Razni dokazi Heronove formule za površinu trokuta

Daniela Zubović[1], Šefket Arslanagić[2]

Za izračunavanje površine trokuta kada su poznate duljine svih njegovih stranica prikladno je koristiti se Heronovom formulom koja je dobila ime po starogrčkom matematičaru i izumitelju iz 1. stoljeća – Heronu.

Ako su a, b i c duljine stranica trokuta ΔABC, tada se površina toga trokuta računa pomoću formule

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,,$$

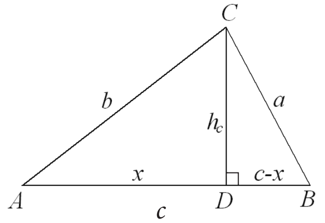
gdje je $s=\dfrac{a+b+c}{2}$, tj. s je poluopseg trokuta ΔABC.

Heron je razmatrao trokute čije su duljine stranica $a=13,\ b=14,\ c=15$ i $a=5,\ b=12,\ c=13$. Primjećujemo da su kod ova dva trokuta duljine stranica cijeli brojevi, ali su i mjerni brojevi površina ovih trokuta također cijeli brojevi (površina prvog trokuta je 84, a drugog 30). Trokuti kod kojih su duljine stanica i mjerni brojevi njihovih površina cijeli brojevi nazivaju se Heronovi trokuti.

U ovom članku dat ćemo nekoliko dokaza važne i zanimljive Heronove formule.

Dokaz 1. Ovaj dokaz uglavnom se nalazi u svim udžbenicima matematike za srednje škole. Imamo

$$P=\frac{c\cdot h_c}{2}\,. \tag{1}$$



Slika 1.

[1]Daniela Zubović, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, BiH
[2]Šefket Arslanagić, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, BiH

Odredimo visinu h_c ovoga trokuta. Iz pravokutih trokuta ΔACD i ΔBCD imamo (Slika 1.)

$$h_c^2 = b^2 - x^2,\ h_c^2 = a^2 - (c-x)^2,$$

odakle je

$$b^2 - x^2 = a^2 - (c-x)^2,$$

odnosno

$$x = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$

Dalje je

$$\begin{aligned} h_c^2 &= b^2 - x^2 = (b+x)(b-x) = \left(b + \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right)\left(b - \frac{b^2+c^2-a^2}{2c}\right) \\ &= \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2c} \cdot \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2c} = \frac{1}{4c^2}\left[(b+c)^2 - a^2\right]\cdot\left[a^2 - (b-c)^2\right] \\ &= \frac{1}{4c^2}(b+c+a)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)\,. \end{aligned}$$

Označimo li $a+b+c$ s $2s$, tj. $a+b+c=2s$, i ako ovoj jednakosti dodamo $-2a$, dobivamo $b+c-a=2(s-a)$. Slično dobivamo $a+c-b=2(s-b)$ i $a+b-c=2(s-c)$ pa je

$$h_c^2 = \frac{1}{4c^2} 2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c) = \frac{4}{c^2} s(s-a)(s-b)(s-c)$$

i

$$h_c = \frac{2}{c}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$

Sada je iz (1)

$$P = \frac{1}{2} c h_c = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$

Dokaz 2. Ovaj se dokaz koristi trigonometrijom. Imamo:

$$P = \frac{1}{2} ab \sin\gamma = \frac{1}{2} ab\sqrt{1-\cos^2\gamma}\,. \tag{2}$$

Zbog $0^o < \gamma < 180^o$ izraz pod korijenom u (2) je pozitivan. Iz teorema o kosinusima imamo:

$$\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\,.$$

Sada iz (2) slijedi

$$P = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 - a^2b^2\cos^2\gamma} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 - \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2}\,. \tag{3}$$

Transformirat ćemo izraz ispod korijena:

$$\begin{aligned} a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2 &= \left(ab-\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)\left(ab+\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}\left[\left(2ab-a^2-b^2\right)+c^2\right]\left[\left(2ab+a^2+b^2\right)-c^2\right] \\ &= \frac{1}{4}\left[c^2-(a-b)^2\right]\left[(a+b)^2-c^2\right] \\ &= \frac{1}{4}(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c). \end{aligned}$$

Uzimajući da je $2s=a+b+c,\ 2s-2a=b+c-a,\ 2s-2b=a+c-b,\ 2s-2c=a+b-c$, dobivamo:

$$a^2b^2-\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)^2=4s(s-a)(s-b)(s-c).$$

Sada iz (3) imamo:

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Dokaz 3. I u ovom se dokazu koristimo trigonometrijom. Prema teoremu o kosinusima je

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha,$$

tj.

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}. \tag{4}$$

Iz formule

$$P=\frac{1}{2}bc\sin\alpha$$

imamo:

$$\sin\alpha=\frac{2P}{bc}. \tag{5}$$

Ako (4) i (5) uvrstimo u trigonometrijsku jednakost $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, dobivamo:

$$\left(\frac{2P}{bc}\right)^2+\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2=1,$$

odakle je:

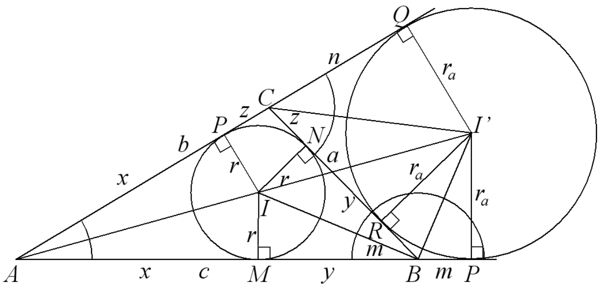
$$\begin{aligned} P^2 &= \frac{4b^2c^2-\left(b^2+c^2-a^2\right)^2}{16}=\frac{\left[(b+c)^2-a^2\right]\cdot\left[a^2-(b-c)^2\right]}{16} \\ &= \frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a+c-b}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2} \\ &= s(s-a)(s-b)(s-c), \end{aligned}$$

tj.

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$

Dokaz 4. Sada ćemo Heronovu formulu dokazati preko geometrije. Sa Slike 2. vidimo da je:

$$\begin{aligned}
|AM| &= |AP| = x,\\
|BM| &= |BN| = y,\\
|CP| &= |CN| = z,\\
|BP| &= |BR| = m,\\
|CR| &= |CQ| = n.
\end{aligned}$$



Slika 2.

Imamo:

$$P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ACI'} + P_{\Delta ABI'} - P_{\Delta BCI'}$$

ili

$$P_{\Delta ABC} = \frac{br_a}{2} + \frac{cr_a}{2} - \frac{ar_a}{2} = \frac{b+c-a}{2}\cdot r_a. \tag{6}$$

Iz $a+b+c=2s$ je $b+c-a=2(s-a)$ tj. $s-a=\dfrac{b+c-a}{2}$, pa iz (6) imamo

$$P = P_{\Delta ABC} = r_a(s-a), \tag{7}$$

gdje je r_a polumjer kružnice izvana pripisane trokutu ΔABC (kao na Slici 2.).

Dalje imamo $|AM|=|AP|=x$, $|BM|=|BN|=y$, $|CP|=|CN|=z$ pa je

$$2x+2y+2z=2s$$

ili

$$\begin{aligned}
x+y+z&=s\,,\\
y&=s-(x+z)\,,\\
y&=s-b\,.
\end{aligned} \tag{8}$$

Kako je

$$|AB|+|BP|+|AC|+|CR|=2s$$

odnosno

$$|AB|+|BP|+|AC|+|CQ|=2s\,,$$

tj.

$$|AP|+|AQ|=2s\,,$$

ili, zbog $|AP|=|AQ|$ je $|AP|=|AQ|=s$, kao i $|BP|=|AP|-|AB|$, tj.

$$m=s-c\,. \tag{9}$$

Očigledno je $\Delta IBM \sim \Delta I'BP$, odakle je $|IM|:|BM|=|BP|:|I'P|$, $r:y=m:r_a$ tj. $rr_a=ym$, a zbog (7), (8) i (9), te $r=\dfrac{P}{s}$ i $r_a=\dfrac{P}{s-a}$ je:

$$\frac{P}{s}\cdot\frac{P}{s-a}=(s-b)(s-c)$$

ili

$$P^2=s(s-a)(s-b)(s-c)$$

i najzad

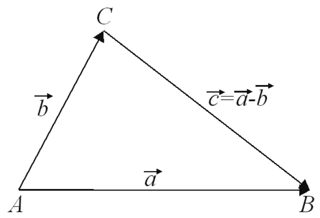
$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$

Dokaz 5. Za ovaj ćemo se dokaz koristiti vektorima. Prema Slici 3. je $P=\frac{1}{2}\left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\right|$, a odavde je

$$4P^2=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|^2=|\vec{a}|^2\left|\vec{b}\right|^2\sin^2\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right),$$

tj.

$$4P^2=a^2b^2\left(1-\cos^2\angle\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\right). \tag{10}$$



Slika 3.

No, kako je zbog $\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$,

$$\left|\vec{a}-\vec{b}\right|^2=a^2-2\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|+b^2=|c^2|,$$

odakle je

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}\left(a^2+b^2-c^2\right),$$

to proizilazi iz (10):

$$4P^2=a^2b^2-\frac{1}{4}\left(a^2+b^2-c^2\right)^2=\left(ab+\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)\left(ab-\frac{a^2+b^2-c^2}{2}\right)$$

$$=\frac{(a+b)^2-c^2}{2}\cdot\frac{c^2-(a-b)^2}{2}=\frac{1}{4}(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c+b-a).$$

Stavimo li da je $s=\dfrac{a+b+c}{2}$, nakon transformacija dobivamo

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$

Dokaz 6. Uvrste li se u adicijski teorem za kotangens tri sumanda

$$\operatorname{ctg}(x+y+z)=\frac{\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}y\cdot\operatorname{ctg}z-\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}y-\operatorname{ctg}z}{\operatorname{ctg}x\cdot\operatorname{ctg}y+\operatorname{ctg}y\cdot\operatorname{ctg}z+\operatorname{ctg}z\cdot\operatorname{ctg}x-1} \tag{11}$$

polovine kuteva α, β, γ nekog trokuta, lijeva strana od (11) bit će jednaka nuli, tako da vrijedi

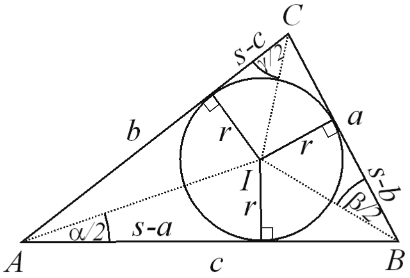
$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}. \tag{12}$$

Zbog

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{s-a}{r},\ \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{s-b}{r},\ \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{s-c}{r}, \tag{13}$$

gdje je r polumjer upisane kružnice, a s poluzbroj stranica (Slika 4.), iz (12) i (13) slijedi:

$$\frac{s-a}{r}+\frac{s-b}{r}+\frac{s-c}{r}=\frac{3s-(a+b+c)}{r}=\frac{s}{r}=\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{r^3}. \tag{14}$$



Slika 4

Iz (14) je sada:

$$sr^2=(s-a)(s-b)(s-c)$$

ili

$$s^2r^2 = s(s-a)(s-b)(s-c). \tag{15}$$

Kako je $P = sr$, to iz (15) dobivamo:

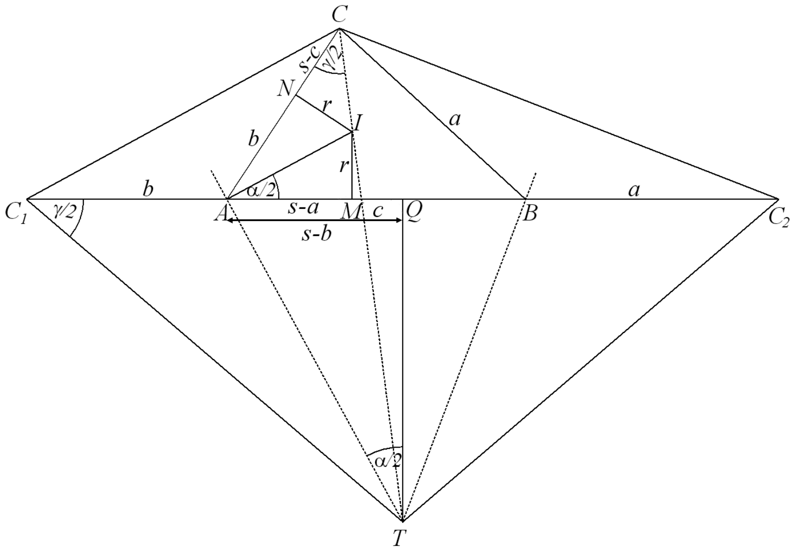
$$P^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$$

ili

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Dokaz 7. Slijedi još jedan planimetrijski dokaz. Kako je točka I centar upisane kružnice trokuta ΔABC, tada je $|IM| = |IN| = r, |AM| = s-a, |CN| = s-c$. Ako je $|C_1A| = |AC| = b,\ |BC_2| = |CB| = a$, tada je $|C_1C_2| = 2s$, a ako je točka Q središte dužine $\overline{C_1C_2}$, tada je $|C_1Q| = s, |AQ| = s-b$. Uz to je $|\angle ATQ| = |\angle IAM| = \dfrac{\alpha}{2}$ jer je $AI \perp AT$ i $|\angle QC_1T| = |\angle ICN| = \dfrac{\gamma}{2}$ (Slika 5.).

Trokuti ΔCAC_1 i ΔCBC_2 su jednakokračni pa su simetrale stranica $\overline{CC_1}$ i $\overline{CC_2}$ istodobno i simetrale kutova $\angle C_1AC$ i $\angle CBC_2$.



Slika 5

Stoga se točka T, centar opisane kružnice trokuta ΔCC_1C_2, nalazi u presjeku simetrala dvaju vanjskih kutova trokuta ΔABC, ali točka T nalazi se i na simetrali unutrašnjeg kuta u vrhu C.

Iz sličnih trokuta ΔQAT i ΔAMI je:

$$(s-b) : |QT| = r : (s-a),$$

a iz sličnih trokuta ΔQC_1T i ΔCNI :

$$|QT|:s=r:(s-c).$$

Množenjem zadnjih dviju jednakosti dobivamo:

$$\frac{s-b}{s}=\frac{r^2}{(s-a)(s-c)},$$

a odavde

$$r^2s=(s-a)(s-b)(s-c).$$

Kada obje strane prethodne jednakosti pomnožimo sa *s*, a uzimajući u obzir da je $rs = P$, dobivamo:

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Dokaz 8. Imamo poznate formule iz trigonometrije:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{s-a}\ , \tag{16}$$

$$P=rs\,, \tag{17}$$

$$P=\frac{1}{2}bc\sin\alpha. \tag{18}$$

Sada iz (16), (17) i (18) imamo:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{r}{s-a}=\frac{P}{s(s-a)}=\frac{bc\sin\alpha}{2s(s-a)}=\frac{bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{s(s-a)}.$$

Odavde neposredno dobivamo:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\ ,$$

te

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{bc-s(s-a)}{bc}}=\sqrt{\frac{bc-s(s-a)+bs-bs}{bc}}$$
$$=\sqrt{\frac{s(b-s+a)-b(s-c)}{bc}}=\sqrt{\frac{s(s-c)-b(s-c)}{bc}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\ .$$

Uvrštavanjem izraza za $\sin\frac{\alpha}{2}$ i $\cos\frac{\alpha}{2}$ u formulu $\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ dobivamo:

$$\sin\alpha=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\ . \tag{19}$$

Iz (18) i (19) sada slijedi Heronova formula:

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,.$$

Napomena: Pokazuje se da se Heronova formula, uzimajući da je $s=\frac{a+b+c}{2}$, može napisati u obliku:

$$P=\frac{1}{4}\sqrt{\left(a^2+b^2+c^2\right)^2-2\left(a^4+b^4+c^4\right)}\,.$$

Analizirajući svih osam danih dokaza, možemo reći da su zanimljivi i da iziskuju opsežno znanje iz geometrije i trigonometrije. Smatramo da je u tome i vrijednost ovih dokaza pa ih preporučamo nastavnicima u radu sa svojim učenicima koji pokazuju veći interes za matematiku.

Literatura:

1. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. Blagojević, V., *Teoreme i zadaci iz planimetrije*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Istočno Sarajevo, 2002.
3. Marić, A., *Trokut (definicije, poučci, formule, problemi, jednakosti, nejednakosti)*, Element, Zagreb, 2007.
4. Mintaković, S., Franić, M., *Trigonometrija*, Element, Zagreb, 1999.
5. Pavković, B., Veljan, D., *Elementarna matematika 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1995.