# Lambertova konformna konusna projekcija

U povodu 250. obljetnice

Miljenko Lapaine[1]

## Uvod

Johann Heinrich Lambert (1728. – 1777.) bio je fizičar, matematičar, astronom i kartograf. Svojim matematičkim istraživanjima obuhvatio je algebru, sfernu trigonometriju i perspektivu. Prvi je dokazao da je π iracionalan broj i prvi se sustavno služio hiperboličkim funkcijama. Posebno je značajno njegovo djelo o teoriji paralelnih pravaca (1766.). U djelu *Photometrie* (1760.) jasno je razlučio pojmove sjaja i rasvjete te tako položio temelje fotometrije. Osim toga, istraživao je lom svjetlosti u atmosferi, zatim staze kometa, i u svezi s tim otkrio nova svojstva konika. U njegovim astronomskim radovima prvi se put govori o dvojnim zvijezdama (Bollmann, Koch 2001, HrvEnc 2021.).

Prema Frischaufu (1905.), početci teorije preslikavanja jedne plohe na drugu pripadaju Lambertu koji se bavio općim problemom preslikavanja sfere i elipsoida u ravninu u poglavlju *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land und Himmelscharten* (Napomene i dodatci uspostavi karata Zemlje i neba), tiskanom u trećem dijelu njegovih *Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung* (Doprinosi upotrebi matematike i njezine primjene, 1772.).

Lambert je bio prvi matematičar koji se bavio općim svojstvima kartografskih projekcija. Prvi je razmatrao svojstva konformnosti i ekvivalentnosti te ukazao na činjenicu da se ta dva svojstva međusobno isključuju. U spomenutom je radu objavio sedam novih kartografskih projekcija kojima nije dao imena, a danas su poznate kao:

1. Lambertova konformna konusna
2. Poprečna Mercatorova
3. Lambertova azimutna ekvivalentna
4. Lagrangeova projekcija
5. Lambertova cilindrična ekvivalentna

[1]Miljenko Lapaine, Geodetski fakultet, Sveučilište u Zagrebu

6. Poprečna cilindrična ekvivalentna
7. Lambertova konusna ekvivalentna

Spomenimo još da se Lambertova funkcija ili Lambertijan definira kao preslikavanje $\mathrm{Lam}:\left(0,\frac{\pi}{2}\right)\longrightarrow\mathbb{R}$,

$$\mathrm{Lam}(\varphi)=\int_0^{\varphi}\frac{dx}{\cos x}=\frac{1}{2}\ln\frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}=\ln\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)=\mathrm{Arsh}(\mathrm{tg}\varphi)=\mathrm{Arth}(\sin\varphi).$$

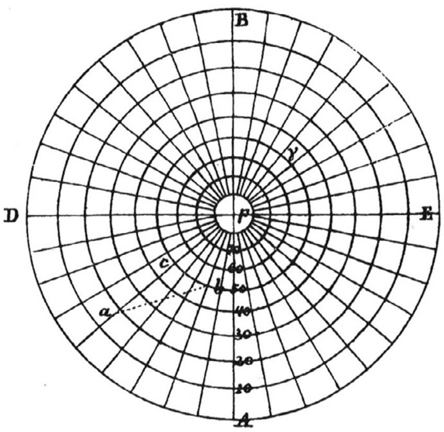
To se preslikavanje pojavljuje u jednadžbama uspravne Mercatorove projekcije (Rickey, Tuchinsky 1980., Lee 1976.).

## Lambertova konformna konusna projekcija

Lambertova konformna konusna projekcija jedna je od najpoznatijih kartografskih projekcija. Upotrebljava se i u današnje doba u mnogim državama. U Hrvatskoj je to službena projekcija za topografske karte sitnijih mjerila.

Tu je projekciju predložio Lambert u svojim *Napomenama i dodatcima uspostavi karata Zemlje i neba* objavljenim prije 250 godina. Poslužit ćemo se njegovim originalnim riječima u prijevodu na hrvatski jezik. Četvrto potpoglavlje nosi naslov *Općenitija metoda prikaza sferne plohe tako da svi kutovi sačuvaju svoje veličine*. To potpoglavlje podijeljeno je dalje na paragrafe i počinje s §47 u kojemu Lambert piše da stereografski prikaz sferne plohe, kao i Mercatorove pomorske karte, imaju svojstvo da svi kutovi zadrže veličinu koju su imali na plohi globusa. To daje najveću sličnost koju može imati proizvoljan lik u ravnini s onim nacrtanim na plohi sfere. Nije se istraživalo pitanje pojavljuje li se to svojstvo samo kod dviju navedenih projekcija ili se od jedne do druge navedene projekcije, čiji su prikazi toliko različiti, može doći pomoću međukoraka. Mercatorova projekcija prikazuje meridijane kao paralelne ravne crte, okomito na ekvator, podijeljene u skladu s logaritmima kotangensa polovina zenitnih daljina (*colatitudes*). Ekvator je podijeljen na 360 jednakih dijelova, koliko ima stupnjeva. Kut između meridijana je dakle = 0 jer su međusobno paralelni. Nasuprot tome, u polarnom slučaju stereografske projekcije, ravnocrtni meridijani sijeku se pod ispravnim kutom (Slika 1.). Prema tome, ako postoje međufaze između tih dviju projekcija, mora ih se tražiti tako da se omogući da presjek

Fig. 3.




*Slika 1. Stereografska projekcija sjeverne hemisfere (Lambert 1772., Fig. 3)*

između meridijana bude proizvoljno veći ili manji od odgovarajuće vrijednosti na sfernoj plohi. To je put kojim ću sad nastaviti.

**§48**

Fig. 8.


*Slika 2. Uz tumačenje konformnog preslikavanja (Labert 1722., Fig. 8)*

Neka je $P$ pol; $PM$, $P\mu$ dva meridijana, a kut $MP\mu$ beskonačno mali (Slika 2.). Točka $M$ ima zenitnu udaljenost $\varepsilon$, a $N$ ima $\varepsilon+d\varepsilon$. Za kut $MP\mu$ upotrijebimo $md\lambda$, gdje je $d\lambda$ razlika geografskih dužina, a $m$ omjer kuta $MP\mu$ i njegove prave veličine. Zahtijevamo sada da vrijedi

$$\mu M : MN = d\lambda \sin\varepsilon : d\varepsilon$$

i trapezoid $\mu$MN$\nu$ da bude sličan onome na sferi koji prikazuje u ravnini. Označimo

$$PM = x$$

$$MN = dx.$$

Tada je

$$M\mu = xmd\lambda\,,$$

odakle je

$$mxd\lambda : dx = d\lambda \sin\varepsilon : d\varepsilon.$$

Odatle slijedi

$$\frac{dx}{x} = \frac{md\varepsilon}{\sin\varepsilon}$$

i

$$\ln x = m \ln \tan \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Konstantu integracije možemo ispustiti pa će onda biti $x = 1$ kad je $\varepsilon = 90°$, bez obzira na to kolika je vrijednost od $m$. Prema tome, $x = \left(\tan\frac{1}{2}\varepsilon\right)^m$.

**§49**

Ako se stavi $m$ = 1, onda je $x = \tan\frac{1}{2}\varepsilon$, što je slučaj stereografske projekcije.

### *§50*

Za Mercatorovu projekciju je $m = 0$. To daje samo $x = 1$. No, možemo staviti $\varepsilon = 90° - p$ i tada je

$$x = \left[\tan\left(45° - \frac{1}{2}p\right)\right]^m = \left(\frac{1 - \tan\frac{1}{2}p}{1 + \tan\frac{1}{2}p}\right)^m ,$$

što daje

$$x = \left(1 - m\tan\frac{1}{2}p + m\frac{m-1}{2}\tan^2\frac{1}{2}p - \ldots\right)\left(1 - m\tan\frac{1}{2}p + m\frac{m+1}{2}\tan^2\frac{1}{2}p - \ldots\right) ,$$

tako da se za $m = 0$ dobije

$$\frac{1-x}{2m} = \tan\frac{1}{2}p + \frac{1}{3}\tan^3\frac{1}{2}p + \frac{1}{5}\tan^5\frac{1}{2}p + \frac{1}{7}\tan^7\frac{1}{2}p + \ \ldots\ = \frac{1}{2}\ln\cot\frac{1}{2}\varepsilon .$$

Ovdje $\frac{1-x}{m}$ prikazuje stupnjeve izračunane od ekvatora i oni se povećavaju proporcionalno s $\ln\cot\frac{1}{2}\varepsilon$.

### *§51*

Izbor od $m$ u općoj formuli

$$x = \left(\tan\frac{1}{2}\varepsilon\right)^m$$

je proizvoljan, tako da možemo zadati dodatni uvjet. U trapezoidu $\mu$MN$\nu$ sa Slike 2. odnos $N\nu$ prema $MN$ kao i $\mu$M prema $MN$ treba biti kao na sferi. To se ne može postići za sve geografske širine, ali se može odrediti za pojedinu visinu iznad ekvatora $E$. Sada je

$$N\nu = md\lambda(x + dx)$$

i taj luk na sferi je

$$d\lambda\sin(\varepsilon + d\varepsilon) = d\lambda(\sin\varepsilon + \cos\varepsilon d\varepsilon).$$

To daje

$$d\varepsilon : dx = d\lambda(\sin\varepsilon + \cos\varepsilon d\varepsilon) : md\lambda(x + dx).$$

Odatle slijedi

$$d\varepsilon \cdot m(x + dx) = dx\sin\varepsilon + dx\cos\varepsilon d\varepsilon$$

$$\frac{mx}{dx} + m = \frac{\sin\varepsilon}{d\varepsilon} + \cos\varepsilon .$$

Iz §48

$$\frac{mx}{dx} = \frac{\sin\varepsilon}{d\varepsilon}$$

ili

$$\frac{\sin\varepsilon}{d\varepsilon} + m = \frac{\sin\varepsilon}{d\varepsilon} + \cos\varepsilon\ ,$$

što daje

$$m = \cos\varepsilon$$

pa je za specifičnu visinu $E$ iznad ekvatora

$$m = \cos E.$$

Prema tome, formula

$$x = \left(\tan\frac{1}{2}\varepsilon\right)^{\cos E}$$

u obliku je koji trapezoid $\mu$MN$\nu$ čini sličnim njegovoj slici na sferi na visini $E$ iznad ekvatora. Proporcionalnost linija na sferi ne vrijedi samo za $\mu$M prema $MN$, nego također za $N\nu$.

### *§52*

Ta proporcionalnost vrijedi točno samo na visini $E$ iznad ekvatora, a udaljavanjem od te visine, koliko god malo na obje strane, ona se mijenja; drugim riječima, na toj je visini minimum. Kao posljedica, ako bi netko npr. želio konstruirati kartu Europe, visina $E$ iznad ekvatora trebala bi biti odabrana kao srednja širina za Europu. $E$ bi dakle bilo oko 40°. Pogodno je uzeti

$$E = 41°24'35''$$

jer je tada

$$\cos E = \frac{3}{4}.$$

Za kartu Europe formula postaje

$$\log x = \frac{3}{4}\log\tan\frac{1}{2}\varepsilon.$$

To daje

| $\varepsilon$ | $x$ | Diff. |
|---|---|---|
| 10 | 0,16 087 | 0,16 087 |
| 20 | 0,27 211 | 0,11 124 |
| 30 | 0,37 243 | 0,10 032 |
| 40 | 0,46 860 | 0,09 617 |
| 50 | 0,56 429 | 0,09 569 |
| 60 | 0,66 234 | 0,09 805 |
| 70 | 0,76 546 | 0,10 312 |
| 80 | 0,87 672 | 0,11 126 |
| 90 | 1,00 000 | 0,12 328 |

Jasno je da karta Europe zahtijeva samo vrijednosti od 20° do 60°. Budući da je $m = \cos E = \frac{3}{4}$, stupnjevi geografske dužine smanjeni su za $\frac{1}{4}$, tako 30 stupnjeva na karti prikazuje 40 stupnjeva geografske dužine. Karta je na Slici 3.

Fig. 9.

*Slika 3. Karta Europe u Lambertovoj konusnoj projekciji (Lambert 1772., Fig. 9)*

**§53**

Vrijednost za $m$ može se također odrediti tako da se uzduž dviju paralela postigne točna proporcionalnost. Neka dvije paralele imaju zenitne daljine (komplemente geografskim širinama) $a$ i $b$. Tada je prema uvjetu nužno da bude

$$\left(\tan\frac{1}{2}a\right)^m : \left(\tan\frac{1}{2}b\right)^m = \sin a : \sin b.$$

Odatle slijedi

$$m = \frac{\log\sin a - \log\sin b}{\log\tan\frac{1}{2}a - \log\tan\frac{1}{2}b}.$$

**§54**

Za slučaj Europe, primjerice, mogu se uzeti visine iznad ekvatora $a$ = 60° i $b$ = 20°. Dobije se

$$m = 0{,}78327.$$

To je vrijednost od cos 38°26'. Prema tome, $E$ = 38°26'.

Može se izabrati ta vrijednost za $E$, a jasno je da uvjet koji je ovdje specificiran i prethodni uvjet (§51) mogu biti istodobno zadovoljeni. Dakle, može se izabrati $E$ i zatim za bilo koju zenitnu širinu $a$ izračunati $b$ tako da uzduž obje paralele proporcije budu točne. Na primjer, ako se uzme kao prije (§52)

$$\cos E = \frac{3}{4}$$

i pretpostavi $a$ = 60°, dobit će se $b$ = 24°56'. Može se provjeriti da je $m = \frac{3}{4}$.

***§55***

Ako netko želi zadati $m$ = 1, kao što je slučaj kod stereografske projekcije, ili $m$ = 0, kao što je na Mercatorovim pomorskim kartama, tada će u oba slučaja dobiti $a$ = $b$. Prema tome, ne postoje dvije različite paralele koje imaju isti odnos kao na sferi za te dvije metode prikaza. Bez obzira na to, postoji beskonačno mnogo takvih projekcija čim je $m$ između 0 i 1.

***§56***

Ako se pretpostavi da je $m$ < 1, tada su stupnjevi geografske dužine reducirani u omjeru 1 prema $m$, i samo 360 $m$ stupnjeva kružnice potrebno je za prikaz 360 stupnjeva geografske dužine. Ako se uzme, npr. kao prije, $m = \frac{3}{4}$, tada je potreban samo isječak od 270 stupnjeva da bi se prikazalo 360 stupnjeva geografske dužine. Ako je potrebno prikazati cijelu sjevernu ili južnu hemisferu, i početak se treba spojiti s krajem, tada se isječak od 270 stupnjeva može saviti u konus. To će dati konusni globus na kakvom je već dugo uobičajeno prikazivanje hemisfere nebeskoga svoda. Ovdje smo došli do takvog prikaza kod kojeg svi kutovi zadržavaju svoje prave vrijednosti, i prema tome slike zvijezda imaju najveću moguću sličnost s nebom. Dobro poznati Zimmermannovi zvjezdani konusi nemaju to svojstvo. Tamo je isječak 300 stupnjeva i meridijani su podijeljeni na 90 jednakih dijelova, što čini 10 stupnjeva ekvatora jednakim 13 stupnjeva meridijana, tako da duljine širina nisu proporcionalne geografskim dužinama.

***§57***

Za svaki zvjezdani konus vrijednost od $m$ u formuli

$$x = \left(\tan\frac{1}{2}\varepsilon\right)^m$$

podjednako je upotrebljiv i može se izabrati tako da zadovoljava posebne uvjete. Postavimo npr. zahtjev da prvih 45° bude jednako onima koje slijede, tako da 45. paralela na zvjezdanom konusu dijeli meridijan na dva jednaka dijela. Prema tom uvjetu je $x = \frac{1}{2}$ kad je $\varepsilon$ = 45°, pa iz

$$\frac{1}{2} = \left(\tan 22\frac{1}{2}^\circ\right)$$

slijedi

$$m=\frac{\log 2}{\log\tan 67\frac{1}{2}°}=0,78643$$

umjesto čega, budući da male razlike nisu vrijedne razmatranja, i za pogodnije računanje može se uzeti $m=\frac{4}{5}$ ili, kao u prehodnom slučaju, $m=\frac{3}{4}$, ovisno o tome želi li se da konus bude više ili manje plosnat. Ako netko želi jednaku spljoštenost kao što je Zimmermannova, tada je nužno uzeti $m=\frac{5}{6}$.

## Dodatak

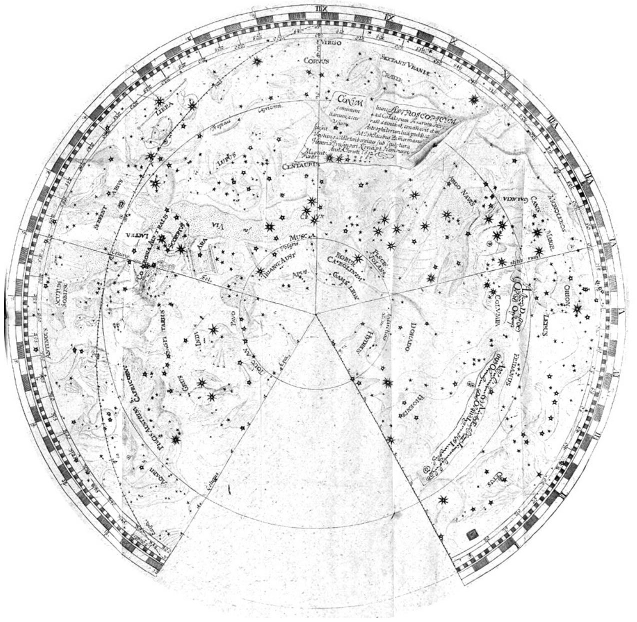
Lambertova tvrdnja iz posljednje rečenice u §56 nije sasvim očita, pa ćemo je provjeriti. Neka je $R$ polumjer sfere. U polarnom koordinatnom sustavu $x,\delta$ jednadžbe uspravne ekvidistantne konusne projekcije sjeverne hemisfere glase u Lambertovim oznakama

$$x = R\varepsilon, \delta = \mathrm{m}\lambda,$$

gdje je $\varepsilon$ komplement geografske širine $\varphi$, $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $\lambda$ geografska dužina, $\lambda\in[0,2\pi]$, a $m$ parametar, $0<m<1$. Uzmimo da je $m=\frac{5}{6}$. Duljina luka meridijana od ekvatora do pola u toj projekciji je $R\frac{\pi}{2}$. Duljina luka toga meridijana u projekciji koja odgovara 13° geografske širine bit će $R\frac{\pi}{2}\frac{13}{90}=0,2272R$. Duljina luka ekvatora u projekciji koja odgovara 10° geografske dužine iznosi $R\frac{\pi}{2}10\frac{\pi}{180}\frac{5}{6}=0,2279R$.

Prema tome, Lambertova tvrdnja iz posljednje rečenice u §56 je (približno) točna.

Podsjetimo se još tko je bio Zimmermann kojeg Lambert spominje u §56 i §57. Johann Jacob Zimmermann (1644. – 1693.) bio je njemački teolog, matematičar i astronom koji je u svoju raspravu *Cometo-Scopia* iz 1681. uvrstio kartu staze kometa iz 1680./1681. godine. Godine 1692. izradio je dvije karte hemisfera neba u konusnoj projekciji koje su uvezane uz njegov tekst *Coniglobium Nocturnale Stelligerum seu Conus Astroscopicus Geminus*... Svaka ima promjer 29 cm, a centrirana je na ekvatoru, uz primjenu polarne projekcije (Slika 4.). Te konusne karte neba tiskane su više puta između 1704. i 1770. godine. Konstelacije zvijezda preuzeo je od Heveliusa, a konusni format od Schickarda.



*Slika 4. Zimmermannova karta neba u konusnoj projekciji*

Johannes Hevelius (1611. – 1687.) bio je gradonačelnik Danziga (danas Gdańsk) u Kraljevini Poljskoj. Kao astronom stekao je reputaciju „osnivača topografije mjeseca" i opisao deset novih zviježđa.

*Slika 5. Schickardova karta neba u konusnoj projekciji*

Wilhelm Schickard (1592. – 1635.) bio je njemački matematičar i konstruktor prvog mehaničkog kalkulatora, 1623. godine. Schickard je bio svestrani znanstvenik koji je govorio biblijske jezike poput aramejskog i hebrejskog. Bavio se istraživanjima na različitim područjima poput astronomije i matematike. Izradio je različite strojeve poput stroja za izračunavanje datuma u astronomiji i za gramatiku hebrejskog jezika kojemu je dao privremeni naziv „Brzajući sat": izumio ga je čak 20 godina prije *Pascaline* Blaisea Pascala i stroja Gottfrieda Leibniza. Godine 1623. Schickard je objavio knjigu *Astroscopium pro facillima Stellarum cognitione noviter excogitatum* koja je sadržavala dvije nebeske karte u konusnoj projekciji promjera 13,5 cm sa središtem na ekvatorijalnom polu s geocentričnom orijentacijom. Za zviježđa su navedena biblijska i grčko-arapska imena. Druga izdanja objavljena su 1655., 1659. i 1665. godine. Godine 1687. Schickard je objavio drugu knjigu pod naslovom *Astroscopium Pro facillima Stellarum cognitione excogitatum & Commentariolo illustratum*, čija su neka izdanja sadržavala dvije slične konusne karte, ali mnogo veće (promjera 33 cm). Warnerova spominje tri važna aspekta Schickardova rada: jednu od prvih upotreba konusne projekcije za kartu neba; upotrebu geocentrične orijentacije temeljene na njegovoj interpretaciji Ptolomeja, koja je kasnije utjecala na Flamsteedov rad; i odraz tadašnjeg interesa u germanskim zemljama za primjenu judeo-kršćanskih koncepata na zviježđa (Werner 1979.).

## Literatura:

1. Bollmann J., Koch W. G. (2001.) Lexikon der Kartographie und Geomatik. Spektrum Akademischer Verlag Heidelberg, Berlin
2. Frischauf J. (1905.) Die Abbildungslehre und deren Anwendung auf Kartographie und Geodäsie. Druck und Verlag von B. G. Teubner, Leipzig
3. HrvEnc (2021.) Lambert, Johann Heinrich. Hrvatska enciklopedija, mrežno izdanje. Leksikografski zavod Miroslav Krleža. http://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=35243 (12. 7. 2022.)
4. Kennelly A. E. (1929.) Gudermannians and Lambertians with Their Respective Addition Theorems, Proceedings of the American Philosophical Society Vol. 68, No. 3,175-184
5. Lambert J. H. (1772.) Beyträge zum Gebrauche der Mathematik und deren Anwendung, Dritter Theil, VI. poglavlje: Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten. Berlin. Pretisak na njemačkom, 1894, Ostwald's Klassiker der Exakten Wissenschaften, no. 54: Leipzig, Wilhelm Engelmann, uredio Albert Wangerin. Preveo na engleski i napisao uvod W. R. Tobler: Notes and Comments on the Composition of Terrestrial and Celestial Maps: Ann Arbor, Univ. Michigan, 1972, Mich. Geographical Publication no. 8, 125 p. Second edition Esri Press, Redlands, 2011

6. Lapaine M., Kuveždić Divjak A. (2017.) Famous People and Map Projections, u: Lapaine M, E L Usery: Choosing a Map Projection, Lecture Notes in Geoinformation and Cartography, Springer, 259–326
7. Lee L. P. (1976.) Conformal projections based on elliptic functions: Cartographica, Monograph no. 16, supplement no. 1 to Canadian Cartographer, v. 13, 128 p.
8. Rickey F., Tuchinsky P. M. (1980.) An Application of Geography to Mathematics: History of the Integral of the Secant, Mathematics Magazine, Vol. 53, No. 3, 162–166
9. Snyder J. P. (1993.) Flattening the Earth, Two Thousand Years of Map Projections, The University of Chicago Press
10. Warner D. J. (1979.) The sky explored: Celestial cartography, 1500-1800. Publisher A. R. Liss.

### Internetske stranice

1. https://en.wikipedia.org/wiki/Johann_Jacob_Zimmermann
2. https://hr.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Schickard
3. http://www.atlascoelestis.com/Zimmermann%201692.htm
4. http://www.atlascoelestis.com/Schickard%201623%20base.htm