Konceptualno poučavanje usmjerene derivacije[1]

Lana Horvat Dmitrović[2], Mate Puljiz[3], Ana Žgaljić Keko[3]

Sažetak

Matematički kolegiji na tehničkim fakultetima imaju za cilj razviti kod studenata sposobnost primjene matematičkih znanja i vještina u različitim kontekstima. Istraživanja pokazuju da u tome može pomoći konceptualni pristup poučavanju. U ovom ćemo radu prikazati primjer konceptualnog poučavanja usmjerene derivacije realne funkcije više varijabli. U namjeri da izgradimo potpunu sliku koncepta usmjerene derivacije, objasnit ćemo i primijeniti različite metode u izgradnji slike koncepta. Poseban naglasak bit će stavljen na povezivanje s već poznatim konceptima i pojmovima. Također ćemo pokazati primjer ciljanih pitanja i konceptualnu mapu za usmjerenu derivaciju.

Ključne riječi: usmjerena derivacija**,** konceptualni pristup poučavanju, slika koncepta, konceptualna mapa, ciljana pitanja

Uvod

Budući da je matematika, kao temeljna znanost, na tehničkim fakultetima nužna da studenti razviju vještine za koje se obrazuju, u sklopu nastave potrebno je poticati studente da razumijevanjem naučenih koncepata razviju i sposobnost primjene u različitim inženjerskim kontekstima. Istraživanja pokazuju da u tome može pomoći pristup poučavanju koji veći naglasak stavlja na matematičke koncepte ([4]). Nadalje, pokazuje se da poučavanje usmjereno na usvajanje koncepata unaprjeđuje i proceduralne vještine ([2]). U skladu s time konceptualno se poučavanje primjenjuje na uvodnim matematičkim kolegijima na FER-u ([6], [7]).

Cilj konceptualnog pristupa je izgraditi potpunu sliku koncepta. U sklopu takvog pristupa nastavnik kod studenta potiče sistematizaciju gradiva, stvaranje po-

[1]Predavanje održano na 9. kongresu nastavnika matematike 2022.u Zagrebu

[2]Lana Horvat Dmitrović, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva

[3]Mate Puljiz, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva

[4]Ana Žgaljić Keko, Sveučilište u Zagrebu, Fakultet elektrotehnike i računarstva

veznica s drugim područjima i pojmovima, i ukazuje na primjene gradiva. Neke od metoda kojima se izgrađuje potpuna slika koncepta u matematici su: prikaz konteksta problema u kojem se koncept primjenjuje, evokacija i poveznica s već uvedenim konceptima uz pomoć konceptualne mape, vizualizacija, uočavanje sličnosti i razlika s drugim pojmovima, korištenje primjera i kontraprimjera, identifikacija uobičajenih miskoncepcija i promišljanje o njima te, konačno, primjeri korištenja matematičkog koncepta u inženjerstvu ([7]).

Ovaj rad organiziramo na sljedeći način. U 1. poglavlju uvest ćemo pojam slike koncepta te objasniti konceptualni pristup nastavi. Nakon toga, u 2. poglavlju objasnit ćemo neke od metoda konceptualnog poučavanja kojima možemo proširiti sliku koncepta usmjerene derivacije. Posebnu važnost dajemo poveznicama s već usvojenim konceptima. Alati poput konceptualnih mapa i ciljanih pitanja pomažu u stvaranju slike koncepta te ćemo ih za pojam usmjerene derivacije pojasniti u poglavlju 3.

1. Konceptualni pristup poučavanju

U poučavanju matematike najčešće se primjenjuju dva pristupa: proceduralni i konceptualni. Proceduralni pristup poučavanju usmjeren je na simboličko i numeričko računanje, upotrebu određenih pravila, algoritama, formula i simbola. Budući da studenti na tehničkim fakultetima moraju biti sposobni računati, dugo je prevladavalo uvjerenje da je to jedini potreban oblik matematičkog znanja. No, u današnjem tehnološki razvijenom inženjerstvu same vještine računanja gube na važnosti.

Drugi pristup, odnosno konceptualno poučavanje, posebnu važnost pridaje poveznici između verbalnih i vizualnih sadržaja, poveznici s već usvojenim konceptima, interpretaciji formalnih matematičkih izraza te primjeni koncepata u različitim kontekstima. Takav način poučavanja pomaže nam da izgradimo i razumijemo potpunu sliku koncepta, te da taj koncept lakše primijenimo i prepoznamo u drugim područjima struke.

No, što je uopće koncept? Za početak, ne postoji šablona niti kruta formalna definicija koncepta. Koncept je nešto što učimo prepoznati iskustvom, iz različitih perspektiva i u različitim kontekstima. U sklopu konceptualnog poučavanja stalno tražimo odgovore na pitanje „Zašto?”, ali i na pitanje „Kako?”, budući da moramo koristiti koncepte i u nekim proceduralnim vještinama. Proces usvajanja određenog koncepta, odnosno širenja slike koncepta, sastoji se od prisjećanja poznatih i saznavanja novih informacija o konceptu te njihovog povezivanja i strukturiranja u smislenu cjelinu.

Kao što je navedeno u [7], slika koncepta predstavlja sveobuhvatnu kognitivnu strukturu koja je pridružena određenom konceptu, te uključuje sve mentalne slike i pripadna svojstva i procese (vidi također [5]). Slika koncepta sadrži i sve veze i odnose s drugim konceptima u matematici i primjeni. Dakle, sliku pojedinog koncepta gradimo iskustvom i novim saznanjima, a možemo je i formalno vizualizirati pomoću tzv. konceptualne mape.

Napomenimo samo da problemi koji se javljaju u usvajanju određenog koncepta mogu biti pogrešno stvorena slika koncepta, te zablude u vezama s drugim konceptima. Prilikom konceptualnog poučavanja moramo biti svjesni zabluda koje se mogu javiti u studentskom usvajanju gradiva, te usmjeriti svoje poučavanje da se izbjegnu pogrešno stvorene slike koncepta.

1.1. Proceduralni pristup u uvođenju usmjerene derivacije

U sklopu proceduralnog pristupa orijentiranog na iznošenje definicija i način računanja, mogli bismo započeti s definicijom usmjerene derivacije prikazanom na Slici 1.

Definicija

Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. **Usmjerena derivacija funkcije f iz točke T_0** s radijvektorom $\vec{\mathbf{x}}_0$ u smjeru vektora $\vec{\mathbf{v}}$ definira se formulom

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}}(\vec{\mathbf{x}}_0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(\vec{\mathbf{x}}_0 + s\vec{\mathbf{v}}_0) - f(\vec{\mathbf{x}}_0)}{s},$$

gdje je jedinični vektor u smjeru vektora $\vec{\mathbf{v}}$ definiran s

$$\vec{\mathbf{v}}_0 = \frac{\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|},$$

ukoliko gornji limes postoji i konačan je.

Slika 1. Definicija usmjerene derivacije

Nakon toga, mogli bismo navesti teorem o računanju usmjerene derivacije prikazan na Slici 2.

Neka je $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferencijabilna u $\vec{\mathbf{x}}_0$ i neka je zadan vektor $\vec{\mathbf{v}}$, te neka je $\vec{\mathbf{v}}_0 = \frac{\vec{\mathbf{v}}}{\|\vec{\mathbf{v}}\|}$. Tada vrijedi:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}}(\vec{\mathbf{x}}_0) = \nabla f(\vec{\mathbf{x}}_0) \cdot \vec{\mathbf{v}}_0$$

Slika 2. Računanje usmjerene derivacije

Rezultat ovakvog načina poučavanja mogla bi biti sljedeća slika koncepta (vidi Sliku 3).

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\left(\vec{x_0}\right) = \nabla f\left(\vec{x_0}\right) \cdot v_0$$

Slika 3. Moguća slika koncepta usmjerene derivacije

Naravno, u ovakvoj slici koncepta znamo kako računati usmjerenu derivaciju u smjeru određenog vektora u danoj točki, ali ne znamo što je to usmjerena derivacija niti koja je njezina primjena, koja je njezina veza s već usvojenim pojmovima i slično. Stoga ćemo u sljedećem poglavlju objasniti konceptualni pristup poučavanju usmjerene derivacije i načine kojima možemo proširiti sliku usmjerene derivacije.

2. Širenje slike koncepta usmjerene derivacije

Općenite metode koje se koriste u stvaranju i širenju slike pojedinog koncepta su povezivanje s drugim konceptima te primjena u različitim kontekstima. Neki od alata kojima se to postiže su: motivacijski primjeri, alati vizualizacije, grafički prikazi, konceptualne mape i primjeri primjena. Osim toga, kako bi se izbjeglo stvaranje čestih zabluda (miskoncepcija), dobro je koristiti kvalitetne primjere i protuprimjere te ciljana pitanja.

Sada ćemo na primjeru usmjerene derivacije pokazati neke od ovih metoda. Pri prikazu, ograničit ćemo se na funkciju s **dvodimenzionalnom** domenom budući da nam je za to dostupna vizualizacija. Navedeni rezultati lako se poopćuju na slučaj više dimenzija.

2.1. Motivacijski primjer

U sklopu konceptualnog poučavanja poželjno je određeni koncept uvesti motivacijskim primjerom. Motivacijske primjere biramo na način da su lako razumljivi te da za njihovo shvaćanje nije potrebno određeno predznanje. Ovakvi primjeri predstavljaju probleme lako shvatljive u svakodnevnom životu ili u struci (vidi [3]). Potrebno je naglasiti da u sklopu matematičkih kolegija na prvoj godini studija motivacijski primjeri ne smiju biti orijentirani na nešto o čemu će studenti tek učiti. Jedan motivacijski primjer vezan za poučavanje usmjerene derivacije dan je na Slici 4.

Pitanje

Planinar šeće planinom koja je oblika plohe $z = f(x, y)$. Pretpostavimo da se trenutno zaustavio u točki $T(1, 0, z_0)$.

- a) Koja je njegova trenutna nadmorska visina?
- b) U kojem smjeru se nalazi najstrmiji uspon?
- c) U kojem smjeru se mora kretati ako želi ostati na istoj nadmorskoj visini?
- d) Što podrazumijevamo pod pojmom smjera?

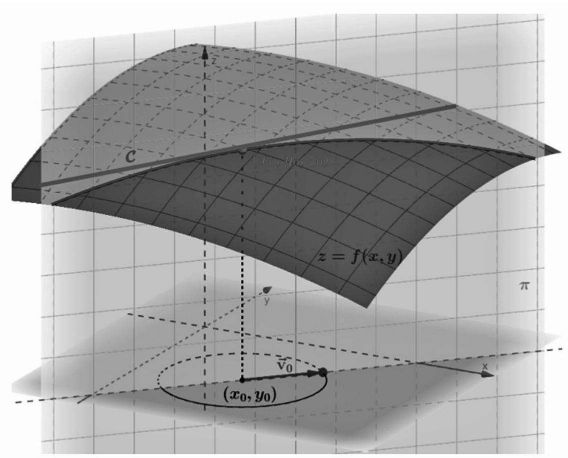
Slika 4. Motivacijski primjer za uvođenje usmjerene derivacije

U sklopu lekcije o usmjerenoj derivaciji, ovakvim se pitanjima kod studenata može potaknuti primjerice promišljanje o tome što ćemo podrazumijevati pod pojmom smjera. Hoće li to biti dvodimenzionalni ili trodimenzionalni vektor? Dimenzija vektora smjera u uvođenju pojma usmjerene derivacije česta je miskoncepcija na koju nailazimo kod studenata. Budući da je treća komponenta trodimenzionalnog vektora u smjeru kojeg bi se planinar trebao gibati po planini određena samim izgledom funkcije, smjer u kontekstu uvođenja usmjerene derivacije bit će dvodimenzionalni vektor.

Također, uvođenjem daljnjeg propitivanja može se studente navesti na promišljanje što bi moglo predstavljati brzinu promjene funkcije u danom određenom smjeru. Promjena funkcije u određenom smjeru vodi nas na vizualizaciju (vidi [1], [9], [10]) koja nam uvelike pomaže u uvođenju interpretacije, kao i formalne definicije usmjerene derivacije.

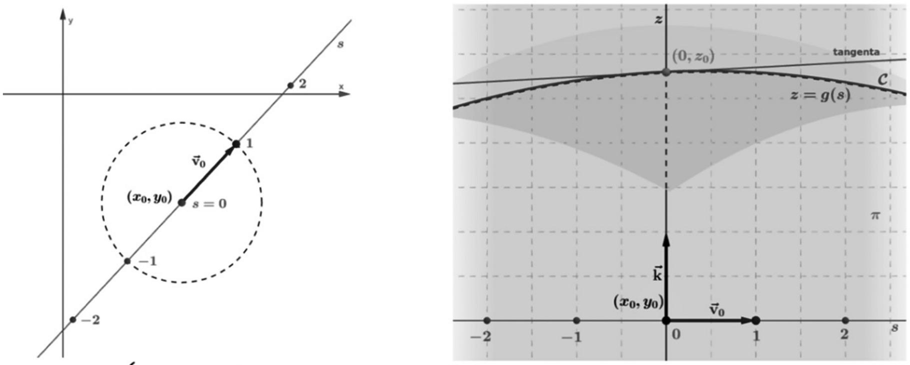
2.2. Vizualizacija i uvod u definiciju

U ovom ćemo potpoglavlju prikazati kako možemo doći do interpretacije i formalne definicije usmjerene derivacije funkcije u točki u smjeru zadanog dvodimenzijskog vektora pomoću grafičkih prikaza. Vizualizacija se odnosi prvenstveno na krivulju koju dobijemo u presjeku s ravninom određenom jediničnim vektorom smjera $\vec{v}_0$ i vektorom $\vec{k}$ kao što je to prikazano na Slici 5.



Slika 5. Krivulja u presjeku grafa funkcije i ravnine

Pokazujući ovakvu sliku (Slika 5.) možemo samu geometrijsku interpretaciju usmjerene derivacije povezati s geometrijskom interpretacijom obične derivacije realne funkcije jedne realne varijable.



$$s\text{-os} \ldots \begin{cases} x &= x_0 + s\, v_{01} \\ y &= y_0 + s\, v_{02} \end{cases}$$

$$z = g(s) = f(x_0 + s \cdot v_{01}, y_0 + s \cdot v_{02})$$

Slika 6. Uvođenje s-osi

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}}(x_0, y_0) \overset{\text{def}}{=} g'(0)$$

Prisjetimo li se da derivacija realne funkcije jedne varijable govori o promjeni funkcije iz dane točke i predstavlja koeficijent smjera tangente u toj točki, možemo zaključiti da usmjerena derivacija u danoj točki (u smjeru zadanog vektora) govori o promjeni funkcije u danoj točki u određenom smjeru. Uvođenjem s-osi, kao što je to prikazano na Slici 6., usmjerenu derivaciju možemo uvesti kao derivaciju funkcije jedne varijable. Ovakvim uvođenjem čuvaju se i svojstva obične derivacije, pa možemo primjerice govoriti o rastu, odnosno padu funkcije iz točke u određenom smjeru i slično.

U konceptualnom pristupu poučavanju poželjno je izbjegavati stroge matematičke definicije bez prikladnog uvoda u njih. Vrlo je važno poticati studente da uz pomoć već poznatih pojmova sami dospiju do zapisa formalne definicije. Time će je u potpunosti razumjeti i ona neće biti samo „vizualna slika" koja se „uči napamet".

Nakon vizualizacije je, koristeći poveznicu s već naučenim pojmom derivacije, kao i poznavanjem interpretacije derivacije realne funkcije realne varijable, prikladno uvesti i formalnu definiciju usmjerene derivacije u točki, kao i formulu za njezino računanje.

2.3. Poveznica s već uvedenim pojmovima

Neka pitanja koja mogu biti korisna u uvođenju usmjerene derivacije pomoću vizualizacija prikazanih na Slikama 5. i 6. su:

- Kako možemo zapisati $g(s)$?
- Koja je geometrijska interpretacija $g'(0)$?
- Što nam govori o rastu, o padu u zadanom smjeru?
- Kako još možemo izračunati $g'(0)$? Koje pravilo možemo koristiti?
- Što bi bila formalna definicija usmjerene derivacije?

Općenito, Slikama 5. i 6. te navedenim pitanjima stvara se poveznica između pojma usmjerene derivacije i derivacije funkcije jedne varijable, pa možemo uvesti i formalno definiciju na način prikazan na Slici 7.

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \vec{\mathbf{v}}}(x_0, y_0) :=& g'(0) = \lim_{s\to 0}\frac{g(s)-g(0)}{s}\\ &= \lim_{s\to 0}\frac{f(x_0+sv_{01}, y_0+sv_{02})-f(x_0,y_0)}{s}\end{aligned}$$

Slika 7. Uvođenje definicije usmjerene derivacije

Nakon ovako uvedene usmjerene derivacije u točki, koristeći lančano pravilo (slučaj jedne nezavisne varijable) vrlo lako dolazimo do formule koju koristimo za njezino računanje, a prikazana je na Slici 2., odnosno do slike koncepta koju bismo dobili proceduralnim pristupom. No ipak, možemo se složiti da sada već o usmjerenoj derivaciji znamo mnogo više nego da smo naučili samo navedenu formulu.

Nadalje, ovakvim se pristupom koriste već naučene činjenice: znamo u kojem slučaju funkcija iz točke raste ili pada u određenom smjeru, odnosno da negativna usmjerena derivacija znači pad, dok pozitivna znači rast funkcije iz točke u određenom smjeru. Fizikalna interpretacija derivacije funkcije jedne varijable također se nasljeđuje.

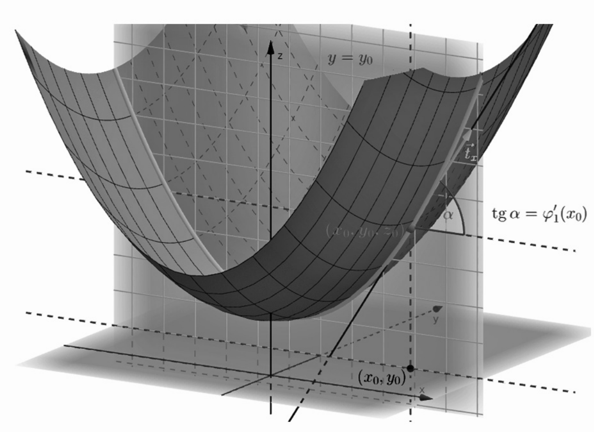
U sklopu poveznice s drugim pojmovima bitno je napomenuti da pojam usmjerene derivacije generalizira pojam parcijalnih derivacija koje se u sklopu matematičkih kolegija tradicionalno uvode prije same usmjerene derivacije. Dakle, ako za vektor smjera odaberemo vektor $\vec{i}$, imamo da je

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{i}}\left(x_0, y_0\right) = \frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0, y_0\right),$$

te ako za vektor smjera odaberemo $\vec{j}$, imamo

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{j}}\left(x_0, y_0\right) = \frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0, y_0\right).$$

Sve to možemo i vizualno prikazati prisjećajući se primjerice načina na koji smo uvodili parcijalnu derivaciju po varijabli x (vidi Sliku 8.).

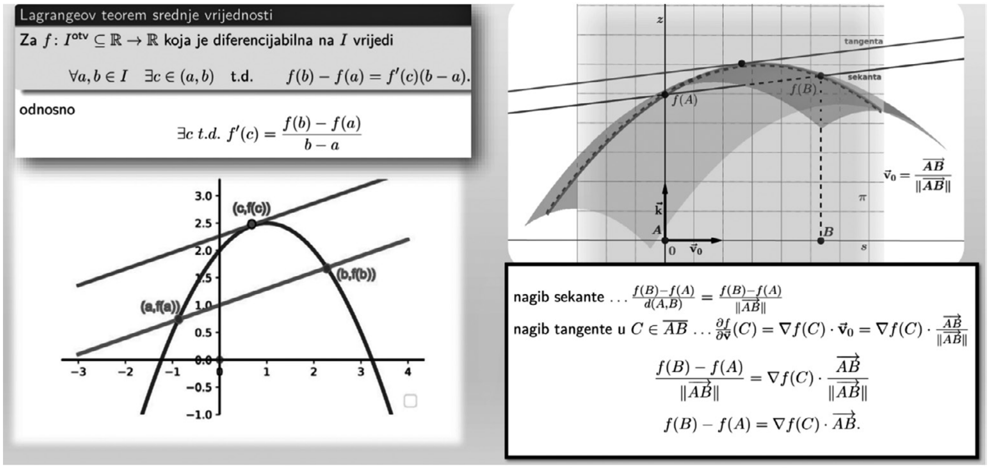


Slika 8. Uvođenje parcijalne derivacije po varijabli x

U sljedećem potpoglavlju pokazat ćemo poveznicu s Lagrangeovim teoremom srednje vrijednosti u jednoj dimenziji. Budući da smo usmjerenu derivaciju u točki povezali s derivacijom funkcije jedne realne varijable, u formiranju teorema srednje vrijednosti možemo iskoristiti već uveden Lagrangeov teorem srednje vrijednosti koji se obrađuje u sklopu diferencijalnog računa funkcija jedne varijable.

2.4. Generalizacija teorema srednje vrijednosti

Pretpostavimo da smo Lagrangeov teorem srednje vrijednosti u sklopu gradiva diferencijalnog računa funkcije jedne varijable interpretirali geometrijski.



Slika 9. Generalizacija teorema srednje vrijednosti

Pod geometrijskom interpretacijom podrazumijevamo prikaz na Slici 9. lijevo, odnosno interpretacija je da u intervalu (a,b) postoji točka c u kojoj je tangenta paralelna sekanti. Isto možemo zapisati i u dvodimenzionalnom slučaju ([10]).

Kao što je to prikazano na Slici 5., možemo pogledati ravninu određenu vektorom $\overrightarrow{v_0}$ (jedinični vektor koji gleda u smjeru vektora $\overrightarrow{AB}$) i vektorom $\vec{k}$, te dobivenu krivulju u presjeku. Sada možemo iskoristiti poveznicu s Lagrangeovim teoremom u jednoj dimenziji i zaključiti da uz određene uvjete na funkciju mora postojati točka C koja se nalazi na spojnici točaka A i B, u kojoj je nagib tangente jednak nagibu sekante. Nagib tangente je upravo usmjerena derivacija u točki C, a nagib sekante dobivamo kao $\frac{f(B)-f(A)}{\overrightarrow{AB}}$. Sve ove zaključke možemo i vizualizirati pomoću Slike 9.

Prema zapisu na Slici 9. možemo doći do tvrdnje teorema srednje vrijednosti koja ukazuje na to da postoji točka C na spojnici točaka A i B tako da vrijedi

$$f(B) - f(A) = \nabla f(C) \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Naravno, moramo i razmisliti koje uvjete onda funkcija f mora zadovoljavati – svakako mora biti takva da se spojnica točaka nalazi u domeni, te mora biti diferencijabilna na spojnici točaka A i B.

Budući da je usmjerena derivacija vrlo važna u primjenama, u sklopu obrađivanja ovog koncepta potrebno je navesti svojstva usmjerene derivacije koja se koriste u primjenama, stoga je vrlo važno da osim same definicije i interpretacije usmjerene derivacije proširimo još sliku ovog vrlo važnog koncepta.

2.5. Širenje slike usmjerene derivacije korištenjem ciljanih pitanja

Važna svojstva koja možemo dobiti iz same interpretacije usmjerene derivacije su:

- Svojstvo okomitosti gradijenta na nivo-krivulje
- Smjer najbržeg pada i rasta funkcije, što se često koristi u sklopu optimizacijskih metoda.

Kao što smo već naveli, u sklopu konceptualnog poučavanja vrlo je važno studente navesti da sami dospiju do važnih zaključaka koji se vežu uz određeni koncept. U tome možemo koristiti pitanja koja ih navode na zaključke. Pitanja mogu biti formirana u obliku pitanja s višestrukim odabirima ili samo u obliku kratkih pitanja koja vode studente do tvrdnji koje želimo pokazati.

Ciljana pitanja koja možemo koristiti u smislu uvođenja teorema koji govori o okomitosti gradijenta na nivo-krivulje su:

1. Kada se funkcija u određenom smjeru iz točke (x_0, y_0) ne mijenja? Koliko bi trebao biti iznos usmjerene derivacije u tom smjeru?
2. Kako zovemo krivulju koja leži u domeni funkcije, a na kojoj je vrijednost funkcije jednaka danoj konstanti?
3. Što možemo reći o usmjerenoj derivaciji funkcije f iz točke (x_0, y_0) ako gledamo smjer tangencijalan na nivo-krivulju u toj točki?
4. Ako je usmjerena derivacija nula u određenoj točki, u kojem su odnosu gradijent funkcije u toj točki i vektor smjera?

Ovakvim uvodom u tvrdnju studente lako navodimo na zaključak da je vektor gradijenta funkcije u danoj točki okomit na nivo-krivulju u istoj točki.

Želimo li pak izvesti zaključke o smjeru najbržeg pada ili rasta funkcije, možemo krenuti od same formule za računanje usmjerene derivacije

$$\nabla f\left(x_0, y_0\right)\cdot\overrightarrow{v_0} = \left\|\nabla f\left(x_0, y_0\right)\right\| \left\|\vec{v}_0\right\|\cos\varphi = \left\|\nabla f\left(x_0, y_0\right)\right\|\cos\varphi,$$

gdje je φ kut među vektorima $\nabla f\left(x_0, y_0\right)$ i $\overrightarrow{v_0}$.

Ciljana pitanja koja možemo koristiti u određivanju smjera najbržeg pada i rasta su primjerice:

1. Koju maksimalnu i minimalnu vrijednost usmjerena derivacija u točki (x_0, y_0) može imati?
2. Što možemo odabrati za vektor smjera da dobijemo maksimalnu vrijednost?
3. Što možemo odabrati za vektor smjera da dobijemo minimalnu vrijednost?

Time lako vidimo da funkcija najbrže raste iz određene točke u smjeru vektora gradijenta u toj točki, a najbrže pada u suprotnom smjeru. Time smo dobili odgovor i na pitanje u motivacijskom primjeru – „U kojem smjeru se nalazi najstrmiji uspon” (vidi Sliku 4.).

Tvrdnju da funkcija u određenom smjeru raste ili pada koristimo u sklopu formulacije optimizacijskih metoda koje često koristimo u inženjerskim primjenama.

2.6. Primjene u inženjerstvu

U sklopu konceptualnog poučavanja vrlo je važno navesti i primjene određenog pojma u inženjerstvu. Budući da je sada vrlo popularno područje strojnog učenja koje se primjenjuje u mnogim inženjerskim problemima, a u sklopu kojega je potrebno minimizirati funkciju pogreške, u primjenama u inženjerstvu javljaju se problemi nalaženja točke minimuma funkcije više varijabli na određenom skupu. Od optimizacijskih metoda koje se koriste za traženje minimuma funkcije vrlo je važna metoda gradijentnog spusta. Metoda gradijentnog spusta formulirana je uzimajući u obzir činjenicu da funkcija u danoj točki najbrže pada u smjeru suprotnom smjeru vektora gradijenta u toj točki. Ovime se stvara poveznica s budućim znanjem.

Premda se takvi primjeri na nastavi ne obrađuju u detalje, vrlo su korisni u stvaranju šire slike i davanju smisla određenom konceptu. To možemo kratko obraditi objašnjavanjem metode gradijentnog spusta pomoću prikaza na Slici 10.

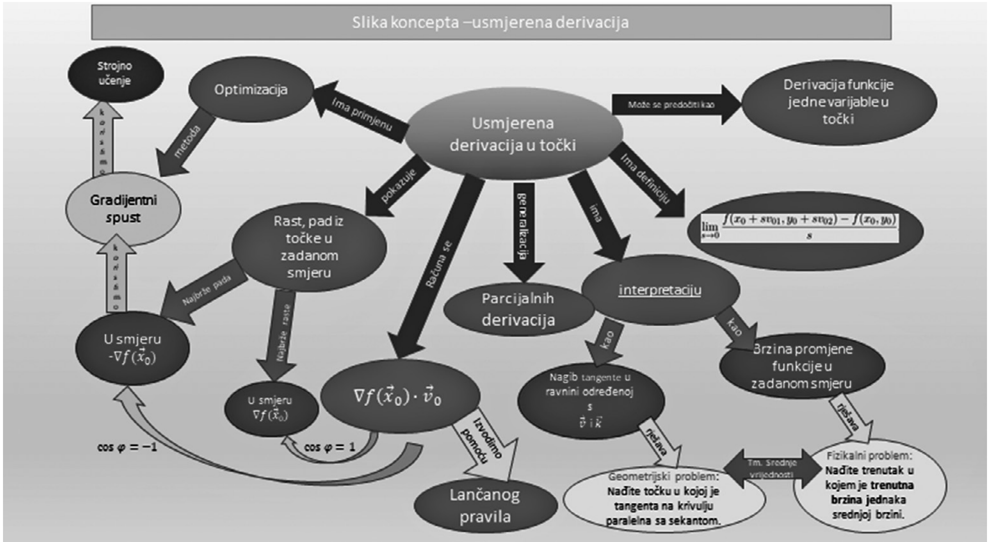
Slika 10. Konstrukcija metode gradijentnog spusta

Uz sva navedena svojstva usmjerene derivacije koja smo naveli, zainteresiranim studentima može se dati i objašnjenje zašto put do točke minimuma u prikazu funkcije pomoću nivo-krivulja (Slika 10. lijevo) izgleda kao cik-cak linija.

3. Mapa koncepta usmjerene derivacije i ciljana pitanja u ispravljanju slike koncepta

3.1. Konceptualne mape

Mapa koncepata ([8]), koje možemo shvatiti kao mentalne slike koncepta, predstavljaju alat za organizaciju i prezentaciju znanja. Temeljene su na povezivanju različitih koncepata i doprinose razumijevanju koncepta koji uvodimo. Detaljnije o konceptualnim mapama može se vidjeti u [7].



Slika 11. Konceptualna mapa usmjerene derivacije

Mapu koncepta kreiramo tako da pojmove ili koncepte postavimo u ovalne oblike, navodeći poveznicu. Primijetili smo da bismo kod proceduralnog načina poučavanja mogli primjerice dobiti mapu kao što je to prikazano na Slici 3. Budući da sliku koncepta možemo vizualizirati pomoću konceptualne mape, uz pomoć metoda konceptualnog poučavanja opisanog u radu, dobili smo puno širu sliku koncepta usmjerene derivacije, koju možemo vizualizirati konceptualnom mapom na Slici 11.

Konceptualne mape korisne su za dubinsko razumijevanje gradiva i prezentaciju znanja. U sklopu konceptualnog poučavanja vrlo su bitne poveznice s drugim konceptima koje nalazimo u samoj mapi.

3.2. Ciljana pitanja

U sklopu konceptualnog poučavanja, osim ispravno stvorene slike koncepta, često nailazimo i na pogrešno stvorenu sliku koncepta. Ako uočimo da je kod studenata stvorena određena slika koncepta koja odudara od one koju smo željeli postići, možemo koristiti ciljana pitanja. Ciljana pitanja koriste se u formi pitanja s višestrukim odabirom ili točno/netočno pitalica. U metodi suradničkog učenja (vidi [5], str. 49) ovakva pitanja koriste se na nastavi u namjeri da provjere razumijevanje koncepta i nastavniku daju povratnu informaciju o znanju studenata, ispravljaju pogrešno stvorene slike koncepta i šire ispravno stvorenu sliku koncepta. Također, ciljana pitanja pogodna su i za nadopunu poučavanja pomoću online platformi kao što je to Moodle sustav. Kao što je navedeno u [6], ova su pitanja posebno kreirana da stimuliraju motivaciju i potiču znatiželju kod studenata, te pomažu studentima da samostalno nadgledaju svoje razumijevanje i jačaju poveznice s već poznatim gradivom. Ovdje možemo dati par primjera ciljanih pitanja prikazanih na Slici 12. i Slici 13.

Pitanje

Ako je ∇f gradijent funkcije $z = f(x,y)$ u točki (a,b), ispitajte istinitost sljedećih tvdnji:

1. $\nabla f(a,b)$ okomit na nivo krivulju $f(x,y) = f(a,b)$

   T N

2. $\nabla f(a,b)$ okomit na plohu $z = f(x,y)$ u točki $(a,b,f(a,b))$.

   T N

3. vektor $f'_x(a,b)\vec{\mathbf{i}} + f'_y(a,b)\vec{\mathbf{j}} - \vec{\mathbf{k}}$ okomit na plohu $z = f(x,y)$ u točki $(a,b,f(a,b))$.

   T N

Slika 12. Točno/netočno ciljana pitanja

Pitanje

Ako stojimo na plohi $f(x,y) = 2x^2 + 5xy^3$ u točki $T(1,1,f(1,1))$, u kojem je smjeru uspon najstrmiji?

(a) $\vec{\mathbf{i}}$
(b) $\vec{\mathbf{j}}$
(c) $-\vec{\mathbf{i}} + \vec{\mathbf{j}}$
(d) $-\vec{\mathbf{i}} - \vec{\mathbf{j}}$

Slika 13. Pitanja odabira

Ciljana pitanja također su od velike važnosti nastavniku jer u sklopu predavanja može dobiti određenu informaciju o tome kako su studenti usvojili gradivo.

Zaključak i diskusija

Na primjeru pojma usmjerene derivacije možemo zaključiti da konceptualno poučavanje potiče dubinsko razumijevanje gradiva te studente motivira na učenje s razumijevanjem, a to je ključno u svladavanju gradiva sveučilišne matematike. Nadalje, vrlo je bitno da nastavnik prilikom uvođenja određenog koncepta ima jasnu sliku koncepta koju mora prenijeti studentima. Posebna pažnja mora biti usmjerena na dobivanje šire slike i povezivanje s drugim konceptima te na česte studentske pogreške i kriva uvjerenja do kojih dolazi kod određenog broja studenata. Važno je uskladiti mjeru koliko duboko razložiti koncept u odnosu na predviđeno vrijeme i važnost samog koncepta. U tu svrhu smatramo da su korisne dodatne online lekcije, vizualizacije, konceptualne mape te ciljana pitanja. Svakako bi u okružju kolegija koji imaju manji broj studenata bilo korisno u sklopu konceptualnog poučavanja primijeniti metode poput preokrenute učionice i suradničkog učenja.

Literatura

1. Burić, T. i ostali, *Matematička analiza 2,* online skripta, FER, 2022.
2. Chappell, K., Killpatrick, K. (2003.). *Effects of concept-based instructions on students' conceptual and procedural knowledge of calculus.* PRIMUS: Problems, Resources and Issues in Mathematics Udergraduate Studies, 13 (1): 17-37
3. El Gaidi, K., Ekholm, T. (2015.) *Contextualizing calculus with everyday examples to enhance conceptual learning.* In: ASEE Annual Conference and Exposition, Conference Proceedings.
4. Engelbrecht, J. , Bergsten, C., Kågesten, O. (2017.). *Conceptual and Procedural Approaches to Mathematics in Engineering Curriculum-Comparing Views of Junior and Senior Engineering Students in Two Countries*. EURASIA Joournal of Mathematics Science and Technology Education 13(3): 533-553.
5. Gusić, M. (2016.). *Uloga nastavnika pri formiranju matematičkih koncepata kod učenika.* Poučak, 17 (67), 4-12.
6. Horvat Dmitrović, L., Žgaljić Keko, A. (2017.). *Primjena metoda aktivnog učenja u poučavanju funkcija više varijabli na tehničkom fakultetu*. Poučak, 18 (70), 46-57
7. Horvat Dmitrović, L., Žgaljić Keko, A.. (2019.): *Poučavanje usmjereno na usvajanje matematičkih pojmova i koncepata*, Poučak, Vol.20, br.78, str. 49-62.
8. J.D. Novak, A.J. Canas, *The Theory of Underlying Concept Maps and How to Construct and Use Them*, Technical Report IHMC CmapTools 2006-01 Rev 2008-01, Institute for Human and Machine Cognition, 2008. https://doi.org/10.1007/BF00305619
9. https://mathweb.ucsd.edu/~ashenk/Section14_5.pdf, (13. 9. 2022.)
10. https://ocw.mit.edu/courses/18-02sc-multivariable-calculus-fall-2010/, (13. 9. 2022.)