Pitagorin poučak u četverodimenzijskome prostoru (u 4D)

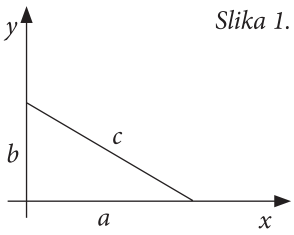
Izet Kalaba[1]

1. Uvod

U ovom uratku dat ćemo interpretaciju i dokaz Pitagorina poučka u 4D. U 2D i 3D Pitagorin poučak odnosi se na kvadrate određenih duljina i kvadrate određenih površina, dok se u 4D Pitagorin poučak odnosi na kvadrate određenih volumena. Osnovna namjera članka nije samo načiniti logičku ekstenziju poučka u 4D, već i podsjetiti na bit suvremene matematike koja se nerijetko zaboravlja na nastavi matematike, a to je matematički misliti i izvan prostora koji nas okružuje. Naime, više nego ikada okruženi smo retrogradnim nastojanjima da se nastava matematike pretvori ili svede na običnu primjenjivost u svakodnevnom životu. U takvom pristupu nastavi matematike učenik je lišen brojnih pozitivnih iskustava apstraktne matematike koji utječu na njegov razvoj. Apstraktna matematika, davanjem istih imena različitim stvarima i odvajanjem od materijalnog svijeta, ima ogroman prostor – kako za svoj razvoj, tako i za doprinos podizanju znanja učenika – o svijetu koji ga okružuje na višu razinu uopćenosti; uvid u sadržaj kod učenika postaje dublji, a znanje postaje sastavnim dijelom ponašanja tog istog učenika.

2. Pitagorin poučak u dvodimenzijskom i trodimenzijskome prostoru

Obično se Pitagorin poučak formulira u sljedećem obliku: Kvadrat nad hipotenuzom pravokutnog trokuta jednak je zbroju kvadrata nad katetama. U toj formulaciji pod kvadratom se misli na njegovu površinu. Proširenja poučka u trećoj i četvrtoj dimenziji bacit će novo svjetlo na prethodnu formulaciju, tako da će ona glasiti: Kvadrat duljine hipotenuze jednak je zbroju kvadrata duljina kateta. No, prva formulacija učenicima se više ureže u pamćenje zbog slike triju nacrtanih kvadrata koje mi, na Slici 1., izostavljamo.



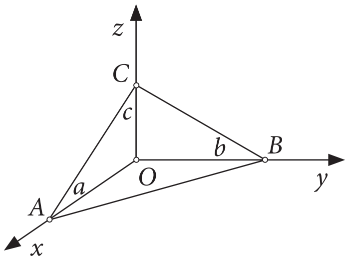
Slika 1.

[1]Izet Kalaba, Srednja škola fra Andrije Kačića Miošića, Ploče

Dakle,

$$c^2 = a^2 + b^2. \tag{1}$$

Pitagorin poučak u trodimenzijskome prostoru, Slika 2., glasi: Kvadrat površine trokuta *ABC* jednak je zbroju kvadrata površina pravokutnih trokuta *OAB*, *OBC* i *OCA*.



Slika 2.

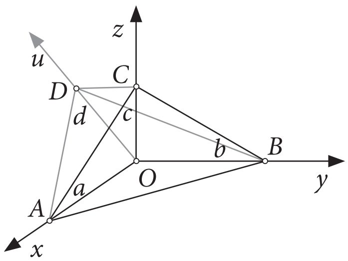
Dakle,

$$P^2 = P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = \left(\frac{ab}{2}\right)^2 + \left(\frac{bc}{2}\right)^2 + \left(\frac{ac}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2\right). \tag{2}$$

Dokaz ove tvrdnje može se naći u hrvatskoj matematičkoj literaturi (Časek, 2021).

3. Pitagorin poučak u četverodimenzijskome prostoru

Prije nego što formuliramo teorem, odabrat ćemo pet točaka *O*, *A*, *B*, *C* i *D* u četverodimenzijskome prostoru, Slika 3., na način da točke *A*, *B*, *C* i *D* redom leže na koordinatnim osima *x*, *y*, *z* i *u* pravokutnog četverodimenzijskoga koordinatnog sustava kojemu je ishodište točka *O*.



Slika 3.

Promatramo četiri piramide u četiri različita trodimenzijska prostora određena s *OABC*, *OABD*, *OACD*, *OBCD* koja su uložena u jedan četverodimenzijski prostor.

Sada možemo formulirati Pitagorin poučak u 4D: Kvadrat volumena piramide *ABCD* jednak je zbroju kvadrata volumena piramida *ABOC*, *ABOD*, *ACOD* i *BCOD*.

Dakle,

$$V^2 = V_1^2 + V_2^2 + V_3^2 + V_4^2. \tag{3}$$

Dokaz:

Neka je

$$V_1 = V_{ABOC} = \frac{P_{ABO} \cdot v_{OC}}{3} = \frac{\frac{ab}{2} \cdot c}{3} = \frac{abc}{6}.$$

Analogno,

$$V_2 = V_{ABOD} = \frac{P_{ABO} \cdot v_{OD}}{3} = \frac{\frac{ab}{2} \cdot d}{3} = \frac{abd}{6},$$

$$V_3 = V_{ACOD} = \frac{P_{ACO} \cdot v_{OD}}{3} = \frac{\frac{ac}{2} \cdot d}{3} = \frac{acd}{6},$$

$$V_4 = V_{BCOD} = \frac{P_{BCO} \cdot v_{OC}}{3} = \frac{\frac{bc}{2} \cdot d}{3} = \frac{bcd}{6}.$$

Nakon uvrštavanja u jednakost (3), desna je strana te jednakosti izraz

$$\frac{1}{36}\left(a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2\right).$$

Pokazat ćemo da i lijeva strana poprima isti oblik.

Dakle,

$$V = V_{ABCD} = \frac{P_{ABC} \cdot v_{DP}}{3}.$$

Koristeći jednakost (2), imamo

$$P^2{}_{ABC} = P_1^{\,2} + P_2^{\,2} + P_3^{\,2} = \frac{1}{4}\left(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2\right).$$

S v_{DP} označili smo udaljenost točke D od ravnine trokuta ABC, odnosno visinu piramide $ABCD$ u trodimenzijskome prostoru $ABCD$.

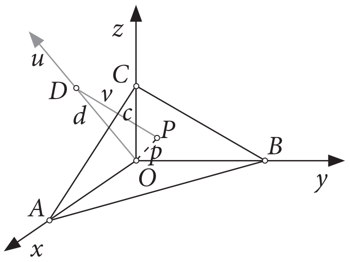
3.1. Pravac okomit na prostor

Pravac u (os u) okomit je na trodimenzijski prostor xyz u točki O. Time je on okomit na svaki pravac toga prostora koji prolazi točkom O. Nama je bitna njegova okomitost na pravac koji prolazi ishodištem i okomit je na ravninu trokuta ABC u točki P. Točka P ortogonalna je projekcija točke O na ravninu ABC u trodimenzijskome prostoru $OABC$. Udaljenost ishodišta od ravnine, odnosno duljina dužine $\overline{OP}$ ili kraće p, jednaka je:

$$p = \left|\frac{D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}\right| = \left|\frac{-abc}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}\right| \tag{4}$$

gdje je $Ax + By + Cz + D = 0$ jednadžba ravnine trokuta ABC, odnosno $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ segmentni oblik jednadžbe te iste ravnine koja u implicitnom obliku prelazi u izraz $bcx + acy + abz - abc = 0$.

Ostaje još pokazati da je ortogonalna projekcija točke D na ravninu ABC u trodimenzijskome prostoru $ABCD$ upravo točka P. Time će dužina $\overline{DP}$, Slika 4., postati visina piramide $ABCD$. Duljina te visine treba nam za izračun volumena piramide.



Slika 4.

Koordinate točke D su $(0, 0, 0, d)$. Neka su $(x, y, z, 0)$ koordinate njezine ortogonalne projekcije na ravninu ABC. Udaljenost između tih točaka je $v = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + d^2}$. Kako je d «fiksno", izraz pod korijenom je najmanji kada je ravnina ABC tangencijalna na sferu $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, odnosno radijus sfere okomit je na ravninu te je $r = p$. Time je točka P ortogonalna projekcija točke D.

Sada ćemo koristeći jednakost (4) izračunati duljinu visine v piramide ABCD.

$$v^2 = d^2 + p^2 = \frac{b^2c^2d^2 + a^2c^2d^2 + a^2b^2d^2 + a^2b^2c^2}{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2} \tag{5}$$

I konačno, volumen piramide $ABCD$, odnosno kvadrat toga volumena iznosi

$$V^2 = \left(\frac{Bv}{3}\right)^2 = \frac{\frac{a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2}{4} \cdot \frac{b^2c^2d^2 + a^2c^2d^2 + a^2b^2d^2 + a^2b^2c^2}{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}{9}$$

$$V^2 = \frac{a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2}{36} \tag{6}$$

Time je dokaz završen.

3.2. Napomena

Poredajmo, jednu ispod druge, formule za Pitagorin poučak u 3D i 4D**:**

$$n = 3, \qquad P^2{}_{ABC} = \frac{1}{4}\left(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2\right)$$

$$n = 4, \qquad V^2{}_{ABCD} = \frac{1}{36}\left(a^2b^2c^2 + a^2b^2d^2 + a^2c^2d^2 + b^2c^2d^2\right).$$

Što je n veći, jasnije se uočava da su na desnim stranama jednakosti zbrojevi određenih umnožaka. Zbrojevi se sastoje od n pribrojnika, dok se svaki pribrojnik sastoji od umnoška $n-1$ faktora. Ako umjesto a, b, c, d... uvedemo redom nove oznake a_1, a_2, a_3, a_4..., onda se prethodne dvije formule mogu napisati u obliku

$$n=3,\quad P^2=\frac{\sum_{k=1}^{3}\prod_{i=1}^{3}a_{i\neq k}^2}{(3-1)!^2},$$

$$n=4,\quad V^2=\frac{\sum_{k=1}^{4}\prod_{i=1}^{4}a_{i\neq k}^2}{(4-1)!^2}.$$

Na ovom mjestu možemo samo pretpostaviti da bi Pitagorin poučak u n-dimenzijskom prostoru imao oblik

$$V^2=\frac{\sum_{k=1}^{n}\prod_{i=1}^{n}a_{i\neq k}^2}{(n-1)!^2} \tag{7}$$

Tako bi se za n = 5, u starim oznakama, dobio izraz:

$$V^2{}_{ABCDE}=\frac{1}{576}\left(b^2c^2d^2e^2+a^2c^2d^2e^2+a^2b^2d^2e^2+a^2b^2c^2e^2+a^2b^2c^2d^2\right),$$

gdje bi V_{ABCDE} bio određeni hipervolumen hiperpiramide *ABCDE*.

I konačno, za n = 2 imali bismo dobro poznati izraz

$$c^2=\frac{\sum_{k=1}^{2}\prod_{i=1}^{2}a_{i\neq k}^2}{(2-1)!^2}=\frac{a_2^2+a_1^2}{1},$$

odnosno

$$c^2=b^2+a^2.$$

Ostaje, za neki novi članak, napisati dokaz formule (7), možda metodom matematičke indukcije.

4. Zaključak

U ovom uratku obradili smo interpretaciju i dokaz Pitagorina poučka u četverodimenzijskome prostoru i dali naslutiti kako bi Pitagorin poučak izgledao u n-dimenzijskom prostoru. Četverodimenzijski prostor ima neke nove pojmove koje ne možemo susresti u trodimenzijskom prostoru. Ti pojmovi su: pravac okomit na prostor (u, xyz), beskonačno okomitih pravaca u točki ravnine (p, v..., P, ABC) itd. Okomitosti se u analitičkoj geometriji obično dokazuju skalarnim umnoškom vektora i izjednačavanjem toga umnoška s nulom, no uradak nismo opterećivali vektorskim računom koji bi tekst razvukao na više stranica. Držali smo se maksime: *Neka bude tijesno riječima, a prostrano mislima*.

Literatura:

1. S. Časek, *Generalizacije i analogoni u geometriji*, diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb, 2021., https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:575639