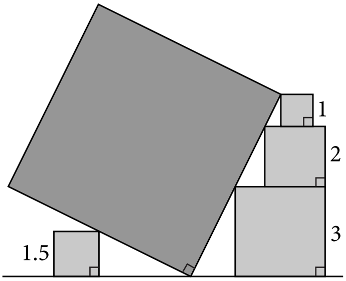
Matka 31 (2022./2023.) br. 122

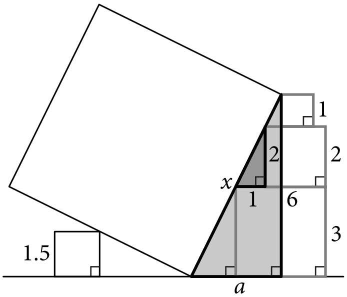
TROKUT, ČETVEROKUT I KRUG

Zlatko Lobor, Zagreb

Primjer 1. Izračunajmo površinu najvećega kvadrata na slici ako su zadane duljine stranica manjih kvadrata.

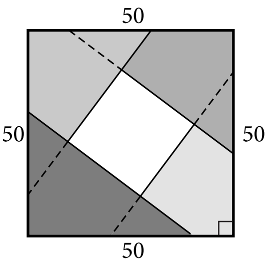


Rješenje: Promotrimo dva istaknuta osjenčana pravokutna trokuta.



Oni su međusobno slični prema KK poučku pa su im odgovarajuće stranice proporcionalne. Manji trokut ima katete duljina 1 i 2, a veći duljina a i 6. Iz proporcije $\frac{a}{1}=\frac{6}{2}$ dobivamo da je a = 3. Hipotenuza većega pravokutnoga trokuta ujedno je i stranica najvećega kvadrata čiju površinu treba izračunati. Označimo njezinu duljinu x.

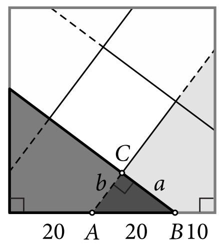
Iz Pitagorina poučka slijedi $x^2=3^2+6^2=9+36=45$, što je ujedno i tražena površina kvadrata.



Primjer 2. Unutar kvadrata stranice duljine 50 smještena su četiri pravokutna trokuta s katetama duljina 30 i 40, kako je prikazano na slici. Izračunajmo površinu manjega kvadrata u sredini i duljinu njegovih stranica.

Rješenje: Istaknimo samo dva pravokutna trokuta s katetama 30 i 40. Duljine hipotenuza tih trokuta su 50, što se dobiva primjenom Pitagorina poučka $\sqrt{30^2+40^2}=\sqrt{2500}=50$.

Njihov je presjek na slici istaknuti trokut ABC. Hipotenuza $\overline{AB}$ trokuta ABC ima duljinu $|AB|=30+40-50=20$.



Trokut *ABC* sličan je zadanim pravokutnim trokutima prema KK poučku pa su njihove odgovarajuće stranice proporcionalne, tj. omjer duljina odgovarajućih kateta jednak je omjeru duljina hipotenuza tih trokuta. Označimo li duljine kateta trokuta *ABC* s a i b, tada vrijede sljedeće proporcije:

$$\frac{a}{40}=\frac{20}{50}\Rightarrow a=16 \text{ i } \frac{b}{30}=\frac{20}{50}\Rightarrow b=12.$$

Sada se može izračunati tražena površina maloga kvadrata.

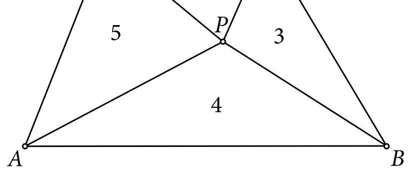
Od površine zadanoga kvadrata oduzmemo površine četiriju sukladnih pravokutnih trokuta s katetama duljina 30 i 40. Međutim, time smo dva puta oduzimali površine četiriju pravokutnih trokuta s katetama duljina 12 i 16. To znači da ćemo na dobiveni rezultat morati još jednom dodati površine četiriju manjih pravokutnih trokuta.

Dakle, vrijedi $p=50^2-4\cdot\frac{30\cdot 40}{2}+4\cdot\frac{12\cdot 16}{2}$, tj. $p=2500-2400+384=484$.

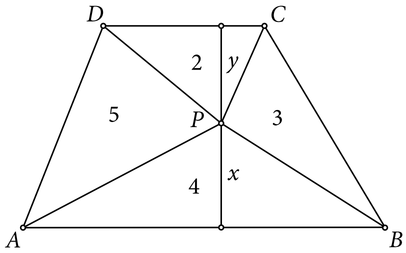
Duljine stranica toga kvadrata su $\sqrt{484}=22$.

Pokušajte isti zadatak riješiti i na drugi način tako što ćete najprije izračunati duljinu stranice manjega kvadrata.

Primjer 3. Zadan je trapez $ABCD$ i točka P unutar trapeza. Spojnice točke P s vrhovima trapeza dijele trapez na četiri trokuta čije su površine upisane na slici. Izračunajte omjer $|AB|:|CD|$ ako je $|AB| \quad |CD|$.



Rješenje: Označimo s x duljinu visine trokuta ABP na stranicu $\overline{AB}$, a s y duljinu visine trokuta CDP na stranicu $\overline{CD}$.



Visina v zadanoga trapeza $ABCD$ ima duljinu $v = x + y$.

Površina trokuta ABP je $p_{\Delta ABP} = \frac{|AB| \cdot x}{2} = 4$, iz čega slijedi $|AB| \cdot x = 8$. Također, za trokut CDP vrijedi $p_{\Delta CDP} = \frac{|CD| \cdot y}{2} = 2$, tj. $|CD| \cdot y = 4$. Iz formule za površinu trapeza $p = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot v$ slijedi: $\frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot (x + y) = 2 + 3 + 4 + 5$, tj. $(|AB| + |CD|) \cdot (x + y) = 28$.

Nakon množenja izraza u zagradama na lijevoj strani jednakosti dobiva se redom

$$|AB| \cdot x + |AB| \cdot y + |CD| \cdot x + |CD| \cdot y = 28$$

$$8 + |AB| \cdot y + |CD| \cdot x + 4 = 28$$

$$|AB| \cdot y + |CD| \cdot x = 16$$

Uočimo da je $x = \frac{8}{|AB|}$, odnosno $y = \frac{4}{|CD|}$, što možemo uvrstiti u gornju jednakost pa dobivamo $|AB| \cdot \frac{4}{|CD|} + |CD| \cdot \frac{8}{|AB|} = 16$. Ovo možemo zapisati i ovako: $4 \cdot \frac{|AB|}{|CD|} + 8 \cdot \frac{|CD|}{|AB|} = 16$.

Ako omjer $\frac{|AB|}{|CD|}$ zamijenimo s t, onda je njemu recipročni omjer $\frac{|CD|}{|AB|}$ jednak $\frac{1}{t}$. Dakle, vrijedi $4 \cdot t + 8 \cdot \frac{1}{t} = 16$. Ovu jednakost pomnožimo s t, a zatim je podijelimo s 4 pa dobivamo $t^2 + 2 = 4t$, tj. $t^2 - 4t + 2 = 0$. Zadatak će biti riješen ako odredimo t za koji vrijedi ova jednakost jer je t vrijednost traženoga omjera.

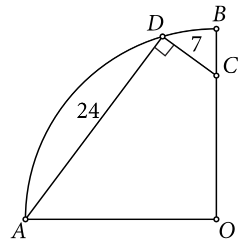
Ovu jednakost možemo transformirati u $t^2 - 4t + 4 - 2 = 0$, tj. $(t-2)^2 = 2$.

Postoje dva broja koji kvadrirani daju 2. To su brojevi $\sqrt{2}$ i $-\sqrt{2}$.

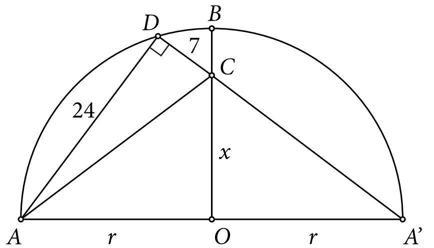
To znači da je $t - 2 = \sqrt{2}$ ili $t - 2 = -\sqrt{2}$, tj. moguća rješenja su $t_1 = 2 + \sqrt{2} \approx 3.414$ i $t_2 = 2 - \sqrt{2} \approx 0.586$.

Budući da je zadano $|AB| > |CD|$, tj. $\frac{|AB|}{|CD|} > 1$, to znači da je konačno rješenje $\frac{|AB|}{|CD|} = 2 + \sqrt{2} \approx 3.414.$

Primjer 4. U četvrtini kruga istaknuta je tetiva $\overline{AD}$ duljine 24. Točka C odabrana je na polumjeru $\overline{OB}$ tako da vrijedi $|CD| = 7$ i $\angle ADC$ je pravi kut. Odredimo duljinu $|OC|$.



Rješenje: Dopunimo gornju sliku tako da promotrimo polukrug kojemu je promjer dužina $\overline{AA'}$. Dužina $\overline{CA'}$ produžetak je dužine $\overline{CD}$ jer je, prema Talesovu poučku, pravi kut $|\angle ADC| = |\angle ADA'|$ obodni kut nad promjerom.

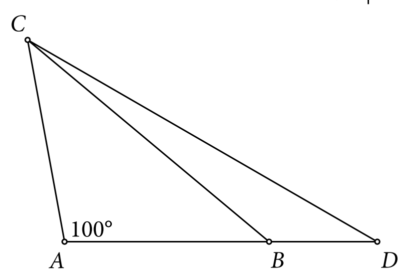


Dužina $\overline{AC}$ hipotenuza je pravokutnoga trokuta ACD pa je, prema Pitagorinu poučku, $|AC| = \sqrt{24^2 + 7^2} = \sqrt{625} = 25$. Trokuti AOC i $A'OC$ sukladni su prema SKS poučku pa je $|A'C| = |AC|$, tj. $|A'D| = |A'C| + |CD| = 25 + 7 = 32$.

U pravokutnom trokutu $AA'D$ vrijedi $|AA'|^2 = |AD|^2 + |DA'|^2$, tj. $(2r)^2 = 24^2 +$ + 32 iz čega slijedi $r = 20$.

Primijenimo li Pitagorin poučak na trokut AOC, dobiva se $|OC|^2 = |AC|^2 - |AO|^2$. Dakle, $x^2 = 25^2 - 20^2 = 225$. Slijedi da je $|OC| = x = 15$.

Zadatak 1. Odredite veličinu kuta $\angle BDC$ ako je $|AB| = |AC|$ i $|AD| = |BC|$.



Izvor:

1. https://www.youtube.com/c/MindYourDecisions