

Matematika u umjetnosti¹

RENATA BRKANAC² I VESNA ŠKREB SALAMUNIĆ³

Sažetak

Naslov ove teme mogao bi biti i *Kako ne baš lagane matematičke i fizičke pojmove poučavati pomoću likovne umjetnosti*. Mjerenje, omjer, površina, postotak, procjena... gdje se sve kriju razmjeri i postotci? I tko zna naslikati najljepšu matematičku sliku?

Jedan od glavnih problema s poučavanjem Matematike (i Fizike) u višim razredima osnovne škole motivacija je učenika – onih koji su u tim predmetima inače slabiji, ali sve više i onih izvrsnih. Povezivanje više različitih predmeta (u ovom slučaju Matematike, Fizike i Likovne kulture) u jednu temu (u ovom slučaju to su bile površine) pridonosi motivaciji učenika. Organizacija rada u grupama dopušta svim učenicima da ostvare svoje potencijale te različitim aktivnostima razvijaju više vještina za 21. stoljeće: kritičko mišljenje, komunikaciju, suradnju, kreativnost, što je sve u skladu s odgojno-obrazovnim ciljevima učenja i poučavanja predmeta Matematika (NN 7/2019: Odluka o donošenju kurikulumu za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj), i Fizika (NN 10/2019: Odluka o donošenju kurikulumu za nastavni predmet Fizike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj).

1. Uvod

Pohađajući različite otvorene online tečajeve došle smo u priliku osmisliti i provesti scenarije učenja vezane uz Matematiku i Fiziku, ali i ostale nastavne predmete koji na prvi pogled nemaju baš previše veze s njima. Tako smo u sklopu tečaja *Europeana in your classroom* na platformi *European Schoolnet Academy* osmislile scenarij učenja pod nazivom *Mathematics in Art*, povezujući Matematiku, Fiziku i Likovnu umjetnost te koristeći, između ostaloga, izvore (umjetnička djela) s platforme *Europeana*. Scenarij učenja uključuje različite aktivnosti vezane uz mjerenje (elementi umjetničkih djela), računanje površina, omjera, postotaka, procjene veličina te, na završnom satu, i kreativni likovni rad (crtanje ili slikanje, vezano uz zadani omjer, postotak ili površinu jedne odabrane boje), rješavanje kviza (Postotci – procjena po-

¹Predavanje održano na 9. kongresu nastavnika matematike 2022. u Zagrebu

²Renata Brkanac, OŠ Cvjetno naselje, Zagreb

³Vesna Škreb Salamunić, OŠ Cvjetno naselje, Zagreb

vršine) te vršnjačko vrednovanje. Navedeni scenarij objavljen je u rujnu 2019. na Europeana blogu.

2. Pitanja i izazovi

Neka od pitanja (kao i odgovori dobiveni na njih) koja su nas potaknula na osmišljavanje ovog scenarija učenja bila su:

1. *Što je to površina?* Česti odgovori učenika su: umnožak duljina stranica, ili umnožak duljine i širine (premda nije postavljeno pitanje o površini pravokutnika).

2. *Što je to omjer (i kako se računa, interpretira)?* Učenici poznaju omjere oblika 1 : 2 (dani i primljeni golovi), 11 : 12 (omjer broja djevojčica i dječaka u razredu), ali ne znaju da i npr. 2.94 mogu interpretirati kao omjer. Čim je u omjeru broj različit od prirodnoga, učenici takav omjer ne znaju interpretirati, niti znaju zapisati broj koji nije prirodan u obliku omjera (npr. 2.94 : 1).

3. *Kako se računa postotak?* Od učenika bismo često dobile rješenje u obliku množenja sa 100, npr. $0.36 = 0.36 \cdot 100 = 36\%$, umjesto da je decimalan broj zapisan kao postotak.

Nadamo se kako će se ponešto u učeničkom shvaćanju pojma površine početi mijenjati zahvaljujući promjenama u kurikulumu nastave Matematike (4. razred – određivanje površine pravokutnika i kvadrata izravnim mjerenjem, tj. prekrivanjem pravokutnika i kvadrata jediničnim kvadratićima i prebrojavanjem, 5. razred i nadalje – postupno uvođenje formula za površine pojedinih likova) i Fizike (7. razred – ponovno izravno mjerenje površine, prekrivanje površine likova nepravilnog oblika milimetarskim papirom i prebrojavanje kvadratića, 8. razred – primjene površine). Učenike treba poticati na određivanje površine na različite načine, kako bismo ih osposobili da u pojedinom slučaju (zadatku, problemu) odaberu najprikladniji način mjerenja ili računanja.

Kako bismo učenike privoljele na bolje shvaćanje pojmova omjera i postotka, potrebno je primjenjivati što više zadataka procjene te povezivanja tih pojmova sa situacijama iz drugih predmeta i svakodnevnog života. S tim ciljem je u sklopu ovog scenarija učenja osmišljen i kratki *Kahoot* kviz sa zadacima procjene površine i izražavanja tih površina u obliku postotka: *Kahoot* - postotci u umjetnosti. Zahvaljujući, između ostaloga, i novom elementu vrednovanja (Matematička komunikacija), učenike treba poticati na izražavanje brojeva u različitim oblicima (decimalni zapis, razlomak, postotak) umjesto na učenje „formula“, često i pogrešnih, pomoću kojih će neki rezultat samo formalno točno izračunati.

3. Provedba scenarija učenja

Odlučile smo scenarij učenja provesti radom u homogenim grupama u jednom sedmom (V. Škreb Salamunić) i jednom osmom razredu (R. Brkanac). Odabrani su

zadatci različite težine, ali i takvi koji će zahtijevati određivanje površine na različite načine. Rad na svakom zadatku zahtijeva suradnju, a u scenariju učenja predviđen je i dio sata na kojemu će učenici predstaviti svoj rad ostatku razreda (prezentacija samog zadatka, ideja za rješavanje te konačnog rješenja).

Slijede primjeri zadataka i neki od radova učenika.

Zadatak 1.

- Izmjerite visinu i širinu slike te izračunajte površinu cijele slike i površinu crnog pravokutnika.
- Izračunajte omjer crnog prema bijelom dijelu slike.



Slika 1. Crni kvadrat

Ovaj zadatak dobila je grupa učenika koji su najslabiji u matematici. Na prvi pogled reagirali su riječima: - *Pa to je kvadrat!*, da bi se ipak sjetili kako je potrebno izmjeriti duljinu i širinu te se tako zaista uvjeriti da su one iste, tj. da je zaista u pitanju kvadrat, a ne pravokutnik. Zatim je trebalo odraditi površinu cijele slike, crnog dijela, potom bijelog dijela i na kraju izračunati traženi omjer. Učenici su po potrebi mogli koristiti i džepno računalo jer nije bilo bitno precizno računanje već interpretacija rezultata.

Zadatak su barem djelomično točno riješili i učenici koji nastavu pohađaju uz individualizaciju postupaka u nastavi, u čijim je rješenjima nedostajalo pojednostavljanje, tj. interpretacija omjera, te učenici koji imaju i prilagodbu sadržaja, a kod kojih je račun bio djelomično točan.

Zadatak 2.

- Izmjerite sve odgovarajuće duljine (crnih okvira te svakog pojedinog kvadrata i pravokutnika).

b) Izračunajte koji postotak površine slike zauzima svaka boja.



Slika 2. Piet Mondrian: Crveno – plavo – žuto

U ovome su zadatku učenici u grupi „podijelili boje” tako da je svakome pripao dio zadatka (mjerjenje i računanje površine jedne boje). Prvi problem predstavljao je rub slike (sliku je prvo trebalo „uokviriti”, te tako odrediti njezine točne dimenzije), a potom se pokazalo da je najteže odrediti površinu koju zauzima crna boja (vrlo tanki pravokutnici koji se na mnogim mjestima preklapaju). Ovaj su zadatak učenici prilično uspješno riješili, ali u oba smo razreda kod većeg broja učenika primijetile iste pogreške – računanje postotka „umetanjem” $\cdot 100$ u postupku, a zapravo je trebalo decimalni broj izraziti u obliku postotka. I učenici su primijetili kako je ovaj zadatak prilično lagan, a to potvrđuju i kolege koji su isti scenarij učenja primjenjivali i kod mlađih uzrasta (već od 4. razreda), koristeći samo ovaj primjer.

Zadatak 3.

- Izmjerite površinu svake boje (crvene, narančaste, žute, zelene i plave) koristeći listiće na kojima je ispisa- na slika.
- Izračunajte koji postotak površine slike zauzima svaka boja.



Slika 3. Plakat s 10. Svjetskog festivala Weltfestspiele 1973.

Ovaj je zadatak tražio dosjetljivost, posebno kod učenika 7. razreda (jer u vrijeme kad su ga rješavali još nisu znali računati površine dijelova kruga, poput kružnog isječka, već samo površinu čitavoga kruga). Nadalje, i neki učenici 8. razreda, koji su već znali izračunati površinu kružnog isječka, nisu imali ideju kako izračunati površinu dijela koji nedostaje (neki su se dosjetili pa od površine kružnog isječka oduzeli površinu trokuta te tako dobili „polumjesece” čije su površine potom oduzeli od površine kružnog isječka pa tako dobili površinu pojedine „laticе”). Namjerno u zadatku nismo sugerirale korištenje milimetarskog papira, ali smo dopustile njegovu uporabu učenicima koji su ga zatražili (sjetili su se kako bi površinu mogli odrediti izravnim mjerenjem).

Pokazalo se da su neki učenici zapamtili kako se određuje središte kruga (konstruiranjem simetrala dviju tetiva), dok su neki središte određivali približno, crtanjem. Jedna nas je učenica sedmog razreda zadivila svojom preciznošću i upornošću jer je, uz ispravno konstruiranje središta svakoga kruga, precrtala sukladan krug na milimetarski papir i zatim na dva načina odredila površinu (dijeljenjem lika na različite dijelove). Drugi su pak učenici pokušali aproksimirati površinu traženog lika poznatim površinama – dijelili su lik na četvrtine kruga, kojima znaju izračunati površinu, a ostatku lika upisivali su trokute. Dobiveni rezultati bili su začuđujuće precizni, a na ovome su zadatku učenici pokazali visoku razinu kreativnosti – kao rezultat rada dobili smo najviše različitih pristupa i metoda određivanja površine.

Zadatak 4.

- Izmjerite duljine svih dužina na slici te promjere krugova. Izračunajte površine svakog dijela slike (crnog, bijelog i krugova).
- Izračunajte koji postotak površine slike zauzima crna, a koji bijela boja.



Slika 4. Two Round Black Cases

Ovaj je zadatak, iako naizgled jednostavan, zadao prilične glavobolje učenicima koji su ga rješavali. Ponajprije, trebalo se dosjetiti kako odrediti polumjere crnih krugova (kao i u prethodnome primjeru, neki su se učenici sjetili da treba nacrtati dvije tetive i konstruirati njihove simetrale, a neki su samo približno povukli dužinu koja bi trebala predstavljati promjer). Teškoća je bila u boji (crtež se nije vidio na crnoj podlozi) te se jedan učenik dosjetio i okrenuo papir, pa kako su se likovi nazirali s druge strane, cijeli je crtež, uključujući i konstrukcije, izveo bez problema na bijelom listu papira. Nadalje, crni i bijeli mnogokuti trebali su se na neki način podijeliti na dijelove čije površine učenici znaju izračunati. Tu je bilo



Slika 5. Rad u grupi, crno-bijeli svijet

svakakvih ideja (i rezultata, uglavnom su svi bili različiti) jer su neki učenici dijelili likove na trokute, neki na pravokutnike i trokute, neki na trapeze... Uglavnom, i ovdje su pokazali visoku razinu kreativnosti.

Zadatak 5.

- a) Izmjerite površinu svake boje koristeći listiće na kojima je ispisana slika te milimetarski papir.
- b) Izračunajte koji postotak površine slike zauzima svaka boja.

Ovaj smo zadatak zadale grupi u kojoj su bili najbolji matematičari, pretpostavljajući da će biti najteži. Međutim, ispostavilo se da je za rješavanje toga zadatka trebalo samo mnogo strpljenja i preciznosti. Učenicima je ponuđen i milimetarski papir, te smo tako zaokružili ciklus mjerenja površina (izravno mjerenje, od prekrivanja pravokutnika i kvadrata jediničnim kvadratima površine 1 cm^2 , kao što se to radi u 4. razredu na matematici, do prekrivanja nepravilnog oblika jediničnim kvadratićima površine 1 mm^2 - 7. razred, fizika). Većina se učenika dosjetila korištenja Sunčevog svjetla, kao što je vidljivo na slici, kako bi crtež precizno precrtali na milimetarski papir, a zatim su na razne načine dijelili površinu – na kvadrate dimenzija $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$ i kvadratiće $1 \text{ mm} \times 1 \text{ mm}$, a neke su učenice bile čak toliko precizne da su zbrajale po dvije površine trokuta kako bi dobile kvadratić površine 1 mm^2 .



Slika 6. Plakat s 10. Svjetskog festivala Weltfestspiele 1973.



Slika 7. Ideja!

4. Zaključak

Što smo naučili?

Pojam površine uglavnom je zahtjevan, ali i oni učenici koji su najslabiji u matematici shvaćaju njegovu važnost kroz povezanost s drugim predmetima i sa situacijama iz svakodnevnog života. Slično je i s pojmovima omjera i postotka, pogotovo u vezi s drugim predmetima. Provedene aktivnosti pokazale su da su učenici ovakvim načinom učenja motiviraniji, aktivnije se uključuju i oni učenici koji se obično ne smatraju dobrima u matematici i fizici, a radom u grupi svaki učenik može pokazati svoje jake strane. Bavljenjem pojmovima površine, omjera, postotka ili procjene veličine na primjerima umjetničkih djela povezuju se zahtjevni matematički i fizički pojmovi s ljudskim aktivnostima u kojima ih možda i ne bismo očekivali. Tako ti bitni matematički i fizički pojmovi ostaju potpunije shvaćeni te čvršće i trajnije upamćeni. Radom u homogenim grupama i na zadatcima različite zahtjevnosti omogućuje se svim učenicima usvajanje barem temeljnih ishoda propisanih kurikulumima predmeta Matematika i Fizika, a različitim aktivnostima kod učenika se potiče razvijanje više vještina za 21. stoljeće: kritičko mišljenje, komunikacija, suradnja, kreativnost.

Literatura i predložena web mjesta:

1. Odluka o donošenju kurikulumu za nastavni predmet Fizike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj, [NN 10/2019](#)
2. Odluka o donošenju kurikulumu za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj, [NN 7/2019](#)
3. European Schoolnet Academy, <https://www.europeanschoolnetacademy.eu/>
4. Europeana, <https://www.europeana.eu/hr>
5. Scenariji učenja na Europeani, <https://teachwitheuropeana.eun.org/learning-scenarios/>
6. Brkanac, Salamunić, *Mathematics in Art*, Teaching with Europeana, <https://teachwitheuropeana.eun.org/learning-scenarios/mathematics-in-art-en-cur-141/>
7. Primjena scenarija učenja, <https://teachwitheuropeana.eun.org/?s=Math+in+Art>
8. [Kahoot - postotci u umjetnosti](#), <https://create.kahoot.it/share/postotci-u-umjetnosti/9ff1b7f9-6389-41b4-b91b-d264e8cfc903>

***Napomena:** U scenariju učenja su poveznice na originalne slike (Zadatci 1. - 5.) od kojih dvjema više nije moguće pristupiti (Slika 3., Z. 3. i Slika 6., Z. 5.) jer je platforma promijenila format.