math.e

Hrvatski matematički elektronički časopis

O nekim metodičkim problemima u obradi standardizacije normalne slučajne varijable

funkcija razdiobe vjerojatnosti   metodika nastave matematike   normalna slučajna varijabla   normalne slučajne varijable   standardizacija

Autori

Mandi Orlić Bachler
Tehničko veleučilište u Zagrebu, Katedra za matematiku,
10000 Zagreb, Av. V. Holjevca 15, Hrvatska
email: mandi.orlic@tvz.hr

i

Bojan Kovačić

Tehničko veleučilište u Zagrebu, Katedra za matematiku,
10000 Zagreb, Konavoska 2, Hrvatska
email: bojan.kovacic@tvz.hr

Sažetak

U nastavi vjerojatnosti i statistike na svim stručnim studijima u pravilu se obrađuje normalna slučajna varijabla, odnosno normalna razdioba. Pritom se kao jedan od osnovnih rezultata iskazuje (uglavnom bez dokaza) teorem o standardizaciji normalne slučajne varijable. U radu se razmatraju i komentiraju osnovni problemi koje studenti imaju s razumijevanjem iskaza i dokaza toga teorema, a koje su autori uočili na temelju svojih višegodišnjih nastavnih iskustava.

Ključni pojmovi: funkcija razdiobe vjerojatnosti, normalna slučajna varijabla, standardizacija

1 Uvod

U nastavi vjerojatnosti i statistike na našim veleučilištima i samostalnim visokim školama neki od najčešćih ishoda učenja su upoznati studente s normalnom razdiobom, te izračunati vjerojatnosti događaja u slučajnim pokusima modeliranima normalnom razdiobom. Ti se ishodi metodički ostvaruju uglavnom tako da se najprije definiraju neprekidna (kontinuirana) slučajna varijabla i njezini osnovni parametri, a potom definira normalna slučajna varijabla kao poseban slučaj neprekidne slučajne varijable. Međutim, prilikom obrade neprekidne slučajne varijable često se izostavlja malo detaljnija obrada sljedećega problema.

Problem 1. Neka su X neprekidna slučajna varijabla, f_X njezina funkcija gustoće, $A, B \subseteq \mathbb{R}$ i $g : A \to B$. Odrediti funkciju gustoće slučajne varijable $Y = g(X)$.

Napominjemo da se analogon problema 1. za diskretne slučajne varijable uglavnom detaljnije obrađuje. Pritom se umjesto funkcije gustoće vjerojatnosti razmatra funkcija razdiobe vjerojatnosti. Slažemo se da je taj analogon doista bitno jednostavniji za razumijevanje i primjenu od problema 1. Međutim, smatramo da je potrebno iskazati i riješiti problem 1. u slučaju kad je g polinom 1. stupnja. Naime, upravo se taj slučaj kasnije pojavljuje prilikom definiranja postupka standardizacije normalne slučajne varijable, pa, bez rješenja problema 1., ostaje ili u cijelosti neiskazano ili nedorečeno što zapravo znači spomenuta standardizacija.

Radi potpunosti izlaganja, u nastavku navodimo osnovne pojmove koje ćemo kasnije efektivno koristiti. Iskazane definicije su donekle "prilagođene" studentima stručnih studija i njihovoj razini matematičkoga predznanja potrebnoga za praćenje nastave vjerojatnosti i statistike.

2 Osnovni pojmovi

Definicija 2. *Slučajnu varijablu čija je slika neki neprebrojiv podskup skupa $\mathbb{R}$ (npr. segment, otvoreni interval i dr.) nazivamo* ***neprekidna*** *ili* ***kontinuirana slučajna varijabla****.*

Definicija 3. ***Funkcija gustoće vjerojatnosti*** *neprekidne slučajne varijable X je svaka realna funkcija f koja ima sljedeća svojstva:*

(1) $f(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$;

(2) $$P\left(a \leq X \leq b\right) = \int_a^b f(x) \cdot \mathrm{d}x \;;$$

(3) $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \mathrm{d}x = 1 \;.$$

Svaka neprekidna slučajna varijabla jednoznačno je određena zadavanjem svoje funkcije gustoće vjerojatnosti.

Definicija 4. *Neka su X neprekidna slučajna varijabla, f_X njezina funkcija gustoće $A, B \in \mathbb{R}$ i $g : A \to B$ strogo monotona derivabilna bijekcija. Tada je slučajna varijabla $Y = g(X)$ neprekidna slučajna varijabla čija je funkcija gustoće f_Y definirana pravilom:*

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{f_X(g^{-1}(y))}{|g'(g^{-1}(y))|}, & \forall y \in B, \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \tag{1}$$

Iz definicije 4. je razvidno da ona predstavlja poseban slučaj problema 1. u slučaju kad je g strogo monotona derivabilna bijekcija. Budući da je svaki polinom 1. stupnja strogo monotona derivabilna bijekcija sa skupa $\mathbb{R}$ na samoga sebe, definicija 4. je sasvim dovoljna za potrebe razmatranja standardizacije normalne slučajne varijable.

Komentar: Kakvo predznanje studenti trebaju imati da bi razumjeli definicije 3. i 4.? Definiciju 3. studenti će razumjeti ako su prethodno odslušali (a poželjno i položili) matematički kolegij u kojemu se obrađuju osnove integralnoga računa (uključujući i neprave integrale). Definiciju 4. studenti će razumjeti ako su prethodno odslušali (a poželjno i položili) matematički kolegij u kojemu se obrađuju osnove diferencijalnoga računa. Na stručnim studijima Tehničkoga veleučilišta u Zagrebu takvi matematički kolegiji predaju se na prvoj godini preddiplomskih studija, dok se osnovni kolegij iz vjerojatnosti i statistike predaje ili na drugoj godini preddiplomskih studija ili na prvoj godini specijalističkoga studija. Dakle, u trenutku kad se obrađuju neprekidne slučajne varijable, studenti Tehničkoga veleučilišta u Zagrebu su na stručnom studiju stekli matematičko predznanje potrebno za razumijevanje ove nastavne cjeline. Unatoč tome, autori prilikom iskazivanja gornjih definicija ukratko ponove Newton-Leibnizovu formulu, definiciju nepravoga integrala oblika $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot \mathrm{d}x$ i potrebne osnovne pojmove o funkcijama (bijektivnost, stroga monotonost, derivabilnost) jer su svjesni da ih je znatan dio studenata jednostavno zaboravio.

Definicija 5. *Kažemo da je neprekidna slučajna varijabla X* ***normalna slučajna varijabla s parametrima*** *$\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ ako je njezina funkcija gustoće f_X definirana pravilom*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} . \tag{2}$$

Tada pišemo: $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$.

Posebno, ako je $(\mu, \sigma) = (0, 1)$, varijablu X nazivamo ***standardna*** *ili* ***jedinična normalna slučajna varijabla****. Tada pišemo: $X \sim N\left(0, 1^2\right)$ ili, kraće, $X \sim N(0, 1)$. Njezina funkcija gustoće je definirana pravilom*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-x^2}{2}} . \tag{3}$$

Napominjemo da se u nastavi najčešće izostavlja dokaz da je funkcija f_X uistinu funkcija gustoće neke neprekidne slučajne varijable jer provjera svojstva 3. iz definicije 3. zahtijeva poznavanje određivanja nepravoga integrala prijelazom na polarne koordinate. Studenti stručnih studija većinom nisu upoznati s takvim načinom određivanja nepravoga integrala jer to gradivo nije obuhvaćeno matematičkim kolegijima koji prethode osnovnom kolegiju iz vjerojatnosti i statistike, pa se zbog toga provodi navedeno izostavljanje.

Definicija 6. *Neka su X neprekidna slučajna varijabla i f_X njezina funkcija gustoće vjerojatnosti.* ***Funkcija razdiobe vjerojatnosti*** *varijable X je realna funkcija F_X definirana pravilom:*

$$F_X(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t) \cdot \mathrm{d}t \,. \tag{4}$$

Definicija 7. *Neka su X neprekidna slučajna varijabla i f_X njezina funkcija gustoće vjerojatnosti. Tada su* ***očekivanje*** *$E(X)$ i* ***standardna devijacija*** *$\sigma(X)$ varijable X definirani formulama:*

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f_X(x) \cdot \mathrm{d}x \,, \tag{5}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 \cdot f_X(x) \cdot \mathrm{d}x} \,. \tag{6}$$

Napomena 8. *Može se pokazati da očekivanje i standardna devijacija neprekidne slučajne varijable X imaju sljedeća svojstva:*

$$\left.\begin{aligned} E(a \cdot X + b) &= a \cdot E(X) + b, \\ \sigma(a \cdot X + b) &= |a| \cdot \sigma(X), \end{aligned}\right\} \quad \forall a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0 \,. \tag{7}$$

Napomena 9. *Može se pokazati da, ako je $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, onda su $E(X) = \mu$ i $\sigma(X) = \sigma$.*

Dokaze ovdje izostavljamo, a zainteresiranoga čitatelja upućujemo na [1]-[3].

3 Teorem o standardizaciji normalne slučajne varijable

Razmatranje iskaza i dokaza teorema iz naslova ove cjeline započinjemo rješavanjem sljedećega problema.

Problem 10. Neka su X neprekidna slučajna varijabla, f_X njezina funkcija gustoće vjerojatnosti, te $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, proizvoljne, ali fiksirane konstante. Odredite funkciju gustoće vjerojatnosti f_Y slučajne varijable $Y = a \cdot X + b$.

Rješenje: Primijetimo najprije da je funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana pravilom $g(x) = a \cdot x + b$ strogo monotona bijekcija. Naime, riječ je o polinomu 1. stupnja koji je strogo rastuća bijekcija ako i samo ako je $a > 0$, a strogo padajuća bijekcija ako i samo ako je $a < 0$. Njezin inverz je bijekcija $g^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana pravilom

$$g^{-1}(x) = \frac{1}{a} \cdot x - \frac{b}{a} \, , \tag{8}$$

dok je njezina prva derivacija

$$g'(x) = a, \quad \forall x \in \mathbb{R} \, . \tag{9}$$

Koristeći 1 izravno dobivamo da je tražena funkcija gustoće $f_Y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dana pravilom:

$$f_Y = \frac{1}{|a|} \cdot f_X \left(\frac{1}{a} \cdot y - \frac{b}{a} \right) \, . \tag{10}$$

Komentar: Najčešći problemi koji se pojavljuju prilikom rješavanja problema 10. su značenje pretpostavke $a \neq 0$ i određivanje inverza polinoma 1. stupnja. Većina studenata smatra da se pretpostavka $a \neq 0$ uvodi samo zbog definiranosti razlomaka $\frac{1}{a}$ i $\frac{1}{|a|}$ u pravilu 10, a ne zbog ispravne primjene definicije 4. Zbog toga obično pitamo studente kakva se funkcija dobiva za $a = 0$, je li ta funkcija bijekcija i – naposljetku – možemo li u tom slučaju korektno primijeniti definiciju 4. Dio studenata je zaboravio postupak određivanja pravila inverza bijekcije, pa zbog njih izvodimo pravilo funkcije g^{-1}.

Sada možemo iskazati i dokazati najavljeni teorem.

Teorem 11. *[Teorem o standardizaciji normalne slučajne varijable] Neka su $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$ proizvoljne, ali fiksirane konstante. Neka su $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ normalna slučajna varijabla i F_X njezina funkcija razdiobe vjerojatnosti. Definiramo slučajnu varijablu:*

$$Y = \frac{1}{\sigma} \cdot X - \frac{\mu}{\sigma} \tag{11}$$

Tada je $Y \sim N(0, 1)$ i za njezinu funkciju razdiobe vjerojatnosti F_Y vrijedi jednakost:

$$F_X(x) = F_Y\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R} \, . \tag{12}$$

Proof. Primijetimo najprije da je, zbog pretpostavki $\mu \in \mathbb{R}$ i $\sigma > 0$, funkcija $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana pravilom

$$g(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot x - \frac{\mu}{\sigma} \tag{13}$$

polinom 1. stupnja, a time i strogo monotona bijekcija. Dakle, možemo primijeniti rješenje problema 10. za $(a, b) = \left(\frac{1}{\sigma}, -\frac{\mu}{\sigma}\right)$.

Dokaz ćemo podijeliti u dva dijela. Najprije ćemo pokazati da je slučajna varijabla Y definirana s 11 standardna normalna slučajna varijabla. Prema definiciji 5., dovoljno je dokazati da je funkcija gustoće slučajne varijable Y zadana pravilom 3.

Prema pretpostavci teorema, X je normalna slučajna varijabla, pa je njezina funkcija gustoće zadana pravilom 2. Koristeći 10 za $(a, b) = \left(\frac{1}{\sigma}, -\frac{\mu}{\sigma}\right)$, dobivamo redom:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{1}{\frac{1}{\sigma}} \cdot f_X\left(\frac{1}{\frac{1}{\sigma}} \cdot y - \frac{\frac{-\mu}{\sigma}}{\frac{1}{\sigma}}\right) = \\ &= \sigma \cdot f_X\left(\sigma \cdot y + \mu\right) = \\ &= \sigma \cdot \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(\sigma \cdot y + \mu - \mu)^2}{2\sigma^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-\sigma^2 \cdot y^2}{2 \cdot \sigma^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-y^2}{2}} , \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati.
Preostaje dokazati 12. U tu ćemo svrhu koristiti 4. Znamo da je

$$Y = \frac{1}{\sigma} \cdot X - \frac{\mu}{\sigma} .$$

Odatle slijedi:

$$X = \sigma \cdot Y + \mu . \tag{14}$$

Primjenom 4 dobivamo:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P(X \leq x) = P\left(\sigma \cdot Y + \mu \leq x\right) = \\ &= P\left(Y \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = F_Y\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right), \quad \forall x \in \mathbb{R} , \end{aligned}$$

što je i trebalo dokazati. Time je teorem 11. u cijelosti dokazan. ■

Potpuno analogno kao i teorem 11. dokazuje se malo općenitiji teorem.

Teorem 12. *Neka su $a, b, \mu \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ i $\sigma > 0$ proizvoljne, ali fiksne konstante. Neka su $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ normalna slučajna varijabla i F_X njezina funkcija razdiobe vjerojatnosti. Definiramo slučajnu varijablu:*

$$Y = a \cdot X + b\,. \tag{15}$$

Tada je $Y \sim N\left(a \cdot \mu + b, a^2 \cdot \sigma^2\right)$ i za njezinu funkciju razdiobe vjerojatnosti F_Y vrijedi jednakost:

$$F_X(x) = F_Y(a \cdot x + b), \quad \forall x \in \mathbb{R}\,. \tag{16}$$

Komentar: Od iskaza teorema 11. studenti u pravilu zapamte samo 12 jer tu jednakost "praktično" primjenjuju u rješavanju zadataka. Zbog toga je potrebno posebno naglasiti i komentirati sljedeće važne posljedice teorema 11. i 12.

(1) " Linearna funkcija čuva normalnost slučajne varijable." Preciznije rečeno, kompozicija polinoma 1. stupnja i normalne slučajne varijable je ponovno normalna slučajna varijabla. (Analogan zaključak vrijedi i za još neke neprekidne slučajne varijable, npr. eksponencijalnu slučajnu varijablu. Za detalje vidjeti [1]-[3].)

(2) Pravilo funkcije g definirane s 13 ovisi o parametrima polazne normalne slučajne varijable (za različit izbor (μ, σ) dobivamo različita pravila funkcije g), ali kompozicija te funkcije i polazne normalne slučajne varijable ne ovisi o tim parametrima. Teorem 12. pokazuje da takav zaključak ne vrijedi za bilo koji polinom 1. stupnja.

Važnost prvoga zaključka ogleda se i u sljedećem "dokazu" dijela teorema 12.

"Dokaz" dijela teorema 12. Neka su $X \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ i Y slučajna varijabla definirana s 11. Koristeći napomenu 9. i relacije 7 iz napomene 8 imamo:

$$\begin{aligned} E(Y) &= E(a \cdot X + b) = a \cdot E(X) + b = a \cdot \mu + b \\ \sigma(Y) &= |a| \cdot \sigma(X) = |a| \cdot \sigma\,. \end{aligned}$$

Dakle, $Y \sim N\left(a \cdot \mu + b, a^2 \cdot \sigma^2\right)$."

Većina studenata ne zna objasniti zašto gornji "dokaz" ne predstavlja valjan dokaz teorema 12. (odnosno, za $(a, b) = \left(\frac{1}{\sigma}, -\frac{\mu}{\sigma}\right)$ dokaz teorema 11.) Oni ne uočavaju da gornji "dokaz" zapravo dokazuje (samo) da je Y neka (ne nužno normalna) slučajna varijabla koja ima očekivanje $a \cdot \mu + b$ i standardnu devijaciju $|a| \cdot \sigma$. Ni iz jednoga njegovoga dijela ne slijedi da je Y normalna slučajna varijabla. I ovaj primjer pokazuje koliko je važno u cijelosti razumjeti što sve izriče neka matematička tvrdnja koju je potom potrebno dokazati.

Komentirajmo ukratko relativno čestu tvrdnju da dokaz teorema 11. "izlazi iz okvira gradiva predmeta" (pa se zato i ne navodi). Tu tvrdnju smatramo potpuno valjanom ako studenti prethodno nisu odslušali barem jedan matematički kolegij koji obuhvaća osnove diferencijalnoga i integralnoga računa. Međutim, ako su studenti prethodno odslušali spomenuti kolegij, onda tvrdnju smatramo potpuno neopravdanom. Na temelju vlastitih višegodišnjih nastavnih iskustava tvrdimo da je taj dokaz jedan od tipičnih primjera povezivanja srednjoškolske algebre, matematičke analize i osnovnih pojmova teorije vjerojatnosti. Upravo u spomenutom povezivanju, ali i nedovoljnu znanju i razumijevanju tih pojmova leže osnovni problemi koje studenti imaju s razumijevanjem iskaza i dokaza teorema 11.

4 Primjena teorema o standardizaciji normalne slučajne varijable

"Praktična" primjena teorema 11., odnosno jednakosti 12, odnosi se na rješavanje zadataka u kojima se traži određivanje vjerojatnosti $P(X \leq x)$ za neki "konkretan" $x \in \mathbb{R}$. Nastava iz vjerojatnosti i statistike najčešće se sastoji od predavanja i auditornih vježbi, pa u rješavanju takvih zadataka tehnički nije moguće koristiti računala. Zbog toga se studentima, kao nastavni materijal, daju tablice vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti standardne normalne slučajne varijable, pa se u rješavanju zadataka koriste te tablice i 12. Ovakva praksa ("svođenje bilo koje normalne slučajne varijable na standardnu") nužna pri izvedbi nastave u "klasičnom" ("kreda – ploča") obliku nerijetko uzrokuje potpuno pogrešnu percepciju studenata da je efektivno značajna samo standardna normalna slučajna varijabla, odnosno da bez provedenoga postupka standardizacije u praksi nije moguće odrediti nijednu vrijednost funkcije razdiobe vjerojatnosti proizvoljne normalne slučajne varijable. Zbog toga je metodički opravdano izložiti i na barem dva različita načina riješiti pogodno odabrani primjer koji će pokazati da – u slučajevima kad na raspolaganju imamo računalni program s ugrađenim statističkim funkcijama – nije potrebno standardizirati normalnu slučajnu varijablu.

U nastavku navodimo upravo takav primjer. Riješit ćemo ga "klasično" (primjenom 12.), te koristeći računalne programe MS Excel, MATLAB i Maximu. Osnove rada u MS Excelu studentima Tehničkoga veleučilišta u Zagrebu poznate su još iz srednjoškolskoga obrazovanja, ali se one obrađuju i u jednom od uvodnih informatičkih kolegija na preddiplomskim stručnim studijima (npr. "Primjena osobnih računala u elektrotehnici" , "Računarstvo u graditeljstvu" i dr.). Osnove rada u MATLAB-u obrađuju se u kolegijima "Računarstvo u graditeljstvu", "Matematički alati u elektrotehnici", "Matematički alati u informatici" i "MATLAB". Osnove rada u Maximi studenti stručnoga studija graditeljstva slušaju u okviru kolegija "Računarstvo u graditeljstvu".

Primjer 13. *Neka je $X \sim N\left(10, 5.5^2\right)$. Odredite vjerojatnost da varijabla X poprimi vrijednost između 8 i 13.*

(1) **("klasično") rješenje**: Koristeći 12. i tablicu vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti F^* standardne normalne slučajne varijable dobivamo:

$$\begin{aligned} P(8 \leq X \leq 13) = F(13) - F(8) &= F^*\left(\frac{13-10}{5.5}\right) - F^*\left(\frac{8-10}{5.5}\right) \approx \\ &\approx F^*(0.55) - F^*(-0.36) = \\ &= F^*(0.55) - (1 - F^*(0.36)) = \\ &= 0.70884 + 0.64058 - 1 = 0.34942 \end{aligned}$$

Napomenimo da smo ovdje primijenili i jednakost:

$$F^*(-x) = 1 - F^*(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}\,.$$

(2) **rješenje (pomoću MS Excela)**: Vrijednost funkcije razdiobe vjerojatnosti proizvoljne normalne slučajne varijable u MS Excelu određuje ugrađena funkcija `NORM.DIST`. (Za detalje vidjeti [4].) Ona ima točno četiri ulazne varijable: realan broj za kojega želimo izračunati pripadnu vrijednost funkcije razdiobe vjerojatnosti normalne slučajne varijable, očekivanje normalne slučajne varijable, standardnu devijaciju normalne slučajne varijable i logičku varijablu koja je jednaka 1 ako želimo izračunati vrijednost funkcije razdiobe vjerojatnosti, a 0 ako želimo izračunati vrijednost funkcije gustoće vjerojatnosti. Zbog toga u ovom slučaju u neku slobodnu ćeliju upisujemo:

```
=NORM.DIST(13;10;5,5;1)-NORM.DIST(8;10;5,5;1)
```

Nakon što pritisnemo Enter, MS Excel će ispisati:

```
0,349214748
```

Ako rezultat dobiven u ovom rješenju uzmemo za originalnu vrijednost, a rezultat u 1. rješenju za približnu (aproksimiranu) vrijednost, lako možemo izračunati da greška aproksimacije iznosi približno 0.06%. Osnovni razlog za ovu pogrešku jest nužnost aproksimacije racionalnih brojeva $\frac{13-10}{5.5} = \frac{6}{11}$ i $\frac{8-10}{5.5} = -\frac{4}{11}$ na dvije decimale kako bismo mogli primijeniti tablicu vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti standardne normalne slučajne varijable.

(3) **rješenje (pomoću MATLAB-a)**: Vrijednost funkcije razdiobe vjerojatnosti proizvoljne normalne slučajne varijable u MATLAB-u određuje ugrađena funkcija `normcdf`. (Za detalje vidjeti [5].) Ta funkcija ima točno tri ulazne varijable: realan broj za kojega želimo izračunati pripadnu vrijednost funkcije razdiobe vjerojatnosti normalne slučajne varijable, očekivanje normalne slučajne varijable i standardnu devijaciju normalne slučajne varijable. (Napomenimo da vrijednost funkcije gustoće bilo koje normalne slučajne varijable određuje ugrađena funkcija `normpdf`.) U novi redak MATLAB-ova komandnoga prozora upišemo:

```
normcdf(13,10,5.5)-normcdf(8,10,5.5)
```

Nakon što pritisnemo Enter, MATLAB će ispisati:

```
ans =
    0.349214748287754
```

(4) **rješenje (pomoću Maxime)**: Vrijednost funkcije razdiobe vjerojatnosti proizvoljne normalne slučajne varijable u Maximi određuje ugrađena funkcija `cdf_normal`. (Za detalje vidjeti [6]-[7].) Ta funkcija ima točno tri ulazne varijable: realan broj za kojega želimo izračunati pripadnu vrijednost funkcije razdiobe vjerojatnosti normalne slučajne varijable, očekivanje normalne slučajne varijable i standardnu devijaciju normalne slučajne varijable. (Napomenimo da vrijednost funkcije gustoće bilo koje normalne slučajne varijable određuje ugrađena funkcija `pdf_normal`). Prilikom rada u Maximi najprije je potrebno pozvati paket `distrib` koji sadrži statističke funkcije namijenjene određivanju vjerojatnosti diskretnih i neprekidnih

slučajnih varijabli. Zbog toga u Maximinu bilježnicu (engl.: *notebook*) upišemo:

```
load(distrib)\$
```

Potom pritisnemo Enter, pa upišemo:

```
cdf_normal(13,10,5.5)-cdf_normal(8,10,5.5), numer;
```

Potom pritisnemo tipke Shift i Enter. Maxima će ispisati:

```
0.34921474828775
```

Komentar: Iz rješenja (2)., (3). i (4). razvidno je da ni u jednom od njih nismo provodili standardizaciju zadane normalne slučajne varijable. Studenti uobičajeno smatraju da je ta standardizacija implementirana u računalnom programu. Međutim, to nije točno. Naime, funkcije 2 i 3 nisu elementarno integrabilne, pa za računanje određenih i nepravih integrala računala koriste neku od metoda numeričke matematike namijenjenih približnom određivanju određenoga integrala. (Detalje ovdje izostavljamo, a mogu se naći u [8].) Svaka od tih metoda kao "ulazne varijable" koristi podintegralnu funkciju, donju i gornju granicu područja integracije. Zbog toga je računalnom programu potpuno svejedno hoće li vrijediti jednakost $(\mu, \sigma) = (0, 1)$ ili će vrijednosti μ i σ biti neki drugi realni brojevi (dakako, uz nužan uvjet $\sigma > 0$). Drugim riječima, računalni program će – koristeći implementirane algoritme za približno određivanje određenih i nepravih integrala – približno odrediti određeni ili nepravi integral u kojemu je 2 podintegralna funkcija i pritom neće provoditi standardizaciju.

5 Zaključak

U nastavi vjerojatnosti i statistike na našim veleučilištima i samostalnim visokim školama iskazuju se i neki teoremi (npr. granični teoremi u Bernoullijevoj shemi) čiji dokazi izlaze iz postavljenoga okvira kolegija i zahtijevaju više matematičkoga predznanja studenata. U takve teoreme često se ubraja i teorem o standardizaciji normalne slučajne varijable.

Izostavljanje njegova dokaza smatramo smislenim jedino u slučaju kada studenti nisu odslušali osnovne matematičke kolegije iz diferencijalnoga i integralnoga računa. Međutim, ako su studenti prethodno odslušali te kolegije, onda smatramo da taj teorem treba iskazati, dokazati i komentirati njegov praktični značaj. Smatramo da svakako treba istaknuti da je teorem značajan samo u slučajevima u kojima vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti bilo koje normalne slučajne varijable određujemo korištenjem tablica vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti standardne normalne slučajne varijable (bez korištenja računalnih programa s ugrađenim statističkim funkcijama). Štoviše, studenti trebaju usvojiti da računalni programi s ugrađenim statističkim funkcijama ispravno određuju vrijednosti funkcije razdiobe vjerojatnosti (i funkcije gustoće) proizvoljne normalne slučajne varijable. Time se ujedno i uklanja pogrešna predodžba studenata o standardnoj normalnoj slučajnoj varijabli kao jedinoj „praktično važnoj" normalnoj slučajnoj varijabli.

Bibliografija

[1] M. Benšić, N. Šuvak (2013): Uvod u vjerojatnost i statistiku, Odjel za matematiku Sveučilišta u Osijeku, Osijek.

[2] N. Elezović (2018.): Vjerojatnost i statistika, Element, Zagreb.

[3] S. Suljagić (2003.): Vjerojatnost i statistika, skripta, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb.

[4] M. Papić (2018.): Primijenjena statistika u MS Excelu (6. izdanje), Likarija d.o.o., Zagreb.

[5] B. Kovačić (2013.): Matematički alati u elektrotehnici, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb.

[6] M. Orlić Bachler, I. Volarić (2020.): Osnove računalnog programa Maxima, Tehničko veleučilište u Zagrebu, Zagreb.

[7] M. Orlić Bachler (2018.): O primjeni programa Maxima u nastavi predmeta Vjerojatnost i statistika na specijalističkom stručnom studiju graditeljstva, Math.e: hrvatski matematički elektronski časopis, 33 (2018.), 2; 40-48

[8] Z. Drmač et. al. (2003.): Numerička analiza, PMF – Matematički odsjek Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.

ISSN 1334-6083