Kvadratne i kubne jednadžbe kroz povijest

Sanja Sruk[1]

Kvadratna jednadžba $ax^2 + bx + c = 0$, $(a \neq 0)$ danas se rješava vrlo jednostavno uvrštavanjem koeficijenata a, b i c u formulu: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ ili u neki od novijih modela kalkulatora koji nam odmah daju rješenja. Ipak, u prošlosti nije bilo tako jednostavno.

Početci rješavanja kvadratnih jednadžbi

O rješavanju kvadratnih jednadžbi u starom Egiptu saznajemo iz *Berlinskog papirusa* koji potječe iz otprilike 1800. godine prije Krista. U njemu se nalazi ovaj zadatak:

„Površina kvadrata od 100 kvadratnih kraljevskih lakata (jedan kraljevski lakat iznosi 52.4 cm) jednaka je zbroju površina dvaju manjih kvadrata. Duljina stranice jednog od tih dvaju kvadrata jednaka je $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ drugog. Kolike su duljine stranica tih kvadrata?"

Danas bismo to zapisali ovako:

$$x^2 + y^2 = 100$$

$$x = \frac{3}{4}y$$

i sveli na kvadratnu jednadžbu $y^2 = 64$, iz koje bismo dobili $y = 8, x = 6$.

Ipak se prvima koji su rješavali kvadratne jednadžbe smatraju Babilonci. Pogledajmo zadatak:

Primjer 1. Nađite dva broja čiji je zbroj jednak 20, a umnožak 96.

Pravilo rješavanja nađeno u zapisima pisanim klinastim pismom dano je opisno, a izgleda ovako:

[1]Sanja Sruk, I. gimnazija, Zagreb

1. Podijeli zbroj tih dvaju brojeva s 2.
2. Kvadriraj taj broj.
3. Oduzmi umnožak brojeva od dobivenog rezultata.
4. Izvadi kvadratni korijen.
5. Taj broj dodaj rezultatu iz 1 (dobije se vrijednost prve nepoznanice).
6. Oduzmi rezultat iz 4 od rezultata iz 1 (dobije se vrijednost druge nepoznanice).

Na ovom primjeru imamo:

1. $20:2=10$
2. $10^2=100$
3. $100-96=4$
4. $\sqrt{4}=2$
5. $10+2=12$
6. $10-2=8$,

pa su traženi brojevi 12 i 8.

Općenito bi koraci od 1 do 4 izgledali ovako:

$$\sqrt{\left(\frac{x+y}{2}\right)^2-xy}=\sqrt{\frac{x^2+2xy+y^2-4xy}{4}}=\sqrt{\left(\frac{x-y}{2}\right)^2}$$

5. korak: $\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}=x$

6. korak: $\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}=y$.

Stara Grčka i Diofant

U staroj su se Grčkoj kvadratne jednadžbe rješavale geometrijskim metodama sve do **Diofanta** (3. st.). U njegovoj *Aritmetici* nema sustavnog izlaganja algebre, ali se može vidjeti kako je rješavao jednadžbe, osobito kvadratne. Suština njegovog postupka je u pažljivom odabiru nepoznanice, kako bi jednadžbu sveo na nepotpunu kvadratnu jednadžbu.

Primjer 2. Nađite dva broja čiji je zbroj jednak 20, a zbroj njihovih kvadrata 208.

Umjesto današnjeg načina rješavanja, tj. pomoću sustava

$$x+y=20,$$
$$x^2+y^2=208$$

Diofant je za novu nepoznanicu z odabrao polovinu razlike traženih brojeva:

$$\frac{1}{2}(x-y)=z.$$

Iz prve jednadžbe slijedi:

$$\frac{1}{2}(x+y)=10.$$

pa je zbrajanjem, odnosno oduzimanjem tih jednakosti dobio

$$x=10+z,\ y=10-z,$$

a zatim

$$x^2+y^2=(10+z)^2+(10-z)^2=2z^2+200,$$

te iz kvadratne jednadžbe

$$2z^2+200=208$$

dobiva $z=2$, a onda $x=12$, $y=8$.

Srednji i novi vijek

I indijski matematičari već od kraja 5. stoljeća poznaju kvadratne jednadžbe, a u 7. stoljeću **Brahmagupta** daje prvu opću metodu za traženje pozitivnih rješenja kvadratne jednadžbe s pozitivnim koeficijentima $ax^2+bx=c$: „Slobodni član pomnoži s četverostrukim kvadratnim koeficijentom, zatim dodaj kvadrat linearnog koeficijenta, te iz dobivenoga izvadi kvadratni korijen. Dobiveno umanji za linearni koeficijent, zatim podijeli s dvostrukim kvadratnim koeficijentom i dobit ćeš traženu vrijednost nepoznanice." Postupimo li prema receptu, dobit ćemo pozitivno rješenje $x=\frac{\sqrt{4ac+b^2}-b}{2a}$. U zapisima *Bhaskare* (12. stoljeće) vidi se da im je poznata dvoznačnost drugog korijena, a o kvadratnim jednadžbama u arapskome svijetu doznajemo iz traktata *Muhammeda ibn Muse Al-Khwarizmija* (9. st.). Ni on ne koristi negativne brojeve, a kao ni ostali matematičari do 16. stoljeća ne prihvaća nulu kao rješenje, vjerojatno zato što nije imala praktičnu vrijednost za njihove potrebe.

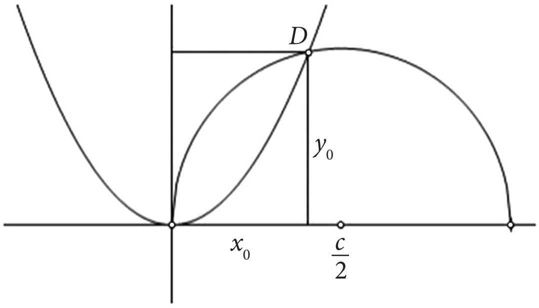
U Europi prvi put susrećemo formule za rješavanje kvadratne jednadžbe u *Fibonaccijevoj Knjizi abaka* (1202.), baziranoj na *Al-Khowarizmijevim* radovima. *Rafael Bombelli* (16. st.) razvija rješavanje kvadratnih jednadžbi priznavanjem negativnih i kompleksnih rješenja, a u 17. stoljeću rješavanje kvadratne jednadžbe poprima današnji oblik zahvaljujući francuskom matematičaru koji je većinu svog života proveo u Leidenu u Nizozemskoj, **Albertu Girardu**.

Kubne jednadžbe

Zbog potrebe rješavanja geometrijskih problema i kubne se jednadžbe pojavljuju dosta rano, još u staroj Grčkoj, ali prvi koji se sustavnije bavio njima arapski je matematičar *Omar Khayyam* iz 11. stoljeća. On je izvršio klasifikaciju kubnih jednadžbi i njihovih rješenja (samo pozitivnih) geometrijskom metodom koristeći presjeke konika, te dao algebarsku metodu kako se neke kubne jednadžbe mogu pretvoriti u kvadratne ili svesti na neki jednostavniji oblik.

Primjer 3. $x^3 + qx = r, \ (q, r > 0)$.

Ovu jednadžbu **Khayyam** zapisuje u obliku $x^3 + b^2 x = b^2 c$ i rješenja nalazi kao sjecišta parabole $x^2 = by$ i kružnice $y^2 = x(c - x)$ (vidi sliku).



Osim ishodišta, sjecište je točka $D(x_0, y_0)$. Uvrštavanjem njenih koordinata u jednadžbe parabole i kružnice dobio je

$$x_0^2 = by_0, \quad y_0^2 = x_0(c - x_0)$$

odnosno

$$x_0^3 = b^2(c - x_0),$$

čime je pokazao da je x_0 rješenje jednadžbe $x^3 + b^2 x = b^2 c$.

Napredak u vrijeme renesanse

Daljnji veći napredak u rješavanju kubnih jednadžbi zabilježen je u 16. stoljeću. U to su vrijeme bila popularna matematička natjecanja, pa su svoja otkrića matematičari često krili jer im je to davalo prednost na natjecanjima, a pobjeda je natjecatelju donosila dobru zaradu. Tako je i **Scipione dell Ferro** našao rješenje jednadžbe $x^3 + px = q, \quad (p, q > 0)$, ali je to rješenje otkrio samo dvojici svojih učenika. Jedan od njih, **Antonio del Fior**, izazvao je 1535. godine **Nicolu Tartagliu** na matematički dvoboj. Prije natjecanja u kojemu je svaki matematičar zadao drugome trideset zadataka, Tartaglia je uspio pronaći pravilo za rješavanje takvih kubnih jednadžbi te je s lakoćom pobijedio Del Fiora i postao poznat u cijeloj Italiji. Naime, sve jednadžbe koje je Del Fior zadavao Tartagli svodile su se na spomenuti oblik, dok je Tartaglia zadavao svom protivniku drugačije jednadžbe (oblika $x^3 + px^2 = q$), a on ih nije znao rješavati. Za njega je čuo i **Girolamo Cardano** koji se također bavio kubnim jednadžbama. On je zamolio Tartagliu da mu pošalje rješenje obećavajući da će to ili zadržati u tajnosti ili objaviti pod njegovim imenom. Tartaglia isprva nije pristao jer je želio još neko vrijeme zarađivati na natjecanjima, a kasnije objaviti, no nakon nekog vremena ipak mu je otkrio svoju metodu, i to u stihu, ali je zatražio od Cardana da to ne objavi. Ta metoda rješavanja jednadžbe $x^3 + px = q,\ (p,q > 0)$ izgleda ovako:

Treba odrediti dva broja u i v tako da je $u - v = q$ i $u \cdot v = \left(\frac{p}{3}\right)^3$, i tada će biti $x = \sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$. Rješavanjem ovoga sustava jednadžbi dobije se:

$$u = \frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3},\ \ v = -\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}.$$

Brojevi u i v su pozitivni, a korijeni koji se pojavljuju u ovom računu su realni, tj. ne pojavljuju se kompleksni brojevi. Sada je

$$x = \sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} - \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}.$$

Jednadžbe ovog tipa uvijek imaju samo jedno realno rješenje, i to pozitivno.

U idućih desetak godina Cardano se upoznao s rukopisima Del Ferra, nadogradio Tartaglinu metodu i razvio metodu rješavanja kubne jednadžbe, te to objavio 1545. godine u djelu *Ars Magna*. Naveo je Tartagliu kao autora opisane metode, ali Tartaglia je svejedno bio ljut što Cardano nije održao dano obećanje.

Pomoću tih formula i danas se rješavaju opće jednadžbe trećeg stupnja

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,\ \ (a \neq 0),$$

nakon što se dijeljenjem s a i uvođenjem nove varijable $y = x + \frac{b}{3a}$ svedu na oblik $y^3 + 3py + 2q = 0$, pri čemu je

$$3p = \frac{3ac - b^2}{3a^2},\ \ 2q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a}.$$

Formule su poznate pod imenom *Cardanove* ili *Cardano-Tartagline formule*.

Literatura:

1. A. Juranović, Povijest rješavanja algebarskih jednadžbi, http://www.mathos.unios.hr/~mdjumic/uploads/diplomski/JUR04.pdf

2. F. M. Brückler, Matematički dvoboji, Školska knjiga, Zagreb, 2011.