text{ tj. } x^2 - 10z^2 - 10z = 6.$$

Broj $10z^2 + 10z = 6$ je paran broj, što znači da je i x^2 odnosno x paran broj. Neka je $x = 2k$. Tada je $2k^2 - 5z\,(z + 1) = 3$, što je nemoguće jer je $z(z + 1)$ paran broj, dakle lijeva je strana posljednje jednakosti paran, a desna neparan broj. Dakle, dana jednadžba nema rješenja u skupu $\mathbb{Z}$.

Primjer 5. Dokažimo da jednadžba $3x^2 + 8 = y^2$ nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

***Rješenje**:* Iz dane jednadžbe dobivamo $x^2 = \dfrac{y^2 - 8}{3}$. Odavde vidimo da, ako je x cijeli broj, $y^2 - 8$ mora biti djeljivo brojem 3. No, kako je $8 = 2 \cdot 3 + 2$, to y^2 mora biti oblika $3k + 2$, a broj y oblika $3a \pm 1$ jer y^2 nije djeljivo brojem 3. No, $(3a \pm 1)^2 = 9a^2 \pm 6a + 1 = 3k + 1$, tj. vrijedi za sve vrijednosti y, kvadrat toga broja ne može biti oblika $3k + 2$. Dakle, $y^2 - 8$ nije djeljivo brojem 3, što znači da dana jednadžba nema rješenje u skupu $\mathbb{Z}$.

Primjer 6. Dokažimo da jednadžba $2x^2 - 4x - 5y^2 - 10y = 10$ nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

***Rješenje**:* Napišimo danu jednadžbu u obliku $2x^2 - 4x - 10y - 10 = 5y^2$. Lijeva je strana ove jednadžbe paran broj, što znači da i desna strana mora biti paran broj, odnosno $y = 2z$. Tada dana jednadžba postaje $2x^2 - 4x - 20z^2 - 20z = 10$. Ako je x paran broj, lijeva je strana ove jednadžbe broj djeljiv brojem 4, a desna strana nije djeljiva brojem 4. Ako je x neparan broj, tj. $x = 2t + 1$, tada imamo:

$$8t^2 + 8t + 2 - 8t - 4 - 20z^2 - 20z = 10, \text{ tj.}$$

$$8t^2 - 20z\,(z + 1) = 12.$$

Kako je umnožak $z(z + 1)$ paran broj, to je lijeva strana gornje jednadžbe djeljiva brojem 8. No, desna strana, tj. broj 12, nije djeljiva brojem 8. Iz svega slijedi da dana jednadžba nema rješenja u skupu cijelih brojeva.

Preporučujemo da čitatelji ovoga članka dokažu da sljedeće jednadžbe nemaju rješenja u skupu cijelih brojeva:

a) $19x^2 + 2 = y^2$, b) $2x^2 - 215y^2 = 7$, c) $15x^2 - 7y^2 = 9$.

Literatura:

1. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.