Neke nove nejednakosti u pravokutnom trokutu

Daniela Zubović[1], Šefket Arslanagić[2]

Autor ovoga članka napisao je više raznih radova koji se odnose na nejednakosti u pravokutnom trokutu ΔABC. Riječ je o trokutu čije su stranice a i b duljine kateta, c je duljina hipotenuze, R i r su radijusi opisane i upisane kružnice u taj trokut, h je duljina visine na hipotenuzu, t_a, t_b i t_c su duljine težišnica iz vrhova A, B i C toga trokuta, dok su w_a, w_b, w_c duljine simetrala njegovih kutova α, β i γ ($\gamma = 90^\circ$). Navest ćemo sada veći broj nejednakosti dokazanih u [1], [2], [3], [4], [5], [6] i [7].

1. $a+b \le c\sqrt{2}$,
2. $c+h > a+b$,
3. $R+r \ge \sqrt{2P}$ (P je površina trokuta ΔABC),
4. $R \ge r\left(1+\sqrt{2}\right)$,
5. $a+b+c \ge 2\left(1+\sqrt{2}\right)h$ ili $s \ge \left(1+\sqrt{2}\right)h$, (s je poluopseg trokuta ΔABC),
6. $\sqrt{2}-1 \le \frac{r}{h} < \frac{1}{2}$,
7. $r \le \frac{\sqrt{2}-1}{2}c$,
8. $a^3+b^3 < c^3$,
9. $a^n+b^n < c^n; \left(n \in \mathbb{N}, n \ge 3\right)$,
10. $c^2 + \frac{1}{h^2} \ge 4$,
11. $s^2 \ge 27r^2$,
12. $P \ge 2\sqrt{Rr^3}$,
13. $\frac{c}{h}+\frac{h}{c} \ge \frac{5}{2}$,
14. $a+b \ge \left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)c+h$,

[1]Daniela Zubović, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, BiH
[2]Šefket Arslanagić, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, BiH

15. $\dfrac{c}{a}+\dfrac{c}{b}\geq 2\sqrt{2}$,

16. $\dfrac{cs}{ab}\geq 1+\sqrt{2}$,

17. $\dfrac{a^2(b+c)+b^2(a+c)}{abc}\geq 2+\sqrt{2}$,

18. $h\leq a+b-\left(\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}\right)c$,

19. $\dfrac{t_a+t_b}{a+b}\geq\dfrac{\sqrt{5}}{2}$,

20. $t_a^2+t_b^2\geq 5r^2\left(3+2\sqrt{2}\right)$,

21. $w_c^4\leq t_c h^3$,

22. $w_a\geq\dfrac{3\sqrt{3}}{4}h;\left(w_a=b\sqrt{\dfrac{2c}{b+c}}\right)$,

23. $aw_a\leq\dfrac{2\sqrt{6}}{9}c^2$,

24. $8r^2\left(2+\sqrt{2}\right)\leq w_a^2+w_b^2\leq 8R^2\left(2-\sqrt{2}\right)$.

Sada ćemo formulirati i dokazati četiri nove nejednakosti za pravokutni trokut ΔABC .

Nejednakost 1. Treba dokazati nejednakost

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\geq\frac{2ab}{c^2}\quad . \tag{1}$$

Dokaz: Iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja slijedi:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2}\geq\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}$$

odnosno

$$\sin\alpha+\sin\beta\geq 2\sqrt{\sin\alpha\sin\beta},$$

odakle slijedi

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\geq\sqrt{\sin\alpha\sin\beta}.$$

Zbog $\alpha+\beta=90^0$, tj. $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=45^0$ i $\sin\alpha=\dfrac{a}{c}$, $\cos\alpha=\dfrac{b}{c}$ vrijedi

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\geq\sqrt{\frac{ab}{c^2}}.$$

Kvadriranjem dobivamo

$$\frac{1}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\geq\frac{ab}{c^2}$$

pa je

$$\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\geq\frac{2ab}{c^2},$$

što smo i trebali dokazati.

Jednakost u (1) vrijedi ako i samo ako je $\alpha=\beta=45^0$, tj. ako je u pitanju pravokutni-jednakokračni trokut.

Nejednakost 2. Treba dokazati nejednakost

$$\frac{h}{a+b-c}\leq\frac{1+\sqrt{2}}{2}\ . \tag{2}$$

Dokaz: Imamo

$$h=\frac{ab}{c}=\frac{(a+b-c)(a+b+c)}{2c}$$

a odavde

$$\frac{h}{a+b-c}=\frac{a+b+c}{2c}. \tag{3}$$

Dokazat ćemo da vrijedi nejednakost

$$\frac{a+b+c}{2c}\leq\frac{1+\sqrt{2}}{2}\ . \tag{4}$$

Nejednakost (4) ekvivalentna je

$$a+b+c\leq c\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Sređivanjem gornjeg izraza dobivamo

$$a+b\leq c\sqrt{2}.$$

Za pozitivne brojeve a,b,c to je ekvivalentno

$$(a+b)^2\leq 2c^2,$$

odnosno, zbog Pitagorina teorema,

$$a^2+b^2+2ab\leq 2\left(a^2+b^2\right),$$

iz čega slijedi

$$(a-b)^2\geq 0\ .$$

Gornja nejednakost uvijek je istinita pa iz nejednakosti (3) i (4) slijedi dana nejednakost (2).

Vrijedi jednakost u (2) ako i samo ako je $a=b$, tj. ako je u pitanju pravokutni-jednakokračni trokut.

Nejednakost 3. Treba dokazati nejednakost

$$\frac{(a+c)(b+c)}{ab+bc+ca}>\sqrt{2}\ . \tag{5}$$

Dokaz: Zbog Nejednakosti 1., tj. $a+b\le c\sqrt{2}$, imamo

$$\frac{(a+c)(b+c)}{ab+bc+ca}=\frac{c^2+bc+ac+ab}{ab+bc+ca}=1+\frac{c^2}{ab+bc+ca}\ , \tag{6}$$

te

$$a+b\le c\sqrt{2}$$

Množenjem sa $c,\ c>0$ dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$ca+bc\le c^2\sqrt{2},$$

odnosno

$$ab+bc+ca\le c^2\sqrt{2}+ab.$$

Invertiranjem gornje nejednakosti dobivamo

$$\frac{1}{ab+bc+ca}\ge\frac{1}{c^2\sqrt{2}+ab}\ ,$$

odakle slijedi

$$\frac{c^2}{ab+bc+ca}\ge\frac{c^2}{c^2\sqrt{2}+ab}. \tag{7}$$

Sada ćemo dokazati da je

$$\frac{c^2}{c^2\sqrt{2}+ab}>\sqrt{2}-1\ . \tag{8}$$

Gornja nejednakost ekvivalentna je

$$c^2>\left(\sqrt{2}-1\right)\left(c^2\sqrt{2}+ab\right),$$

odnosno

$$c^2>\sqrt{2}c^2\left(\sqrt{2}-1\right)+ab\left(\sqrt{2}-1\right).$$

Sređivanjem dobivamo

$$ab\left(\sqrt{2}-1\right)<c^2\left(1-2+\sqrt{2}\right),$$

odnosno

$$ab\left(\sqrt{2}-1\right)<\left(a^2+b^2\right)\left(\sqrt{2}-1\right),$$

tj.

$$a^2+b^2>ab.$$

Dopunjavanjem do potpunog kvadrata dobivamo

$$\left(a-\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2>0,$$

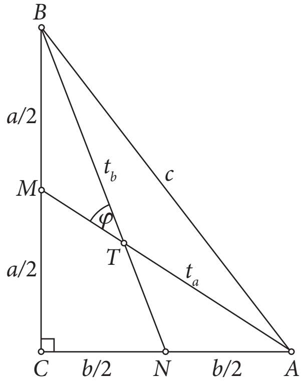
što uvijek vrijedi, pa i nejednakost (8) također vrijedi. Sada iz nejednakosti (7) i (8) slijedi nejednakost

$$\frac{c^2}{ab+bc+ca} > \sqrt{2}-1. \tag{9}$$

Najzad, iz nejednakosti (6) i (9) slijedi nejednakost (5), koju smo željeli dokazati.

Nejednakost 4. Ako je φ kut između težišnica t_a i t_b pravokutnog trokuta ΔABC, treba dokazati da vrijedi nejednakost

$$\cos\varphi \ge \frac{4}{5}.$$



Dokaz: Neka je točka T težište trokuta ΔABC, a M i N polovišta stranica $\overline{BC}$ i $\overline{AC}$.
Iz pravokutnih trokuta ΔACM i ΔBCN imamo:

$$t_a = \frac{1}{2}\sqrt{4b^2+a^2},\ t_b = \frac{1}{2}\sqrt{4a^2+b^2}$$

Teorem o kosinusima za trokut ΔMTB daje

$$\cos\varphi = \frac{\left(\frac{2}{3}t_b\right)^2 + \left(\frac{1}{3}t_a\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2\cdot\frac{2}{3}t_b\cdot\frac{1}{3}t_a}.$$

odnosno

$$\cos\varphi = \frac{\frac{4}{9}\cdot\frac{4a^2+b^2}{4} + \frac{1}{9}\cdot\frac{4b^2+a^2}{4} - \frac{a^2}{4}}{\frac{4}{9}\sqrt{\left(4b^2+a^2\right)\left(4a^2+b^2\right)}},$$

što je ekvivalentno

$$\cos\varphi = \frac{\frac{16a^2+4b^2+4b^2+a^2-9a^2}{36}}{\frac{4}{9}\sqrt{\left(4b^2+a^2\right)\left(4a^2+b^2\right)}}.$$

Dobivamo

$$\cos\varphi = \frac{2c^2}{\sqrt{\left(4b^2+a^2\right)\left(4a^2+b^2\right)}}. \tag{10}$$

Iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine za dva pozitivna broja imamo

$$\sqrt{\left(4b^2+a^2\right)\left(4a^2+b^2\right)} \le \frac{4b^2+a^2+4a^2+b^2}{2},$$

odnosno

$$\sqrt{\left(4b^2+a^2\right)\left(4a^2+b^2\right)} \le \frac{5\left(a^2+b^2\right)}{2}.$$

Odatle je

$$\sqrt{\left(4b^2+a^2\right)\left(4a^2+b^2\right)} \le \frac{5c^2}{2},$$

što je ekvivalentno

$$\frac{1}{\sqrt{\left(4b^2+a^2\right)\left(4a^2+b^2\right)}} \ge \frac{2}{5c^2}. \tag{11}$$

Sada iz (10) i (11) dobivamo:

$$\cos\varphi \ge \frac{4}{5},$$

što smo željeli i dokazati.

Vrijedi jednakost ako i samo ako je $a = b$, tj. ako je u pitanju pravokutni-jednakokračni trokut.

Literatura:

1. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. Arslanagić, Š., *Matematička čitanka*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2008.
3. Arslanagić, Š., *Matematička čitanka 2*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2010.
4. Arslanagić, Š., Zejnulahi, F., *Matematička čitanka 3*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2011.
5. Arslanagić, Š., *Matematička čitanka 7*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2015.
6. Arslanagić, Š., *Matematička čitanka 8*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2016.
7. Arslanagić, Š., *Matematička čitanka 11*, Grafičar promet d.o.o., Sarajevo, 2020.