MATEMATIKA IZVAN MATEMATIKE

O kamatnjacima – matematički[1]

Ivo Baras[2], Renata Kožul Blaževski[3]

1. Uvod

Održavajući nastavu iz gospodarske (poslovne) matematike, matematičari se često osjećaju kao da igraju na gostujućem terenu. Iako je matematika samo jedna, ona je tek alat u široj ekonomskoj teoriji koja često, barem u početku, matematičarima nije bliska. Specifičnosti područja doprinosi i to što su pojmovi poput kamate, dekurzivnog zajma ili potrošačkog kredita u stručnoj i javnoj upotrebi, ali su uz to također i pravno regulirani te su na vrlo konkretan način dio svakodnevnog života.

Cilj ovoga rada nije pojašnjavanje ekonomske teorije, pa čak niti njezinih matematičkih osnova jer za to postoje odlični pisani izvori, već jednostavna misaona vježba: kako samostalno povezati, produbiti i modelirati osnovne pojmove iz kamatnog računa oslanjajući se na specifična matematička znanja. Snaga i slabost svake struke u tome je što problemima pristupa na osobit način, stoga je dobro njegovati različite pristupe. Svrha ovoga rada ispunjena je ako čitatelja navede da nastavi promišljati ekonomske (i druge) pojmove u na prvi pogled za njih neuobičajenim kontekstima matematičke analize, linearne algebre, numeričke matematike i slično. U radu je razmatran isključivo složen i dekurzivan obračun kamata, s obzirom na to da je on u praksi daleko najčešći.

2. Složen i dekurzivan obračun kamata

Kamata je naknada koju dužnik plaća vjerovniku za korištenje sredstava posuđenih na neko određeno vrijeme i obračunava se za vremenski interval koji se naziva razdoblje ukamaćivanja ili kapitalizacije. To se realizira tako da se za osnovno (nominalno) vremensko razdoblje zakonski ili ugovorno propiše nominalna kamatna stopa ili kamatnjak, u oznaci p, kao iznos koji će dužnik platiti za svakih 100 posuđenih novčanih jedinica za to osnovno vremensko razdoblje. Osnovno vremensko razdoblje može biti bilo koji vremenski interval, a najčešće je godina dana. Početni iznos naziva se glavnica te se obično označava s C_0. Klasični primjeri dužničkih odnosa su štednja u banci, razne vrste zajmova i kredita ili tržišta vrijednosnih papira.

[1]Predavanje održano na 9. kongresu nastavnika matematike 2022. u Zagrebu
[2]Ivo Baras, Sveučilište u Splitu, Sveučilišni odjel za stručne studije
[3]Renata Kožul Blaževski, Sveučilište u Splitu, Sveučilišni odjel za stručne studije

Dekurzivan obračun znači da se kamata obračunava (i pripisuje glavnici) na kraju razdoblja ukamaćivanja, i to s obzirom na iznos s početka razdoblja ukamaćivanja. Složen obračun kamata znači da dužnik plaća „kamate na kamate". Formula za složeno i dekurzivno ukamaćivanje glavnice C_0 u trajanju od $n \in \mathbb{N}$ osnovnih razdoblja ukamaćivanja glasi

$$C_n = C_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n, \tag{1}$$

a C_n je konačna vrijednost početnog iznosa C_0. Izraz $r = 1+\frac{p}{100}$ naziva se kamatni faktor, tako da se formula (1) može zapisati i u obliku

$$C_n = C_0 r^n. \tag{2}$$

Obračun kamata u slučaju kada $n \notin \mathbb{N}$ ovisi o tome kako je taj slučaj reguliran u ugovoru. Ima situacija kad banka štediši uskrati plaćanje kamata u slučaju da štediša povuče uložena sredstva prije isteka ugovorenog vremena, na primjer kod svojedobno popularnih ugovora o oročenoj (vezanoj) štednji. U drugim situacijama štediši se priznaje određena kamata, ali načini njenog obračuna u praksi mogu varirati.

3. Relativni (proporcionalni) kamatnjak

Razmotrimo slučaj kad je nominalno razdoblje n_1 dulje od razdoblja ukamaćivanja n_2. Izrazi li se oba razdoblja u istim vremenskim jedinicama, u praksi je omjer $m = \frac{n_1}{n_2}$ gotovo uvijek prirodan broj. Primjerice, ako je nominalno razdoblje godina, a ispodnominalno razdoblje ukamaćivanja polugodište, $m = 2$; ako je razdoblje ukamaćivanja kvartal, $m = 4$; a ako je mjesec, $m = 12$. Najjednostavniji način obračuna kamata u tom slučaju doima se najprirodnije: definira se relativni (proporcionalni) kamatnjak kao $p_r = \frac{p}{m}$. Konačna vrijednost glavnice na kraju razdoblja ukamaćivanja n_2 u tom je slučaju

$$C_0\left(1+\frac{p_r}{100}\right) = C_0\left(1+\frac{p}{100m}\right). \tag{3}$$

Ako se postupak ukamaćivanja ponovi m puta, zbog složenog računanja kamata konačna vrijednost glavnice bit će

$$C_0\left(1+\frac{p_r}{100}\right)^m = C_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^m. \tag{4}$$

Iz binomne formule sada slijedi:

$$C_0\left(1+\frac{p_r}{100}\right)^m = C_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^m = C_0\left(1+\frac{p}{100}\right) + C_0\sum_{k=2}^{m}\binom{m}{k}\left(\frac{p}{100m}\right)^k > C_0\left(1+\frac{p}{100}\right), \tag{5}$$

što znači da se za nominalno razdoblje $n_1 = mn_2$ sukcesivnom kapitalizacijom m puta uz primjenu relativnog kamatnjaka dobiva veća konačna vrijednost nego jednokratnim ukamaćivanjem uz primjenu nominalnog kamatnjaka p u trajanju n_1.

Iz matematičke analize poznato je kako je niz $\left(\left(1+\frac{p}{100m}\right)^m, m\in\mathbb{N}\right)$ strogo rastući, te da je

$$\lim_{m\to\infty} C_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^m = C_0 e^{\frac{p}{100}}. \tag{6}$$

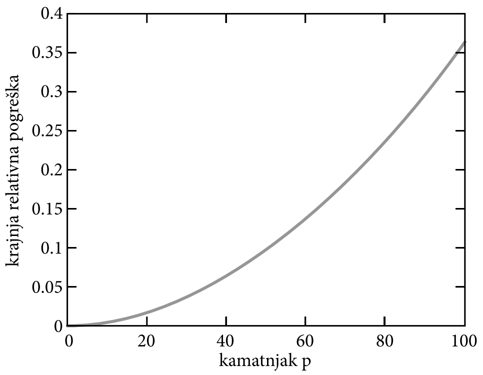
Razlika $C_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^m - C_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$ može se tendenciozno interpretirati kao „apsolutna pogreška" nastala zbog upotrebe relativnog kamatnjaka. S porastom m, ta razlika biva sve veća, pa izrazi (5) i (6) daju njezinu gornju granicu:

$$C_0\sum_{k=2}^{m}\binom{m}{k}\left(\frac{p}{100m}\right)^k = C_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^m - C_0\left(1+\frac{p}{100}\right) < C_0 e^{\frac{p}{100}} - C_0\left(1+\frac{p}{100}\right) =$$
$$= C_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{p}{100}\right)^k - C_0\left(1+\frac{p}{100}\right) = C_0\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{p}{100}\right)^k. \tag{7}$$

Krajnja „relativna pogreška" zbog toga je jednaka

$$\frac{C_0 e^{\frac{p}{100}} - C_0\left(1+\frac{p}{100}\right)}{C_0\left(1+\frac{p}{100}\right)} = \frac{\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{p}{100}\right)^k}{1+\frac{p}{100}} \tag{8}$$

i za različite vrijednosti nominalnog kamatnjaka p prikazana je grafom na Slici 1.



Slika 1. Krajnja „relativna pogreška"

On pokazuje da u stabilnim vremenima, kada su nominalni kamatnjaci p mali, ni razlika $C_0\sum_{k=2}^{m}\binom{m}{k}\left(\frac{p}{100m}\right)^k$ koja nastaje nije velika i u praksi ju je lako zanemariti:

to je razlog što su proporcionalne kamatne stope još uvijek prisutne u bankarskoj praksi. Treba naglasiti da nema ničeg nelogičnog, nezakonitog ni pogrešnog u takvom ugovornom odnosu – pogrešno je jedino očekivati da će se kombinacijom linearnog i eksponencijalnog obračuna dobivati iste vrijednosti.

Ovo ne znači da neke banke koje su se služile relativnim kamatnjakom to svojevremeno nije iznenadilo, što se može vidjeti iz sljedećeg primjera.

APSURDNO, ALI ISTINITO

Kraća štednja, veća zarada!

Višekratnim oročavanjem dinara na tri mjeseca uz kamatnu stopu od 54 posto godišnje štediša dobiva znatno veću kamatu od one koju bi „zaradio" oročavanjem dinara na godinu ili na dvije godine

Kad su početkom godine inaugurirane nove, dosad rekordno visoke kamatne stope na oročene dinarske uloge stanovništva, nikome, pa ni tvorcima međubankarskog sporazuma kojim su utvrđene nije u oči upao presedan da najveću kamatu – protivno logici i svim dosadašnjim uzancama – banke sada plaćaju na uloge oročene na najkraći rok – onaj od tri mjeseca.

Naizgledno je sve u redu jer na rečene uloge kamata se obračunava po godišnjoj stopi od 54 posto, na dinare oročene godinu dana po stopi od 59, a na uloge vezane dvije godine obračunava se kamata po stopi od 62 posto godišnje. Tako diferencirana stopa načinjena je s očitim naumom da se posebno stimulira oročena štednja na duži rok. Međutim, oni koji su utvrđivali kamatne stope zaboravili su u pomoć prizvati aritmetiku (vjerujući valjda da se u razlikama od pet, tri i osam poena krije dovoljna rezerva) i načinili neoprostivu grešku. Naime, oroči li štediša, pretpostavimo, milijun dinara na tri mjeseca, nakon isteka toga roka imat će 1,135.000 dinara (glavnica plus četvrtina godišnje kamate obračunate po stopi od 54 posto). Ako sve dobivene pare ponovno oroči na jednaki rok, nakon isteka toga drugog tromjesečja raspolagat će sa 1,288.200 starih dinara. Nastavi li raditi isto, nakon trećega tromjesečja raspolagat će sa 1,462.100 dinara, a na koncu godine čak sa 1,659,500 dinara. To znači da će za 69,500 dinara biti „bogatiji" od štediše koji je oročio isti iznos na godinu dana uz kamatnu stopu od 59 posto pa nakon isteka te godine dobio ukupno 1,590.000 dinara!

Nastavi li „tromjesečar" istu rabotu i u narednoj godini, na koncu dvogodišnjeg roka ukupno će raspolagati sa 2,753.900 dinara, dok će onaj s milijunom oročenim na 24 mjeseca ukupno inkasirati „samo" 2,240.000 dinara. Uz razliku što će 620 tisuća (kamatu za prvih 12 mjeseci) dobiti već nakon prve godine, a ostatak od 1,620.000 nakon isteka dvogodišnjeg roka. Spomenuti „dvogodišnjak" može doduše prvu kamatu oročiti na godinu dana pa će nakon 24 mjeseca ukupno raspolagati sa 2,605.800 dinara (1,620.000 plus 985.800 dinara), ali to bi opet za punih 148.100 dinara zaostajalo za inkasom osmostrukog ponavljača tromjesečnih oročavanja. Ubranim iznosom najviše će mu se približiti, naravno, ako se posluži jednakom igrom pa kamatu od prve godine u drugoj oročava četiri puta po tri mjeseca. Tako će doći do konačnog iznosa od 2,648.900 dinara makar će u odnosu na „tromjesečara od početka" i u tom slučaju ostati kraći za 105.000 dinara.

Da bi štediša oročavanjem dinara na tri mjeseca došao do spomenutih iznosa, mora se ponešto i potruditi – banku mu valja posjećivati četiri puta godišnje, i to uvijek u vrijeme isteka prethodnog roka. Jer već zakašnjenje od po nekoliko dana zbog visoke će kamatne stope značajno umanjiti njegov konačni konto.

Na koncu dodajmo još i zanimljivost da nevjerojatno velik broj štediša hrli na bankovne šaltere u uvjerenju da će im se oročeni ulog za tri mjeseca povećati za punih 54 posto. Brkaju dakle ljudi kamatu s godišnjom kamatnom stopom koja je zapravo odnos između glavnice i kamata. No valjda smo dokazali da i četvrtinom očekivanog kamatnog iznosa upornim ponavljanjem tromjesečnog oročavanja stižu do goleme godišnje kamate od gotovo 66 posto!

Slika 2. Članak Slobodne Dalmacije od 24. siječnja 1985.

Izvor: Arhiva Slobodne Dalmacije

Primjer 1. Predavajući poslovnu matematiku, matematičari obično imaju problema s nalaženjem dovoljno jednostavnih, a ilustrativnih primjera „iz života". Evo jednog takvog dobro dokumentiranog primjera. U bankovnom poslovanju u SFRJ sve do druge polovine 1980-ih bilo je uobičajeno relativno obračunavanje kamata: ako je nominalni godišnji kamatnjak bio 12, relativni polugodišnji iznosio bi 6, relativni kvartalni 3, a relativni mjesečni 1. Nastala razlika u konačnim vrijednostima nije bila velika i u praksi ju je bilo lako zanemariti. Međutim, sredinom 80-ih godina prošlog stoljeća, zbog narasle inflacije, Udruženje banaka SFRJ, u namjeri da štedne uloge zadrži u bankama, građanima je ponudilo visoke godišnje kamatnjake od preko 54 posto za oročenu štednju te mogućnost da sredstva oroče i na kraća razdoblja, od pola godine ili tri mjeseca. Preciznije, godišnja kamata za kvartalno oročenje bila je 54 posto, za godišnje 59 posto, a dvogodišnje 62 posto. S obzirom na to da su zbog inflacije plaće bile milijunske, takvi su bili i štedni ulozi, pa su spretni pojedinci brzo uočili kako im se najviše isplati višekratno kvartalno oročenje.

Tako je u Slobodnoj Dalmaciji od 24. siječnja 1985. objavljen članak novinara S. Paparelle. „Apsurdno, ali istinito: kraća štednja, veća zarada" (Slika 2.), u kojemu se opisuje kako bi ulog od 1 000 000 dinara uzastopno oročen četiri puta kvartalno tijekom jedne godine imao konačnu vrijednost od 1 659 523.65 dinara, što je bilo za 69 523.65 dinara više od vrijednosti koja bi se dobila za jednokratno, godišnje oročenje. Ako bi se pak takvo kvartalno oročavanje nastavilo još godinu dana, dobilo bi se čak 514 018.75 dinara više od svote dobivene za dvogodišnje oročenje. Sam članak lijep je primjer istraživačkog novinarstva, a ako se samostalno provjeri novinarova računica, vidi se da je matematički uglavnom ispravna, uz napomenu da je iznose zaokruživao sukladno s tadašnjom bankarskom praksom.

Dok proziva „tvorce međubankarskog sporazuma" za „neoprostivu grešku" i zajedljivo komentira „rabotu tromjesečara", novinar ipak ne uočava da je stvarni korijen „apsurda" u srazu dvaju koncepata: kamatnjak se računao kao kod jednostavnog obračuna kamata (linearno), a ukamaćivanje je bilo složeno (eksponencijalno). U njegovu obranu moramo reći: još manje je toga bila svjesna svita ekonomskih i bankarskih stručnjaka koja to nije predvidjela. Ukazujući na pojavu, novinar je proniknuo u srž jednog od osnovnih ekonomskih koncepata – principa financijske ekvivalencije kapitala: zašto bi jednaki ulozi dvaju štediša uloženi na isto vrijeme imali bitno različite tretmane? U narednim godinama, problem je riješen postupnim prelaskom bankarskog sustava SFRJ na primjenu konformnog obračuna kamata. ■

4. Konformni kamatnjak

Uočivši neželjene pojave razlika u vrijednosti istog kapitala pri različitim dinamikama kapitalizacije, ekonomisti su kao ideal istaknuli princip financijske ekvivalencije kapitala. Prema principu ekvivalencije kapitala, vrijednosti kapitala u određenom trenutku i vrijednosti kapitala u nekom budućem trenutku su ekvivalentne ako je kapitalizirana vrijednost prvog kapitala za promatrano vremensko razdoblje jednaka vrijednosti drugog kapitala, uz pretpostavku da je kamatna stopa fiksna, a kapitalizacija složena (Šego, 2005.).

Kako bi se poštivao taj princip i ujednačile konačne vrijednosti za različite dinamike kapitalizacije, uvodi se konformni kamatnjak p_k, koji se računa iz uvjeta da je konačna vrijednost glavnice na kraju nominalnog razdoblja dobivena njegovom sukcesivnom primjenom $m = \frac{n_1}{n_2} \in \mathbb{N}$ puta jednaka konačnoj vrijednosti glavnice uz jednokratnu primjenu nominalnog kamatnjaka:

$$C_0\left(1+\frac{p_k}{100}\right)^m = C_0\left(1+\frac{p}{100}\right). \tag{9}$$

Iz izraza (8) dobije se da je konformni kamatnjak

$$p_k = 100\left[\left(1+\frac{p}{100}\right)^{\frac{1}{m}} - 1\right] = 100\left(r^{\frac{1}{m}} - 1\right). \tag{10}$$

Jasno je da konformni kamatnjak daje istu konačnu vrijednost u slučaju ispodnominalne, kao i iznadnominalne kapitalizacije, te da ova formula ima smisla za proizvoljan $m > 0$. Nadalje, primjena složenog, dekurzivnog i konformnog računanja kamata omogućava poopćavanje osnovne formule kamatnog računa dane izrazom (3) definiranjem funkcije

$$C(t) = C_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^{t-a} = C_0 r^{t-a}, \tag{11}$$

gdje je $C(t)$ vrijednost glavnice C_0 uložene u trenutku $t = a$, u svakom trenutku $t \geq a$.

Očito je i da konformno računanje kamata zadovoljava princip financijske ekvivalencije kapitala: za $c \in \langle a, b\rangle$ vrijedi $C(b) = C_0 r^{b-a} = C_0 r^{c-a} r^{b-c} = C(c) r^{b-c}$.

5. Neprekidno ukamaćivanje

Udžbenici financijske matematike na ovome mjestu obično spominju formulu za neprekidno ukamaćivanje. „Ukamaćivanje je neprekidno (kontinuirano) ako između dva obračuna kamata i njihovog pribrajanja kapitalu nema vremenskog diskontinuiteta." (Šego, Lukač, 2011.) Formulu za neprekidno ukamaćivanje dobije se reinterpretacijom izraza (6): skraćivanjem razdoblja kapitalizacije uz primjenu proporcionalnog kamatnjaka te prelaskom na graničnu vrijednost ostvaruje se „stalno" ukamaćivanje, a konačna vrijednost glavnice C_0 po isteku nominalnog razdoblja kapitalizacije iznosi $C_0 e^{\frac{p}{100}}$.

Isti udžbenici nadalje navode da neprekidno ukamaćivanje predstavlja model povećanja resursa u prirodi (npr. rast količine drvne mase u nekoj šumi, povećanje stočnog fonda, populacije zečeva i slično). Prema tom modelu, kod „prirodnog" ukamaćivanja kamate se pripisuju glavnici neprestano, uz korištenje relativnog kamatnjaka.

Ako je u nekom trenutku $t = a$ stanje resursa C_0, uz neprekidno ukamaćivanje bi u trenutku $t \geq a$ ukupna količina resursa iznosila $C(t) = C_0 e^{\frac{(t-a)p}{100}}$. Za nominalni kamatnjak p kaže se da predstavlja „prosječni prirast" ili "stopu trenutnog prirasta na razini polaznog razdoblja".

Ovaj model je kontroverzan, i to ne samo zbog dvojbene terminologije i potencijalno problematičnog korištenja relativnog kamatnjaka.

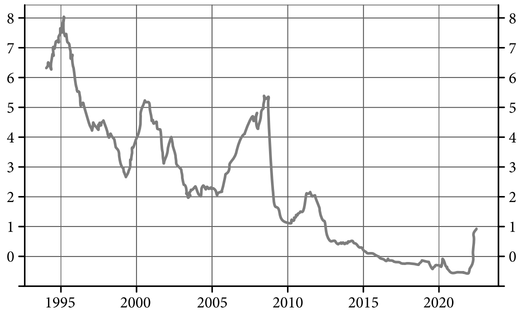
Deriviranjem funkcije $C(t)=C_0 e^{\frac{(t-a)p}{100}}$ uočava se da je ona rješenje inicijalnog problema $\begin{cases} C'(t)=\frac{p}{100}C(t) \\ C(a)=C_0 \end{cases}$, za diferencijalnu jednadžbu jednostavne populacijske dinamike, koja predstavlja vrlo grub model (realno, ni jedna šuma ne raste na takav način). Šumari i biolozi imaju svoje diferencijalne jednadžbe, statističke modele i formule koje su složenije i primjerenije (npr. Chapman – Richardsov ili Schnuteov model rasta).

Uostalom, i konformno ukamaćivanje možemo shvatiti kao neprekidno budući da proizvoljno smanjivanje razdoblja ispodnominalne kapitalizacije pri učestalom kapitaliziranju ne mijenja konačnu vrijednost svote.

Konačno, zbog $C(t)=C_0 e^{\frac{(t-a)p}{100}}=C_0\left[1+\frac{100\left(e^{\frac{p}{100}}-1\right)}{100}\right]^{t-a}$, formula za neprekidno ukamaćivanje ispostavlja se kao specijalan slučaj formule (11) uz pripadni konformni kamatnjak $100\left(e^{\frac{p}{100}}-1\right)$.

6. Varijabilni kamatnjak

Sve tri opisane metode računanja kamata imaju svojih ograničenja, a osnovno je da se u svakom pretpostavlja kako je nominalna kamatna stopa p konstantna. No. ona može biti podložna promjenama, i to vrlo brzim. Primjerice EURIBOR (EURo InterBank Offered Rate) je indeks kamatnih stopa prihvaćenih za međusobno zaduživanje banaka u EU, koji se mijenja na dnevnoj bazi. Ako je kredit ugovoren s promjenjivim kamatnjakom, izračun tog promjenjivog kamatnjaka vezan je i uz kretanje EURIBOR-a. Slika 3. prikazuje kretanje EURIBOR-a u posljednjih dvadesetak godina.



Slika 3. Kretanje EUROIBOR-a u razdoblju od 1995. do 2022. godine
Izvor: European Central Bank – Statistical Data Warehouse

Očito je kako formula (11) za konformno dekurzivno i složeno računanje kamata ima potencijala za poopćavanje na slučaj vremenski promjenjivog nominalnog kamatnjaka $p(t)$. Neka je dakle glavnica C_0 uložena u trenutku $t=a$. Pripadni kamatni faktor je $r(t)=1+\frac{p(t)}{100}$. Kako bi se odredila kapitalizirana vrijednost $C(t)$ za neko $t\geq a$ uz primjenu konformnog kamatnjaka, segment $[a,t]$ podijeli se na m ekvidistantnih podsegmenata $[t_{k-1},t_k]$ širina $h=\frac{t-a}{n}$, gdje je $t_k=a+kh$ i $k=1,2,\ldots,m$. Približna vrijednost glavnice u trenutku t iznosi $C_0 r(t_0)^h r(t_1)^h r(t_2)^h \ldots r(t_{m-1})^h$, a stvarna vrijednost dobije se računanjem granične vrijednosti kada , $C(t)=\lim_{m\to\infty} C_0 r(t_0)^h r(t_1)^h r(t_2)^h \ldots r(t_{m-1})^h$. Budući da je $r(t_0)^h r(t_1)^h \ldots r(t_{m-1})^h = e^{h[\ln r(t_0)+\ln r(t_1)+\ldots+\ln r(t_{m-1})]}$, izraz u eksponentu je integralna suma pa vrijedi $\lim_{m\to\infty} h[\ln r(t_0)+\ln r(t_1)+\ldots+\ln r(t_{m-1})]=\int_a^t \ln r(x)dx$. Strogo matematički, za konvergenciju te integralne sume dovoljno je da funkcija $p(t)$ bude ograničena, po dijelovima neprekidna i s vrijednostima iznad -100 , a to je u praksi uvijek slučaj. Zbog toga konačna vrijednost glavnice C_0 u trenutku $t\geq a$ iznosi

$$C(t)=C_0 e^{\int_a^t \ln r(x)dx}. \tag{12}$$

Odmah se vidi da je formula (12) poopćenje formule (11) ako je kamatnjak fiksni, tj. $p(t)=p=const$ iz formule (12) slijedi formula (11):

$$C(t)=C_0 e^{\int_a^t \ln r(x)dx}=C_0 e^{\int_a^t \ln\left(1+\frac{p}{100}\right)dx}=C_0 e^{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)\int_a^t dx}=C_0 e^{(t-a)\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}=$$
$$=C_0\left(e^{\ln\left(1+\frac{p}{100}\right)}\right)^{t-a}=C_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^{t-a}$$

Neka je $c\in\langle a,b\rangle$. S obzirom na to da je formula (12) izvedena uz primjenu konformnog kamatnjaka, višekratna kapitalizacija ne bi trebala utjecati na konačnu vrijednost glavnice, što se može i provjeriti:

$$C(b)=C_0 e^{\int_a^b \ln r(x)dx}=C_0 e^{\int_a^c \ln r(x)dx+\int_c^b \ln r(x)dx}=C_0 e^{\int_a^c \ln r(x)dx}\cdot e^{\int_c^b \ln r(x)dx}=C(c)\cdot e^{\int_c^b \ln r(x)dx}.$$

Prema tome, formula (12) zaista je u skladu s principom financijske ekvivalencije kapitala.

Budući da očito vrijedi $C'(t)=C(t)\ln r(t)$, funkcija $C(t)$ može se interpretirati kao rješenje inicijalnog problema $\begin{cases} C'(t)=C(t)\ln r(t) \\ C(a)=C_0 \end{cases}$. Ovo je korisno znati s obzirom na to da integral $\int_a^t \ln r(x)dx$ nije uvijek jednostavno (ni moguće) izračunati. U tom slučaju jedna je od opcija traženje dovoljno dobrog približnog rješenja pripadnog početnog problema odgovarajućom numeričkom metodom.

Matematička formulacija omogućava nam da postavimo i logično pitanje: što bi bilo kad bi kamatna stopa bila negativna? Teoretski, i ovo je zamislivo: umjesto da banka isplaćuje kamatu štediši, štediša plaća naknadu banci za čuvanje svog novca i time se njegova glavnica smanjuje. U praksi, ovo se također događa u razdobljima dubokih ekonomskih recesija (pogledati Sliku 3.). Posljednja ograda, kako bi formula (12) još funkcionirala, bila bi da je $p(t) > -100$. No slučaj $p(t) = -100$ realno bi opisivao situaciju kad vam banka zaplijeni ulog, nakon čega i samo ukamaćivanje prestaje.

Primjena formule (12) u različitim situacijama ilustrirana je na primjerima koji slijede. Numerički izračuni i grafovi u tim primjerima rađeni su korištenjem programskog paketa MATLAB.

Primjer 2. Ulog od $C_0 = 10000$ novčanih jedinica kapitaliziran je uz konformno, složeno i dekurzivno ukamaćivanje i nominalni varijabilni kamatnjak $p(t)$. Skicirajte grafove funkcija $p(t)$ i $C(t)$ ako je:

a) $t \in [0,4]$, $p(t) = \begin{cases} 4t+8, & \text{za } 0 \le t < 1 \\ t^2, & \text{za } 1 \le t < 2 \\ 40-8t, & \text{za } 2 \le t \le 4 \end{cases}$

b) $t \in [0,3]$, $p(t) = 30 + 2(t+2)^2 \cos(2t+1)$

c) $t \in [0,6]$, $p(t) = 5 - 4t + 3t^2 - 0.5t^3$

Rješenja. a) Slika 4. prikazuje graf funkcije $p(t)$ na segmentu $[0,4]$.

Pripadni varijabilni kamatni faktor je

$$r(t) = \begin{cases} 1+\dfrac{4t+8}{100} = \dfrac{t+27}{25}, & \text{za } 0 \le t < 1 \\ 1+\dfrac{t^2}{100} = \dfrac{t^2+100}{100}, & \text{za } 1 \le t < 2 \\ 1+\dfrac{40-8t}{100} = \dfrac{35-2t}{25}, & \text{za } 2 \le t \le 4 \end{cases}.$$

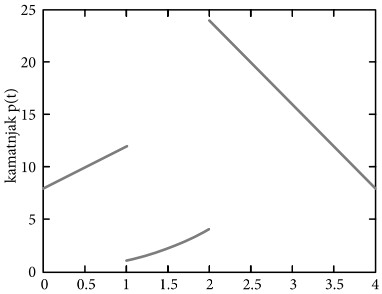
Rješavanjem neodređenih integrala

$$\int \ln\frac{t+27}{25}dt = \text{(parcijalna integracija)} = \ldots = (t+27)\ln\left(\frac{t+27}{25}\right) - t + C,$$

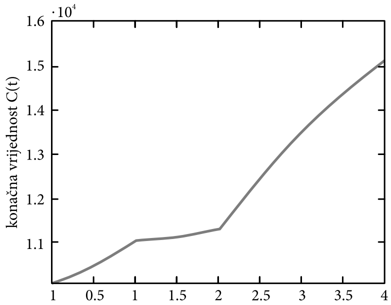
$$\int \ln\frac{t^2+100}{100}dt = \text{(parcijalna integracija)} = \ldots = t\ln\left(\frac{t^2+100}{100e^2}\right) + 20\operatorname{arctg}\frac{t}{10} + C,$$

$$\int \ln\frac{35-2t}{25}dt = \text{(parcijalna integracija)} = \ldots = \left(t-\frac{35}{2}\right)\ln\left(\frac{35-2t}{25}\right) - t + C\,,$$

te uvrštavanjem u formulu (11) dobije se funkcija $C(t)$ čiji je graf prikazan na Slici 5.

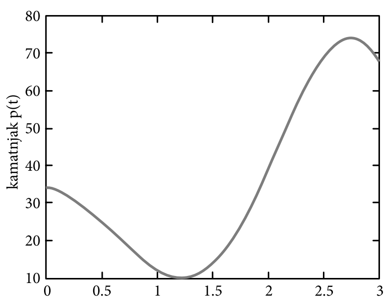


Slika 4. Graf funkcije p(t) iz primjera 4. a)

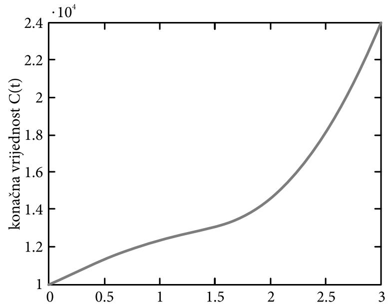


Slika 5. Graf funkcije C(t) iz primjera 4.a)

b) Na Slici 6. prikazan je graf funkcije $p(t)$ na segmentu $[0,3]$. U ovom primjeru integriranje funkcije $\ln\left[1+\frac{p(t)}{100}\right]$ više nije jednostavno kao u primjeru pod a). Umjesto toga može se odrediti približno rješenje diferencijalne jednadžbe $C'(t) = C(t)\ln\left(1+\frac{p(t)}{100}\right)$, uz početni uvjet $C(0) = 10000$. Pri približnom rješavanju toga početnog problema najjednostavnije je koristiti Eulerovu metodu. Međutim, zbog njene nestabilnosti i spore konvergencije odabrana je metoda Runge – Kutta četvrtog reda (RK4). U obje metode, segment na kojem se traži rješenje dijeli se na n ekvidistantnih podsegmenata, u rubovima kojih se računaju približne vrijednosti funkcije $C(t)$ sve dok se ne postigne zadovoljavajuća točnost: aproksimacija rješenja je linearni interpolacijski spline kroz rubne točke. Na Slici 7. prikazan je graf aproksimacije rješenja za $n = 20$.

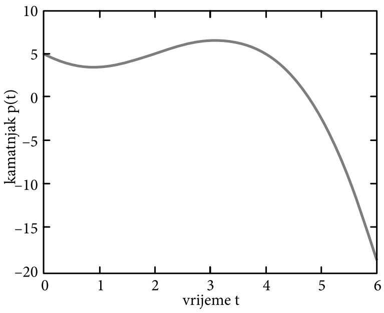


Slika 6. Graf funkcije p(t) iz primjera 4. b)

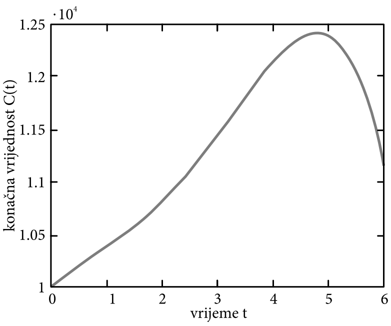


Slika 7. Graf funkcije C(t) iz primjera 4. b)

c) Graf funkcije $p(t)$ na segmentu $[0,6]$ prikazan je na Slici 8. Slično kao u primjeru 4.b) korištenjem RK4 odredi se približno rješenje diferencijalne jednadžbe $C'(t)=C(t)\ln\left(1+\frac{p(t)}{100}\right)$, uz početni uvjet $C(0)=10000$. Na Slici 9. prikazan je graf aproksimacije rješenja za $n=50$. ■



Slika 8. Graf funkcije p(t) iz primjera 4.c)



Slika 9. Graf funkcije C(t) iz primjera 4.c)

7. Zaključak

Ovim radom tek je načet skup tema i smjerova u kojima bi se mogla nastaviti započeta razmatranja, ovisno o mašti, volji i slobodnom vremenu. Primjerice, prilikom izvoda formule (12) kao generalizacije formule (11), uopće nije «pokrivena" situacija u kojoj bi iznos koji se ukamaćuje također bio varijabilan ili kombinacija diskretnog i kontinuiranog slučaja, nisu obrađeni inflatorni utjecaji, razrađene jednostavnije metode za brzo računanje aproksimacija i slično. O tome nekom drugom zgodom.

Literatura:

1. Drmač, Z., et al (2003.): Numerička analiza, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb
2. Šego, B. (2005.): Matematika za ekonomiste, Narodne novine, Zagreb
3. Šego B., Lukač Z. (2011.): Financijska matematika, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb

Web izvori slika:

4. Arhiva Slobodne Dalmacije https://arhiv.slobodnadalmacija.hr/pvpages/pvpages/viewPage/?pv_page_id=36635&pv_issue_no=850124_A (19. 8. 2022.)
5. European Central Bank – Statistical Data Warehouse https://sdw.ecb.europa.eu/quickview.do?SERIES_KEY=143.FM.M.U2.EUR.RT.MM.EURIBOR1YD_.HSTA (19. 8. 2022.)