

# Primjena linearne algebre na rješavanje običnih linearnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda

Filip Vučić,  
I. gimnazija, Zagreb

## 1 Uvod

Obična linearna diferencijalna jednadžba (OLDJ)  $n$ -tog reda je svaka diferencijalna jednadžba koja se može zapisati u obliku:

$$y^{(n)}(x) + f_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + f_1(x)y^{(1)}(x) + f_0(x)y(x) = h(x) \quad (1)$$

pri čemu su  $f_i$  i  $h$  bilo koje neprekinute funkcije na intervalu  $I$ , a  $y$  je nepoznata funkcija koja se traži tako da zadovoljava (1) za svaki  $x \in I$ . Funkcija  $y^{(k)}$  je  $k$ -ta derivacija funkcije  $y$  po nezavisnoj varijabli  $x$ . U članku je pokazana primjena nekih osnovnih stavaka linearne algebre na opći postupak rješavanja OLDJ drugog reda koje se često pojavljuju u fizici<sup>1</sup>. Opisan je postupak rješavanja OLDJ drugog reda korištenjem determinante Wronskog i Cramerovog pravila. Dokazan je teorem o linearnoj nezavisnosti funkcija. Izveden je Sturm-Liouvilleov teorem ortogonalnosti rješenja Sturm-Liouvilleovog problema (koji je linearna diferencijalna jednadžba drugog reda u posebnoj formi i uz rubne uvjete umjesto početnih) i pokazana je primjena tog teorema na rješavanje OLDJ drugog reda metodom Greenovih funkcija. Osnovni pojmovi vezani uz vektorske prostore (definicija, baza, dimenzija, linearna nezavisnost vektora, skalarni produkt i norma na unitarnim prostorima) kratko su izloženi u članku, no čitatelju koji želi detaljniji uvid u te koncepte preporučuje se [1, 2, 3]. Za širu teoriju o (linearnim) diferencijalnim jednadžbama čitatelja navodimo na [4, 5], za metode rješavanja i primjene na [6, 7], dok se u zbirkama zadataka [8, 9] mogu pronaći mnogi zadatci s izloženim metodama rješavanja.

## 2 Osnovno o vektorskim prostorima

Prije nego li se krene u razmatranje predmeta članka potrebno je motivirati i definirati osnovne pojmove linearne algebre koji će se koristiti u daljnjem tekstu, a tiču se vektorskih prostora. Najprije će biti definiran pojam (apstraktnog) vektorskog prostora, a zatim će kroz primjer prostora u klasičnoj mehanici ista definicija biti motivirana.

---

<sup>1</sup>Valja se sjetiti da je II. Newtonov zakon diferencijalna jednadžba drugog reda jer izražava akceleraciju koja je druga derivacija funkcije položaja po vremenu.

**Definicija 1.** Neka je  $V$  neprazan skup,  $\mathbb{F}$  polje<sup>2</sup> te neka je  $V$  zatvoren s obzirom na operacije zbrajanja i množenja vektora skalarom, tj.  $+$  :  $V \times V \rightarrow V$  i  $\cdot$  :  $\mathbb{F} \times V \rightarrow V$ . Uređena trojka  $(V, +, \cdot)$  vektorski je prostor nad poljem  $\mathbb{F}$  ako vrijedi:

1. komutativnost zbrajanja vektora: za sve  $x, y \in V$  vrijedi  $x + y = y + x$ ;
2. asocijativnost zbrajanja vektora: za sve  $x, y, z \in V$  vrijedi  $(x + y) + z = x + (y + z)$ ;
3. egzistencija neutralnog elementa za zbrajanje: postoji  $0 \in V$  takav da za sve  $x \in V$  vrijedi  $x + 0 = x$ ;
4. egzistencija inverza za zbrajanje: za svaki  $x \in V$  postoji  $x' \in V$  takav da vrijedi  $x + x' = 0$ ;
5. usklađenost množenja vektora skalarom: za sve  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  i sve  $x \in V$  vrijedi  $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ ;
6. distributivnost množenja skalarom prema zbrajanju vektora: za sve  $x, y \in V$  i sve  $\alpha \in \mathbb{F}$  vrijedi  $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ ;
7. distributivnost množenja vektorom prema zbrajanju skalara: za sve  $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$  i sve  $x \in V$  vrijedi  $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ ;
8. egzistencija neutralnog elementa za množenje vektora skalarom: postoji  $1 \in \mathbb{F}$  takav da za sve  $x \in V$  vrijedi  $1 \cdot x = x$ .

Kao malu vježbu, dokažimo da uz gornja svojstva za svaki  $x \in V$  vrijedi  $0 \cdot x = 0$ , pri čemu je na lijevoj strani jednakosti  $0$  neutralni element za zbrajanje u  $\mathbb{F}$  (za sve  $\alpha \in \mathbb{F}$  vrijedi  $\alpha + 0 = 0 + \alpha = 0$ ), dok je na desnoj strani  $0 \in V$  neutralni element za zbrajanje u smislu uvjeta 3. Zaista, kako je  $0 = 0 + 0$ , koristeći svojstvo 7 imamo  $0 \cdot x = (0 + 0) \cdot x = 0 \cdot x + 0 \cdot x$ . Sada dodavanjem inverza za zbrajanje elementa  $0 \cdot x \in V$  (koji postoji po uvjetu 4) na obje strane jednakosti konačno dobivamo  $0 \cdot x = 0$ . Dodatno, za svaki  $x \in V$  vrijedi  $0 = 0 \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x = 1 \cdot x + (-1) \cdot x = x + (-x)$ , pri čemu su redom korištene prethodno izvedena relacija, činjenica da je  $-1$  inverzan element elementu  $1$  za zbrajanje u polju  $\mathbb{R}$  ili  $\mathbb{C}$  te svojstva 7 i 8. Dakle, suprotni je element za zbrajanje vektora  $x$  vektor  $(-1) \cdot x$ , a onda je prirodno uvesti i kraću oznaku:  $-x := (-1) \cdot x$ .

Izrečena definicija vektorskog prostora može se motivirati na primjeru prostora u klasičnoj mehanici. Prostor u klasičnoj mehanici jeste skup svih točaka u svemiru. Neka je  $T$  točkasto tijelo. Translacija (pomak) tijela  $T$  je svaka promjena točke u kojoj se  $T$  nalazi. Promatramo pomak tijela  $T$  iz točke  $T_1$  u točku  $T_2$ . Usmjereni dužina od točke  $T_1$  do točke  $T_2$  naziva se vektor i označava se s  $\overrightarrow{T_1 T_2}$ . Sada promotrimo skup svih vektora pomaka tijela  $T$ . Neka su  $\vec{x}$  i  $\vec{y}$  dva takva vektora pomaka. Neovisno o tome pomakne li se tijelo prvo za vektor  $\vec{x}$ , a zatim za vektor  $\vec{y}$  ili obratno, ono će doći u istu točku prostora. To je prvi uvjet iz definicije 1, a ovaj primjer odmah tumači

<sup>2</sup>Pojam polja neće biti definiran u članku, no definicija se može naći u [1, 2]. Čitatelj može zamisliti da se radi o skupu  $\mathbb{R}$  ili  $\mathbb{C}$  s uobičajenim operacijama zbrajanja i množenja na tim skupovima.

i zatvorenost skupa  $V$  na zbrajanje vektora. Analogno se tumači i asocijativnost zbrajanja vektora. Nadalje, neka je  $\vec{x}$  pomak tijela  $T$  iz točke  $T_0$  u točku  $T_1$ . Tada se tom pomaku može dodati pomak iz točke  $T_1$  u točku  $T_1$  (dakle tijelo je obišlo zatvorenu petlju kroz  $T_1$ ) koji se označava s  $\vec{0}$ . Tada je zaista  $\vec{x} + \vec{0} = \vec{x}$  pa vrijedi i uvjet 3. Uvjet 4 jednostavno govori da za svaki pomak nekog tijela postoji suprotan pomak koji vraća tijelo u početni položaj. Za razmatranje ostalih uvjeta valja uočiti da je u klasičnoj mehanici polje  $\mathbb{F}$  polje realnih brojeva  $\mathbb{R}$  pa uvjeti 5-8 postaju jasni ako se množenje skalarom shvaća kao produživanje ili skraćivanje pomaka. Dakle, uvjeti 1-8 iz definicije 1 nisu nasumično odabrani već su odabrani kako bi vektorski prostor bio pojam koji odgovara matematičkom modelu nekih pojava u prirodi. Čitatelje koje zanima formalni pristup prostoru i vremenu u klasičnoj mehanici kroz vektorske prostore i ostale algebarske strukture upućuje se na [10].

**Definicija 2.** Neka je  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  skup vektora iz vektorskog prostora  $V$  nad poljem  $\mathbb{F}$ . Izraz oblika  $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ , pri čemu je  $\alpha_i \in \mathbb{F}$  za sve  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , naziva se linearna kombinacija vektora skupa  $S$ . Skup vektora  $S$  linearno je nezavisan ako vrijedi sljedeće:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0 \iff (\forall i = 1, 2, \dots, n) \alpha_i = 0.$$

**Definicija 3.** Neka je  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  skup vektora iz vektorskog prostora  $V$  nad poljem  $\mathbb{F}$ . Linearna ljuska skupa  $S$  definirana je na način:

$$\text{span}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i : k \in \mathbb{N}, \alpha_i \in \mathbb{F}, x_i \in S \right\}.$$

Skup  $S$  je sustav izvodnica za  $V$  ako vrijedi  $\text{span}(S) = V$ .

Zanimljivo je primijetiti da ako je  $V$  vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{F}$  i  $S \subseteq V$  neki skup vektora, onda je  $\text{span}(S)$  vektorski potprostor prostora  $V$  nad poljem  $\mathbb{F}$ . To se može dokazati direktno iz definicije 1 pri čemu svojstva 1, 2, 5, 6, 7 i 8 slijede direktno iz uvjeta  $S \subseteq V$ , a svojstva 3, 4 i zatvorenost na zbrajanje i množenje skalarom dokazuju se direktnom provjerom. Naime, svojstvo 3 zahtijeva da se pokaže kako postoji  $0 \in \text{span}(S)$ , a to odmah slijedi izborom  $\alpha_i = 0$  za sve  $i = 1, 2, \dots, n$ . Svojstvo 4 slijedi iz činjenice da je suprotan element vektora  $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \in \text{span}(S)$  vektor  $-\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^k (-\alpha_i) x_i \in \text{span}(S)$ . Zatvorenost na zbrajanje i množenje skalarom ostavljeni su čitatelju za samostalnu provjeru.

**Definicija 4.** Skup vektora  $B$  iz vektorskog prostora  $V$  je baza za  $V$  ako je  $B$  linearno nezavisan sustav izvodnica za  $V$ . Kardinalni broj skupa  $B$  naziva se dimenzija prostora  $V$  i označava se s  $\dim(V)$ . Prostor  $V$  je konačnodimenzionalan ako je broj  $\dim(V)$  konačan.

Vektorski prostor svih prostornih pomaka nekog tijela ima dimenziju tri jer postoje najviše tri linearno nezavisna pomaka, a svaki se drugi pomak može prikazati kao linearna kombinacija tih pomaka. Neformalno rečeno, svaki se pomak može rastaviti na pomak po širini, visini i dubini nekog zamišljenog kvadra u prostoru. Ilustracije radi spomenimo kako dva linearno nezavisna vektora pomaka razapinju linearnu ljusku svih vektora pomaka koji leže u istoj ravnini kao i dva zadana vektora.

Sada su definirani osnovni pojmovi vezani uz sve vektorske prostore, međutim, u skupu svih vektorskih prostora postoji posebna klasa vektorskih prostora koji se nazivaju unitarni prostori. Vektorski prostor je unitaran ako je snabdjeven skalarnim produktom. Ispod slijedi definicija skalarnog produkta na vektorskom prostoru.

**Definicija 5.** Neka je  $V$  vektorski prostor nad poljem  $\mathbb{F}$  ( $\mathbb{F} = \mathbb{R}$  ili  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ). Skalarni produkt na  $V$  je preslikavanje  $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$  sa sljedećim svojstvima:

1. nenegativnost: za sve  $x \in V$  vrijedi  $\langle x, x \rangle \geq 0$ ,  $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$ ;
2. homogenost: za sve  $x, y \in V$  i sve  $\lambda \in \mathbb{F}$  vrijedi  $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ ;
3. hermitska simetričnost: za sve  $x, y \in V$  vrijedi  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ ;
4. linearnost: za sve  $x, y, z \in V$  vrijedi  $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$ .

U svojstvu 3 potez predstavlja konjugiranje kompleksnog broja. Skalarni produkt omogućuje uvođenje geometrije na vektorskom prostoru. Tako primjerice za dva vektora  $x, y \in V$  kažemo da su ortogonalni (ili okomiti) ako vrijedi  $\langle x, y \rangle = 0$ . Uočimo da je nulvektor  $0$  ortogonalan s obzirom na svaki vektor. Naime, po svojstvu 4 iz definicije 5 (koristeći svojstvo 3 iz definicije 1) za svaki  $x \in V$  imamo  $\langle 0, x \rangle = \langle 0 + 0, x \rangle = \langle 0, x \rangle + \langle 0, x \rangle$ . Odavde jednostavno slijedi  $\langle 0, x \rangle = 0$ . Isto tako može se definirati duljina vektora  $x \in V$  kao  $\sqrt{\langle x, x \rangle} =: \|x\|$ . Preslikavanje  $x \mapsto \|x\|$  naziva se norma (inducirana skalarnim produktom). Kako su uvedeni pojam ortogonalnosti dvaju vektora i norma vektora, može se definirati ortonormirani skup vektora iz unitarnog prostora.

**Definicija 6.** Neka je  $V$  unitaran prostor snabdjeven skalarnim produktom  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  i  $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$  bilo koji prebrojiv skup vektora iz  $V$  koji ne sadrži nulvektor. Za skup vektora  $S$  kažemo da je ortonormiran ako za sve  $x_i, x_j \in S$  vrijedi  $\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$ , pri čemu je  $\delta_{ij}$  Kroneckerova delta funkcija:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}.$$

Ako je ortonormirani skup vektora  $S$  iz prostora  $V$  baza za  $V$ , tada je skup  $S$  ortonormirana baza za  $V$ .

Dokažimo ovdje da je svaki konačan podskup ortonormiranog skupa linearno nezavisan. Promotrimo proizvoljan konačan podskup vektora  $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$  ortonormiranog skupa  $S$ . Definicija 2 sugerira da valja promatrati linearnu kombinaciju vektora  $x_1, x_2, \dots, x_n$  koja iščezava. Na jednakost iščezavajuće linearne kombinacije valja primijeniti i skalarni produkt s vektorom  $x_k$  za neki  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = 0 \implies \langle \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i, x_k \rangle = \langle 0, x_k \rangle.$$

Prema ranijoj diskusiji znamo da je desna strana jednakosti jednaka 0, dok se lijeva strana prema svojstvima 2 i 4 može raspisati na način:

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \langle x_i, x_k \rangle = 0.$$

Kako je skup  $S$  ortonormiran, a  $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ , to prema definiciji 6 slijedi  $\langle x_i, x_k \rangle = \delta_{ik}$ . Uvrštavanjem toga u prethodnu jednakost dobiva se  $\alpha_k = 0$ . Kako je  $k$  proizvoljan indeks iz skupa  $\{1, 2, \dots, n\}$ , to slijedi da je  $\alpha_k = 0$  za sve  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  pa je prema definiciji 2 skup vektora  $x_1, x_2, \dots, x_n$  zaista linearno nezavisan.

Nadalje, promotrimo kako neki proizvoljan vektor  $x \in V$  zapisati u ortonormiranoj bazi  $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  za prostor  $V$ . Zahtijeva se da je linearna kombinacija vektora baze jednaka promatranom vektoru  $x$ :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = x.$$

Obje strane prethodne jednakosti skalarno pomnožimo s vektorom  $e_k \in S$  za proizvoljni indeks  $k$  te uvažimo svojstva 2 i 4 iz definicije 5:

$$\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i e_i, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle \iff \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle e_i, e_k \rangle = \langle x, e_k \rangle.$$

Kako je  $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  ortonormiran skup vektora, to prema definiciji 6 slijedi  $\langle e_i, e_k \rangle = \delta_{ik}$ . Uvrštavanjem toga u prethodnu jednakost dobiva se  $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle$ . Kako je  $k$  proizvoljan indeks, to slijedi da za sve  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  vrijedi  $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle$ . Stoga je zapis vektora  $x$  u ortonormiranoj bazi  $S$  dan izrazom:

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Unitarni prostori koji će se promatrati u članku bit će u klasi Hilbertovih prostora. Za definiciju Hilbertovog prostora potrebno je uvesti pojam potpunosti.

**Definicija 7.** Neka je  $V$  normiran prostor i  $(x_k, k \in \mathbb{N})$  niz vektora iz vektorskog prostora  $V$ , tj.  $x_k \in V$  za sve  $k \in \mathbb{N}$ . Ako za svaki  $\varepsilon > 0$  postoji prirodan broj  $n = n(\varepsilon)$  takav da za sve prirodne brojeve  $m, l \geq n$  vrijedi  $\|x_m - x_l\| \leq \varepsilon$ , onda je niz vektora  $(x_k)$  Cauchyev. Vektorski prostor  $V$  je potpun ako svaki Cauchyev niz u  $V$  konvergira.

Sljedeći teorem daje karakterizaciju potpunog prostora s apsolutno konvergentnim redovima, a njegov se dokaz može naći u [11].

**Teorem 1.** Normiran prostor  $V$  je potpun ako i samo ako svaki apsolutno konvergentan red vektora iz  $V$  konvergira u  $V$ , tj. ako i samo ako za svaki niz vektora  $(x_n, n \in \mathbb{N})$  iz  $V$  vrijedi sljedeće:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| < \infty \implies (\exists x_0 \in V) \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{i=1}^n x_i - x_0 \right\| = 0.$$

Sada je konačno moguće definirati Hilbertov prostor. To je potpun vektorski prostor snabdjeven skalarnim produktom, odnosno to je potpun unitaran prostor. Za detaljna razmatranja o Hilbertovim prostorima čitatelje se upućuje na [11].

Zanimljivo je ovdje istaknuti da je svaki konačnodimenzionalni unitarni prostor Hilbertov. Jedan konačnodimenzionalni unitarni prostor jeste  $n$ -dimenzionalni euklidski prostor  $\mathbb{R}^n := \underbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ puta}}$ . To je vektorski prostor nad poljem realnih brojeva

čiji su elementi uređene  $n$ -torke realnih brojeva uz uobičajene operacije zbrajanja i množenja skalarom:

- $(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$
- $\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$

Kanonski skalarni produkt na  $\mathbb{R}^n$  dan je s:

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i,$$

i s njim je dana standardna (euklidska) geometrija na  $\mathbb{R}^n$ . Ortonormiranu (ili kanonsku) bazu na  $\mathbb{R}^n$  čine vektori  $e_i = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{i\text{-ti položaj}}, 0, \dots, 0)$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

Osim konačnodimenzionalnog euklidskog prostora  $\mathbb{R}^n$ , u članku će biti korišten i beskonačnodimenzionalan Hilbertov prostor svih kvadratno integrabilnih funkcija na zatvorenom intervalu  $[a, b]$ . Taj se prostor naziva Lebesgueov prostor kvadratno integrabilnih funkcija i označava se s  $L^2[a, b, r(x)dx]$  (vidjeti [12]). Ovdje je  $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^+$  bilo koja po dijelovima neprekinuta integrabilna funkcija na intervalu  $[a, b]$ . Prostor  $L^2[a, b, r(x)dx]$  snabdjeven je težinskim skalarnim produktom:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)r(x)dx. \quad (2)$$

Vektori u prostoru  $L^2[a, b, r(x)dx]$  su sve funkcije realne varijable  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  za koje integral  $\langle f, f \rangle$  konvergira. Direktno iz definicije 1 može se pokazati da je tako definirani prostor  $L^2[a, b, r(x)dx]$  realni vektorski prostor te da je s (2) dan skalarni produkt na tom prostoru. Ipak, istaknimo da elementi tog vektorskog prostora nisu funkcije, već klase ekvivalencije (dvije funkcije su ekvivalentne ako se razlikuju samo na skupu mjere 0, tj. ako su jednake gotovo svugdje). Razlog leži u činjenici da svojstvo 1 definicije 5 ne bi bilo zadovoljeno kad bi elementi prostora  $L^2[a, b, r(x)dx]$  bile sve kvadratno integrabilne funkcije. Primjerice, sljedeća je funkcija  $f$  kvadratno integrabilna na intervalu  $[0, 1]$  i vrijedi  $\langle f, f \rangle = 0$ , ali ne vrijedi  $f \equiv 0$ :

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\} \\ 1, & x = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Naravno, za neprekidne funkcije to se ne može dogoditi, tj. ako je  $f$  neprekidna i  $\langle f, f \rangle = 0$ , onda je  $f \equiv 0$ . Kako su rješenja običnih diferencijalnih jednadžbi neprekidne funkcije, čitatelj dalje u članku može uzimati da su elementi prostora  $L^2[a, b, r(x)dx]$  kvadratno integrabilne funkcije i ne mora voditi računa o tome da se zapravo radi o klasama ekvivalencije funkcija, no radi točnosti i preciznosti to je bilo nužno istaknuti (za više detalja upućujemo na [12]).

Čim je uveden skalarni produkt, odmah se može definirati i ortogonalnost dviju funkcija  $f$  i  $g$ . Za funkcije  $f, g \in L^2[a, b, r(x)dx]$  kažemo da su ortogonalne ako je  $\langle f, g \rangle = 0$ . Također, prema definiciji 6 uvodi se i ortonormiran sustav funkcija iz  $L^2[a, b, r(x)dx]$ . Konačno se postavlja pitanje kako uvesti (ortonormiranu) bazu na prostoru  $L^2[a, b, r(x)dx]$  s obzirom na to da je taj prostor beskonačnodimenzionalan. Prvi korak k odgovoru na to pitanje daje sljedeći teorem.

**Teorem 2** (Besselova nejednakost). Neka je  $y_1, y_2, \dots, y_n, \dots, n \in \mathbb{N}$ , beskonačan prebrojiv ortonormiran sustav funkcija iz prostora  $L^2[a, b, r(x)dx]$  i neka je  $f$  proizvoljna funkcija iz prostora  $L^2[a, b, r(x)dx]$ . Tada vrijedi Besselova nejednakost:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, y_n \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle.$$

Ako se u gornjoj nejednakosti postiže jednakost, onda vrijedi:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, y_n \rangle y_n.$$

*Dokaz.* Iz svojstva 1 definicije 5 slijedi da za svaki  $k \in \mathbb{N}$  vrijedi:

$$0 \leq \langle f - \sum_{n=1}^k \langle f, y_n \rangle y_n, f - \sum_{n=1}^k \langle f, y_n \rangle y_n \rangle.$$

Uvažavanjem svojstava 2-4 iz definicije 5 desna strana prethodne nejednakosti može se pisati u formi:

$$\begin{aligned} \langle f, f \rangle - 2 \sum_{n=1}^k \langle f, \langle f, y_n \rangle y_n \rangle + \sum_{n=1}^k |\langle f, y_n \rangle|^2 \\ = \langle f, f \rangle - 2 \sum_{n=1}^k |\langle f, y_n \rangle|^2 + \sum_{n=1}^k |\langle f, y_n \rangle|^2 \\ = \langle f, f \rangle - \sum_{n=1}^k |\langle f, y_n \rangle|^2. \end{aligned}$$

Iz prethodne nejednakosti sada slijedi da za svaki  $k \in \mathbb{N}$  vrijedi  $\sum_{n=1}^k |\langle f, y_n \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle$ , a iz toga odmah slijedi i Besselova nejednakost. Promotrimo sada red  $\sum_{n=1}^{\infty} \langle f, y_n \rangle y_n$ . Iz Besselove nejednakosti slijedi da taj red apsolutno konvergira pa iz činjenice da je  $L^2[a, b, r(x)dx]$  potpun prostor i teorema 1 slijedi da taj red konvergira k nekom vektoru iz  $L^2[a, b, r(x)dx]$ . Ako se u Besselovoj nejednakosti postiže jednakost, onda po gornjem računu nužno vrijedi  $0 = \langle f - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, y_n \rangle y_n, f - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, y_n \rangle y_n \rangle$ . Tada prema svojstvu 1 iz definicije 5 slijedi  $f - \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, y_n \rangle y_n = 0$ , tj. promatrani red zaista konvergira k funkciji  $f$ .  $\square$

Besselova nejednakost vrijedi za svaki ortonormiran sustav funkcija, no zanimljivo je promotriti slučaj kada za svaku funkciju  $f \in L^2[a, b, r(x)dx]$  vrijedi jednakost. Tada po prethodnom teoremu vrijedi:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \langle f, y_n \rangle y_n = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \langle f, y_n \rangle y_n.$$

Kako je  $\sum_{n=1}^k \langle f, y_n \rangle y_n \in \text{span}\{y_i, i \in \mathbb{N}\}$ , imamo da se svaka funkcija  $f \in L^2[a, b, r(x)dx]$  može prikazati kao limes niza iz  $\text{span}\{y_i, i \in \mathbb{N}\}$  (odnosno zatvarač skupa  $\text{span}\{y_i, i \in \mathbb{N}\}$  jednak je cijelom prostoru  $L^2[a, b, r(x)dx]$ ). To je ipak slabije svojstvo od onog traženog u definicijama 3 i 4 pa skup  $\{y_i, i \in \mathbb{N}\}$  formalno nije (algebarska) baza prostora  $L^2[a, b, r(x)dx]$ . Međutim, u praksi nam je i ovo svojstvo dovoljno pa u tom slučaju kažemo da je skup  $\{y_i, i \in \mathbb{N}\}$  ortonormirana baza prostora  $L^2[a, b, r(x)dx]$ .

Posljednja dva pojma koji će biti korišteni u članku, a vezani su uz vektorske prostore jesu linearni operatori i njihove vlastite (ili svojstvene) vrijednosti. Njihove definicije navedene su u nastavku.

**Definicija 8.** Neka su  $V$  i  $W$  vektorski prostori nad istim poljem  $\mathbb{F}$ , a  $L : V \rightarrow W$  preslikavanje iz prostora  $V$  u prostor  $W$ . Za preslikavanje  $L$  kažemo da je linearni operator ako za sve  $x, y \in V$  i sve  $\lambda \in \mathbb{F}$  vrijedi:

1. aditivnost:  $L(x + y) = L(x) + L(y)$
2. homogenost:  $L(\lambda x) = \lambda L(x)$ .

**Definicija 9.** Neka je  $L : V \rightarrow V$  linearni operator. Vektor  $x \in V \setminus \{0\}$  naziva se vlastiti (ili svojstveni) vektor operatora  $L$  ako postoji skalar  $\lambda \in \mathbb{F}$  takav da vrijedi  $L(x) = \lambda x$ . Skalar  $\lambda$  naziva se vlastita vrijednost operatora  $L$ . Ako vrijedi  $L(x) = \lambda x$ , kažemo da je vlastiti vektor  $x$  operatora  $L$  pridružen vlastitoj vrijednosti  $\lambda$  operatora  $L$ .

### 3 Vektorski prostor rješenja homogene OLDJ drugog reda

Prema (1), opća forma nehomogene OLDJ drugog reda je:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = h(x), \quad (3)$$

gdje su  $f, g, h$  neprekinute funkcije. U ovom dijelu promatraju se rješenja homogene jednadžbe koja odgovara općoj formi (3), a ta pripadajuća homogena forma glasi:

$$y'' + f(x)y' + g(x)y = 0. \quad (4)$$

Za nastavak razmatranja rješenja jednadžbe (4) potrebni su određeni rezultati koji vrijede općenito za jednadžbu (1), a zatim specijalno i za jednadžbe (3) i (4). Ti su rezultati navedeni u nastavku.

Da bi neka funkcija  $y$  bila rješenje jednadžbe (1) na nekom otvorenom intervalu  $I$ , nužno je da  $y$  bude barem  $n$  puta derivabilna na intervalu  $I$ . Iz tog razloga zahtijeva se da  $y$  pripada prostoru  $C^n(I)$ , što znači da je  $y$  barem  $n$  puta derivabilna na  $I$  i da je  $n$ -ta derivacija  $y^{(n)}$  neprekinuta funkcija na intervalu  $I$ .

Također, da bi rješenje jednadžbe (1) na intervalu  $I$  bilo jedinstveno, dovoljno je u nekoj točki  $x_0 \in I$  zadati  $n$  uvjeta oblika  $y^{(i-1)}(x_0) = C_i$ ,  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , pri čemu je  $C_i$  neka realna konstanta za svaki indeks  $i$ . Problem određivanja rješenja jednadžbe (1) uz navedene uvjete naziva se Cauchyjev problem. Osim što je rješenje Cauchyjevog problema jedinstveno, može se dokazati i da ono postoji. Dokaz teorema o postojanju i jedinstvenosti rješenja Cauchyjevog problema može se pronaći u [4].

**Lema 1.** Skup svih funkcija  $y(x)$  koje na nekom intervalu  $I$  zadovoljavaju (3) čini vektorski prostor  $V$  nad poljem realnih brojeva s obzirom na uobičajene operacije zbrajanja i množenja.

*Dokaz.* Neka je  $S$  skup svih funkcija  $y \in C^2(I)$  koje na otvorenom intervalu  $I$  zadovoljavaju (4). Da bi neka trojka  $(S, +, \cdot)$  bila vektorski prostor, moraju vrijediti uvjeti 1-8 iz definicije 1 i zatvorenost na zbrajanje i množenje skalarom. Prvo primijetimo da zbog linearnosti jednadžbe (4) vrijedi da ako su  $y_1$  i  $y_2$  bilo koja dva rješenja od



(4), onda je i njihova linearna kombinacija  $\alpha y_1 + \beta y_2$  također rješenje od (4) za sve realne skalare  $\alpha, \beta$ . Stoga uobičajene operacije zbrajanja i množenja zadovoljavaju uvjete zatvorenosti u  $S$ . Sada samo preostaje provjeriti jesu li zadovoljeni uvjeti 1-8 iz definicije 1. Iz činjenice da je  $C^2(I)$  vektorski prostor slijede sva svojstva 1-8 osim svojstava 3 i 4. Stoga preostaje dokazati da vrijede svojstva 3 i 4. Kako funkcija  $y = 0$  zadovoljava (4), to slijedi da je  $0 \in S$  pa treća tvrdnja zaista vrijedi. Isto tako, ako je  $y$  rješenje od (4), onda je i  $y_0 = -y$  također rješenje od (4) pa vrijedi i četvrto. Dakle,  $(S, +, \cdot)$  zaista je vektorski prostor nad poljem realnih brojeva.  $\square$

Sad kad je definiran vektorski prostor  $V$ , prirodno je zapitati se kolika je njegova dimenzija. O dimenziji vektorskog prostora  $V$  govori sljedeći teorem.

**Teorem 3.** Dimenzija vektorskog prostora  $V$  jednaka je 2, tj.  $\dim(V) = 2$ .

*Komentar.* Kako bi se čitatelju dao određeni uvid u matrice i determinante Wronskog, prvo će biti dokazano da je dimenzija vektorskog prostora  $V_n$  rješenja homogene OLDJ koja pripada (1), a dobije se uz  $h(x) = 0$ , manja od  $n + 1$ , tj.  $\dim(V_n) < n + 1$  gdje je  $n$  red homogene OLDJ. Zatim je teže dokazati da je  $\dim(V_n) > n - 1$  pa će se dokaz tu ograničiti samo na tvrdnju teorema za OLDJ drugog reda.  $\square$

*Dokaz da je  $\dim(V_n) < n + 1$ .* Pretpostavimo suprotno, tj. da je  $\dim(V_n) \geq n + 1$ . Tada postoji barem  $n + 1$  linearno nezavisnih funkcija  $y_1, \dots, y_{n+1}$  koje zadovoljavaju pripadajuću homogenu jednadžbu od (1) na  $I$ , a za njih još dodatno vrijedi uvjet linearne nezavisnosti na  $I$ :

$$\alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n + \alpha_{n+1} y_{n+1} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \dots = \alpha_n = \alpha_{n+1} = 0, \quad (5)$$

pri čemu je  $\alpha_i$  realna konstanta za svaki indeks  $i$ . Derivirajmo uvjet (5)  $n$  puta i zapišimo dobiveni sustav jednadžbi u matricnom obliku:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha_1 y_1 + \dots + \alpha_n y_n + \alpha_{n+1} y_{n+1} = 0 \\ \alpha_1 y_1^{(1)} + \dots + \alpha_n y_n^{(1)} + \alpha_{n+1} y_{n+1}^{(1)} = 0 \\ \vdots \\ \alpha_1 y_1^{(n)} + \dots + \alpha_n y_n^{(n)} + \alpha_{n+1} y_{n+1}^{(n)} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \quad (6)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & \dots & y_n & y_{n+1} \\ y_1^{(1)} & \dots & y_n^{(1)} & y_{n+1}^{(1)} \\ \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} & y_{n+1}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow W \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \\ \alpha_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu je matrica sustava u izrazu (6) označena s  $W$ . Ta se matricna funkcija naziva matrica Wronskog, a determinanta te matrice naziva se Wronskijan ili determinanta Wronskog.

Dalje valja iskoristiti uvjet da  $y_1, \dots, y_{n+1}$  zadovoljavaju pripadnu homogenu jednadžbu od (1). To daje sustav jednadžbi:

$$\left. \begin{array}{l} y_1^{(n)} + f_{n-1}(x)y_1^{(n-1)} + \dots + f_1y_1^{(1)} + f_0y_1 = 0 \\ \vdots \\ y_{n+1}^{(n)} + f_{n-1}(x)y_{n+1}^{(n-1)} + \dots + f_1y_{n+1}^{(1)} + f_0y_{n+1} = 0 \end{array} \right\} \iff (7)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_1^{(1)} & \dots & y_1^{(n)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_n & y_n^{(1)} & \dots & y_n^{(n)} \\ y_{n+1} & y_{n+1}^{(1)} & \dots & y_{n+1}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \iff W^T \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu je u (7) prepoznata transponirana matrica Wronskog  $W^T$ . Iz matricnog zapisa (7) vidi se da matrica  $W^T$  ne smije imati inverz niti u jednoj točki intervala  $I$  jer bi u suprotnom vrijedilo da je  $1 = 0$  (zadnji redak zapisa sustava). Kako za svaku kvadratnu matricu  $M$  vrijedi da ima inverz (s obzirom na matricno množenje) ako i samo ako je  $\det(M) \neq 0$ , to slijedi  $\det(W^T) = 0$  na cijelom  $I$ . Za svaku kvadratnu matricu  $M$  općenito vrijedi  $\det(M) = \det(M^T)$  pa je i  $\det(W^T) = \det(W)$ . Stoga je  $\det(W) = 0$  na cijelom  $I$  pa je matrica  $W$  singularna na cijelom  $I$ . Neka je  $x_0 \in I$  proizvoljna točka. Kako je  $W$  singularna u  $x_0$  i kako za svaku singularnu kvadratnu matricu  $M$  postoji vektor stupac  $x$  različit od nulvektora takav da vrijedi  $Mx = 0$ , sustav (6) u točki  $x_0$  ima netrivialno rješenje  $\alpha_1^*, \dots, \alpha_{n+1}^*$  takvo da je  $\alpha_i^* \neq 0$  za neki indeks  $i \in \{1, \dots, n+1\}$ . Promotrimo sada funkciju  $y^* = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^* y_i$ . Ta funkcija očito zadovoljava homogenu OLDJ koja pripada (1) i prema (6) zadovoljava početne uvjete  $y^*(x_0) = y^{*(1)}(x_0) = \dots = y^{*(n-1)}(x_0) = y^{*(n)}(x_0) = 0$ . Time je na intervalu  $I$  zadan Cauchyjev problem za homogenu OLDJ koja pripada (1) i njegovo je rješenje funkcija  $y^*$ . Međutim, njegovo je rješenje i funkcija  $y(x) = 0$  pa iz jedinstvenosti rješenja Cauchyjevog problema slijedi da su ta dva rješenja identički jednaka na cijelom intervalu  $I$ , odnosno da za svaki  $x \in I$  vrijedi  $y^*(x) = \sum_{i=1}^{n+1} \alpha_i^* y_i(x) = 0$ . Prisjetimo se da je rješenje  $\alpha_1^*, \dots, \alpha_{n+1}^*$  netrivialno, tj. da postoji indeks  $i \in \{1, \dots, n+1\}$  takav da je  $\alpha_i^* \neq 0$ . To je kontradikcija s (5). Dakle, zaista je  $\dim(V_n) < n+1$ .  $\square$

Dovoljno bi još bilo dokazati da je  $\dim(V_n) > n-1$  kako bi se dobila opća tvrdnja  $\dim(V_n) = n$ , no taj je dokaz znatno duži i složeniji (i nije neophodan za nastavak članka) pa ga izostavljamo i prelazimo u ovom dijelu na dokaz isključivo za  $n=2$ . Čitatelj može naći potpun dokaz da je  $\dim(V_n) = n$  u [5].

*Komentar.* Ovdje je zanimljivo uočiti da sustav (6) na cijelom  $I$  ima jedinstveno rješenje (5) ako matrica  $W$  ima inverz u barem jednoj točki  $x_0 \in I$ , tj. ako postoji  $x_0 \in I$  takav da je determinanta matrice  $W$  različita od 0 ( $\det(W) \neq 0$  u  $x_0 \in I$ ). To je teorem o linearnoj nezavisnosti funkcija koji kaže da ako je determinanta Wronskog nekih funkcija u nekoj točki intervala  $I$  različita od 0, onda su te funkcije linearno nezavisne na intervalu  $I$ . Obrat tog teorema ne vrijedi. Ovdje navodimo Peanov protuprimjer. Na cijelom  $\mathbb{R}$  promatraju se funkcije  $y_1(x) = x^2$  i  $y_2(x) = x|x|$ . Determinanta Wronskog

funkcija  $y_1, y_2$  jeste 0 na cijelom  $\mathbb{R}$ , no te su funkcije linearno nezavisne na  $\mathbb{R}$ . Međutim, zanimljivo je spomenuti kako obrat vrijedi uz dodatnu pretpostavku da su promatrane funkcije rješenja homogene OLDJ s koeficijentima neprekinutim na cijelom promatranom intervalu. Dokaz te tvrdnje može se naći u [5].  $\square$

*Dokaz teorema 3.* Iz prethodnog dokaza specijalno, za  $n = 2$ , imamo  $\dim(V) < 3$ . Kako bi se sada dokazala tvrdnja teorema, dovoljno je dokazati da je  $\dim(V) > 1$ . To će biti dokazano eksplicitnom konstrukcijom dva linearno nezavisna rješenja od (4). Neka je  $y_1$  jedno rješenje od (4) takvo da za neki  $x_0 \in I$  vrijedi  $y_1(x_0) \neq 0$ . Uočimo da takvo rješenje postoji jer u nekoj točki  $x_0 \in I$  možemo zadati uvjete  $y_1(x_0) = 1$ ,  $y_1'(x_0) = 1$  čime je zadan Cauchyjev problem, a rješenje Cauchyjevog problema postoji. Drugo linearno nezavisno rješenje traži se u obliku  $y_2 = C(x)y_1$ . Uvrštavanjem toga u (4) dobiva se:

$$\begin{aligned} C''y_1 + 2C'y_1' + Cy_1'' + f(x)C'y_1 + f(x)Cy_1' + g(x)Cy_1 &= 0 \iff \\ C''y_1 + 2C'y_1' + f(x)C'y_1 + C[y_1'' + f(x)y_1' + g(x)y_1] &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Kako  $y_1$  zadovoljava (4), to slijedi da je član u uglatim zagradama 0 pa (8) uz supstituciju  $u = C'$  postaje:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx}y_1 &= -u(2y_1' + f(x)y_1) \iff \\ \frac{du}{u} &= -\frac{2y_1' + f(x)y_1}{y_1}dx \iff u = C_0 e^{-\int \frac{2y_1' + f(x)y_1}{y_1} dx}. \end{aligned} \quad (9)$$

Iz (9) uvažavajući supstituciju  $u = C'$  integracijom slijedi:

$$C(x) = \int (C_0 e^{-\int \frac{2y_1' + f(x)y_1}{y_1} dx}) dx = C_0 \int \left(\frac{1}{y_1^2} e^{-\int f(x) dx}\right) dx. \quad (10)$$

Funkcija  $C(x)$  dana s (10) očito ovisi o  $x$  za  $C_0 \neq 0$ , tj. nije konstantna funkcija, pa su  $y_1$  i  $y_2 = C(x)y_1$  sigurno linearno nezavisne na  $I$ . Stoga postoje najmanje dva linearno nezavisna rješenja i zato je  $\dim(V) > 1$ . Sada imamo gornju i donju ogradu  $1 < \dim(V) < 3$  pa kako je dimenzija vektorskog prostora prirodan broj, zaključujemo  $\dim(V) = 2$ .  $\square$

Iz teorema 3 odmah slijedi da ako su  $y_1$  i  $y_2$  dva linearno nezavisna rješenja jednadžbe (4), onda se svako rješenje jednadžbe (3) može prikazati kao linearna kombinacija vektora baze koju tvore  $y_1$  i  $y_2$ :

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2. \quad (11)$$

Konstante  $C_1$  i  $C_2$  postaju jednoznačno određene ako je zadan Cauchyjev problem, a ne samo jednadžba OLDJ drugog reda. Također, vidi se da je dovoljno poznavati jedno netrivialno rješenje  $y_1$  jednadžbe (4) kako bi se mogla napisati sva rješenja jer je prema dokazu teorema 3 drugo linearno nezavisno rješenje dano s  $y_2 = C(x)y_1$ , pri čemu je  $C(x)$  dana izrazom (10).

## 4 Nehomogena OLDJ drugog reda

U prethodnom dijelu promatran je postupak rješavanja homogene OLDJ drugog reda, a ovdje se promatra nehomogena OLDJ drugog reda čija je opća forma (3). Rješenje od (3) pretpostavlja se u obliku (11) gdje su  $y_1$  i  $y_2$  dva linearno nezavisna rješenja pripadne homogene jednačbe (4):

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2. \quad (12)$$

Jedina razlika između (12) i (11) je što u (12) umjesto konstanti pišu funkcije realne varijable koje treba pronaći tako da  $y$  iz (12) zadovoljava (3). Uvrštavanjem (12) u (3) dobiva se:

$$\begin{aligned} & C_1''y_1 + 2C_1'y_1' + C_1y_1'' + C_2''y_2 + 2C_2'y_2' + C_2y_2'' \\ & + f(x)[C_1'y_1 + C_1y_1' + C_2'y_2 + C_2y_2'] + g(x)[C_1y_1 + C_2y_2] = h(x) \\ \Leftrightarrow & C_1''y_1 + 2C_1'y_1' + C_1[y_1'' + f(x)y_1' + g(x)y_1] + C_2''y_2 + 2C_2'y_2' \\ & + C_2[y_2'' + f(x)y_2' + g(x)y_2] + f(x)[C_1'y_1 + C_2'y_2] = h(x). \end{aligned} \quad (13)$$

Članovi u uglatim zagradama uz  $C_1$  i  $C_2$  u (13) su 0 jer  $y_1$  i  $y_2$  zadovoljavaju (4) pa ostaje:

$$C_1''y_1 + 2C_1'y_1' + C_2''y_2 + 2C_2'y_2' + f(x)[C_1'y_1 + C_2'y_2] = h(x). \quad (14)$$

Kako bi se eliminirala  $f(x)$  u (14), postavlja se uvjet:

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 = 0 \Leftrightarrow C_2' = -C_1' \frac{y_1}{y_2}. \quad (15)$$

Uvrštavanjem (15) u (14) dobiva se:

$$\begin{aligned} & C_1''y_1 + 2C_1'y_1' - C_1'' \frac{y_1}{y_2} y_2 - C_1' \frac{y_1'y_2 - y_2'y_1}{y_2^2} y_2 - 2C_1' \frac{y_1}{y_2} y_2' = h(x) \\ \Leftrightarrow & C_1'(y_1' - \frac{y_1}{y_2} y_2') = h(x) \\ \Leftrightarrow & C_1' = \frac{h(x)y_2}{y_1'y_2 - y_1y_2'}. \end{aligned} \quad (16)$$

Iz (15) i (16) sada se lako dobiva i  $C_2'$ :

$$C_1' = -\frac{h(x)y_2}{y_1y_2' - y_1'y_2}, \quad C_2' = \frac{h(x)y_1}{y_1y_2' - y_1'y_2}. \quad (17)$$

Neka je  $W(y_1, y_2)$  determinanta Wronskog funkcija  $y_1$  i  $y_2$ . Tada se može uočiti da su nazivnici u (17) jednaki determinanti Wronskog funkcija  $y_1$  i  $y_2$ , čime je jasno da niti u jednoj točki nazivnik nije jednak 0 (jer su  $y_1$  i  $y_2$  dva linearno nezavisna rješenja). Dodatno, brojnici se mogu izraziti kao determinante:

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ h(x) & y_2' \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & h(x) \end{vmatrix}. \quad (18)$$

Uz determinante definirane u (18) izraze (17) moguće je napisati u ekvivalentnoj formi:

$$C_1' = \frac{D_1}{W(y_1, y_2)}, \quad C_2' = \frac{D_2}{W(y_1, y_2)}. \quad (19)$$

Valja uočiti da je (19) Cramerovo pravilo za sustav jednačbi (15) i (16). Iz (17) ili (19) moguće je direktnom integracijom eksplicitno izraziti funkcije  $C_1(x)$  i  $C_2(x)$ . Uvrštavanjem tih funkcija u (12) moguće je dobiti opće rješenje nehomogene OLDJ drugog reda (3). Može se dokazati da potpuno analogne formule onima u (19) vrijede za OLDJ  $n$ -tog reda. Potpuni dokaz može se pronaći u [5].

U sljedećem primjeru pokazano je kako se navedeni općeniti algoritam primjenjuje na rješavanje nehomogenog Cauchyjevog problema.

**Primjer 1.** Riješimo sljedeći nehomogeni Cauchyjev problem:

$$y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) = x, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

*Rješenje.* Opće rješenje zadane nehomogene OLDJ drugog reda može se zapisati u obliku (12), pri čemu su funkcije  $C_1$  i  $C_2$  dane u (19). Prvo valja pronaći dva linearno nezavisna rješenja  $y_1$  i  $y_2$  homogene jednačbe  $y''(x) + \frac{1}{x}y'(x) = 0$ , odnosno treba pronaći opće rješenje te homogene jednačbe u obliku (11). Uvođenjem supstitucije  $u = y'$  dobiva se  $u'(x) = -\frac{1}{x}u(x)$ . Direktnom integracijom odavde slijedi  $u(x) = \frac{C_1}{x}$ , gdje je  $C_1 \in \mathbb{R}$  neka konstanta. Kako je  $u = y'$ , ponovnom integracijom dobiva se  $y(x) = C_1 \ln(x) + C_2$ , gdje je  $C_2 \in \mathbb{R}$  druga integracijska konstanta. Time je pronađeno opće rješenje pripadajuće homogene OLDJ, a njezina dva linearno nezavisna rješenja su  $y_1(x) = \ln x$  i  $y_2(x) = 1$ . Sada se konstante  $C_1$  i  $C_2$  zamjenjuju funkcijama  $C_1(x)$  i  $C_2(x)$  koje su dane izrazom (19). Računamo determinante  $D_1$  i  $D_2$  prema izrazu (18) uz  $y_1(x) = \ln x$ ,  $y_2(x) = 1$ ,  $h(x) = x$  i dobivamo  $D_1 = -x$ ,  $D_2 = x \ln x$ . Također, računamo Wronskijan i dobivamo  $W(y_1, y_2) = -\frac{1}{x}$ . Iz izraza (19) sada se dobiva  $C_1'(x) = x^2$  i  $C_2'(x) = -x^2 \ln x$ , a odatle direktnom integracijom i  $C_1(x) = \frac{x^3}{3} + k_1$ ,  $C_2(x) = \frac{x^3}{9}(1 - 3 \ln x) + k_2$ , pri čemu su  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$  integracijske konstante. Opće rješenje zadane nehomogene OLDJ dano je izrazom (12) i glasi:

$$y(x) = \left(\frac{x^3}{3} + k_1\right) \ln x + \frac{x^3}{9}(1 - 3 \ln x) + k_2 \iff y(x) = k_1 \ln x + \frac{x^3}{9} + k_2.$$

Konstante  $k_1$  i  $k_2$  određuju se iz uvjeta  $y(1) = 0$ ,  $y'(1) = 0$ . Uvažavanjem  $y(1) = 0$  dobiva se  $k_2 = -\frac{1}{9}$ , a uvažavanjem  $y'(1) = 0$  dobiva se  $k_1 = -\frac{1}{3}$  pa je konačno rješenje zadanog Cauchyjevog problema  $y(x) = -\frac{1}{3} \ln x + \frac{x^3}{9} - \frac{1}{9}$ .  $\square$

## 5 Sturm-Liouvilleov problem

Svaka homogena OLDJ drugog reda (4) može se zapisati na način:

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + \left[ q(x) + \lambda_i r(x) \right] y = 0. \quad (20)$$

Jednačba (20) naziva se Sturm-Liouvilleova jednačba. Ovdje dodatno pretpostavljamo  $p \in C^1[a, b]$ ,  $q, r \in C^0[a, b]$  te  $p, r > 0$ , što odgovara regularnom Sturm-Liouvilleovom

problemu. Potrebno je odrediti rješenje diferencijalne jednačbe (20) na intervalu  $[a, b]$  koje dodatno zadovoljava homogene Robinove rubne uvjete:

$$\left. \begin{aligned} k_1 \frac{dy}{dx} \Big|_{x=a} + k_2 y|_{x=a} &= 0 \\ k_3 \frac{dy}{dx} \Big|_{x=b} + k_4 y|_{x=b} &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (21)$$

pri čemu su  $k_1, k_2, k_3, k_4$  realne konstante takve da je  $k_1 \neq 0$  ili  $k_2 \neq 0$  i  $k_3 \neq 0$  ili  $k_4 \neq 0$ . Jednačba (20) može se zapisati u sljedećoj formi:

$$p'(x)y' + p(x)y'' + q(x)y = -\lambda_i r(x)y \iff -\frac{1}{r} \left( p' \frac{d}{dx} + p \frac{d^2}{dx^2} + q \right) y = \lambda_i y. \quad (22)$$

U jednačbi (22) operator  $L = -\frac{1}{r} \left( p' \frac{d}{dx} + p \frac{d^2}{dx^2} + q \right)$  djeluje na funkciju  $y$  i stoga (22) ima formu operatorske jednačbe:

$$Ly = \lambda_i y. \quad (23)$$

Iz definicije 8 trivijalno slijedi da je operator  $L$  linearan pa je prema definiciji 9 Sturm-Liouvilleova jednačba (19) svedena na oblik kojim se definiraju vlastiti vektori  $y$  koji pripadaju vlastitoj vrijednosti  $\lambda_i$ . Kad je definiran linearni operator  $L$ , prirodno je zapitati se iz kojeg vektorskog prostora u koji vektorski prostor preslikava operator  $L$ . Za domenu operatora  $L$  prirodno je uzeti potprostor prostora  $C^2[a, b]$  (prostor u kojemu rješavamo pripadnu OLDJ drugog reda). Međutim, za  $y \in C^2[a, b]$  očito općenito imamo samo  $Ly \in C^0[a, b]$ . Dakle,  $L$  nije preslikavanje iz vektorskog prostora  $V$  u  $V$ , što je traženo u definiciji 9, ali ipak jednakost  $Ly = \lambda_i y$  i dalje ima smisla kao jednakost neprekidnih funkcija. Stoga i u ovom slučaju govorimo o svojstvenom problemu.

Primijetimo da je  $C^2[a, b] \subset C^0[a, b]$ , a kako je svaka neprekinuta funkcija na intervalu  $[a, b]$  (kvadratno) integrabilna, vrijedi  $C^2[a, b] \subset C^0[a, b] \subseteq L^2[a, b, r(x)dx]$ . Dakle,  $C^2[a, b]$  jeste potprostor ranije spomenutog Lebesgueovog prostora  $L^2[a, b, r(x)dx]$ . Kako je prostor  $L^2[a, b, r(x)dx]$  snabdjeven težinskim skalarnim produktom (2), to slijedi da je i njegov potprostor  $C^2[a, b]$  snabdjeven tim istim skalarnim produktom:

$$\langle y_1, y_2 \rangle = \int_a^b y_1 y_2 r(x) dx. \quad (24)$$

Sljedeći teorem govori o ortogonalnosti rješenja Sturm-Liouvilleovog problema s obzirom na skalarni produkt (24).

**Teorem 4** (Sturm-Liouville). Neka su  $y_m$  i  $y_n$  dva vlastita vektora koji zadovoljavaju (20) i (21), a odgovaraju dvjema različitim vlastitim vrijednostima  $\lambda_m$  i  $\lambda_n$ . Funkcije  $y_m$  i  $y_n$  ortogonalne su s obzirom na skalarni produkt (24).

*Dokaz.* Kako  $y_m$  i  $y_n$  zadovoljavaju (20), to slijedi:

$$\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_m}{dx} \right] + [q(x) + \lambda_m r(x)] y_m = 0, \quad \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_n}{dx} \right] + [q(x) + \lambda_n r(x)] y_n = 0.$$

Prvu od te dvije jednačbe valja pomnožiti s  $y_n$ , a drugu s  $-y_m$  i zatim ih zbrojiti te algebarski srediti:

$$y_n \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_m}{dx} \right] + (\lambda_m - \lambda_n) r(x) y_m y_n - y_m \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_n}{dx} \right] = 0. \quad (25)$$

Kako bismo producirali član  $\langle y_m, y_n \rangle$ , integrirajmo (25) na intervalu  $[a, b]$ :

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b y_m y_n r(x) dx = \int_a^b y_m \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_n}{dx} \right] dx - \int_a^b y_n \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_m}{dx} \right] dx. \quad (26)$$

Na lijevoj strani (26) prepoznaje se skalarni produkt  $\langle y_m, y_n \rangle$ , a integrale na desnoj strani valja rastaviti parcijalnom integracijom na način:

$$\begin{aligned} \int_a^b y_m \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_n}{dx} \right] dx &= y_m p(x) \frac{dy_n}{dx} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{dy_m}{dx} p(x) \frac{dy_n}{dx} dx, \\ \int_a^b y_n \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_m}{dx} \right] dx &= y_n p(x) \frac{dy_m}{dx} \Big|_a^b - \int_a^b \frac{dy_n}{dx} p(x) \frac{dy_m}{dx} dx. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem toga u (26) i sređivanjem dobiva se:

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n) \langle y_m, y_n \rangle &= y_m p(x) \frac{dy_n}{dx} \Big|_a^b - y_n p(x) \frac{dy_m}{dx} \Big|_a^b \iff (\lambda_m - \lambda_n) \langle y_m, y_n \rangle = \\ &= p(b) \left[ y_m(b) y_n'(b) - y_n(b) y_m'(b) \right] + p(a) \left[ y_n(a) y_m'(a) - y_m(a) y_n'(a) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

Iz Robinovih uvjeta (21) uz uvjet  $k_1 \neq 0$  i  $k_3 \neq 0$  mogu se izraziti  $y_m'(b)$ ,  $y_n'(b)$  te  $y_m'(a)$  i  $y_n'(a)$  preko  $y_m(b)$ ,  $y_n(b)$  te  $y_m(a)$ ,  $y_n(a)$  na način:

$$y_m'(a) = -\frac{k_2}{k_1} y_m(a), \quad y_n'(a) = -\frac{k_2}{k_1} y_n(a), \quad y_m'(b) = -\frac{k_4}{k_3} y_m(b), \quad y_n'(b) = -\frac{k_4}{k_3} y_n(b).$$

Uvrštavanjem toga u (27) i sređivanjem dobiva se:

$$\begin{aligned} (\lambda_m - \lambda_n) \langle y_m, y_n \rangle &= p(b) \left[ -y_m(b) \frac{k_4}{k_3} y_n(b) + y_n(b) \frac{k_4}{k_3} y_m(b) \right] + \\ p(a) \left[ -y_n(a) \frac{k_2}{k_1} y_m(a) + y_m(a) \frac{k_2}{k_1} y_n(a) \right] &= 0 \implies (\lambda_m - \lambda_n) \langle y_m, y_n \rangle = 0. \end{aligned}$$

Ako bi bilo  $k_1 = 0$ , onda bi iz Robinovih uvjeta uslijedilo  $y_n(a) = y_m(a) = 0$  i druga uglata zagrada u (27) bi iščeznula. Ako bi bilo  $k_3 = 0$ , onda bi iz Robinovih uvjeta uslijedilo  $y_n(b) = y_m(b) = 0$  i prva uglata zagrada u (27) bi iščeznula. Dakle, i u tim bi slučajevima vrijedila jednakost  $(\lambda_m - \lambda_n) \langle y_m, y_n \rangle = 0$ . Kako je  $\lambda_m \neq \lambda_n$ , to zaista slijedi  $\langle y_m, y_n \rangle = 0$ , tj. funkcije  $y_m$  i  $y_n$  su ortogonalne.  $\square$

Sturm-Liouvilleov teorem našao je najveću primjenu u rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi metodom separacije varijabli, ali to izlazi iz okvira ovog članka. No, ipak će biti pokazana jedna zanimljiva primjena Sturm-Liouvilleovog teorema u sljedećem dijelu. Za to će biti potreban sljedeći teorem čiji dokaz također izlazi iz okvira ovog članka, ali zainteresiranog čitatelja upućuje se na dokaz u [13].

**Teorem 5.** Neka je  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  skup vlastitih funkcija koje odgovaraju različitim vlastitim vrijednostima  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$  jednadžbe (20) i koje zadovoljavaju Robinove rubne uvjete (21). Tada skup  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  čini potpunu ortogonalnu bazu na prostoru  $L^2[a, b, r(x)dx]$ .

Ovdje je zanimljivo komentirati kako se uz izbor  $p(x) = 1$ ,  $q(x) = 0$  i  $r(x) = 1$  u Sturm-Liouvilleovoj jednadžbi uz odgovarajuće Robinove rubne uvjete na rubovima intervala  $[a, b]$  koji osiguravaju periodičnost na  $[a, b]$  kao rješenja problema vlastitih funkcija (20) dobivaju osnovne trigonometrijske funkcije (sinus i kosinus). Prema teoremima 4 i 5 dobivene periodične vlastite funkcije tvore potpunu ortogonalnu bazu i stoga se svaka funkcija periodična na intervalu  $[a, b]$  može razviti po bazi osnovnih trigonometrijskih funkcija. Taj se razvoj naziva Fourierov red. Čitatelje zainteresirane za detaljnije izlaganje o temi Fourierovog reda upućuje se na [14].

## 6 Greenove funkcije za OLDJ drugog reda

Jednadžba (20) homogena je Sturm-Liouvilleova jednadžba, a ovdje će se promatrati nehomogena forma Sturm-Liouvilleovog problema s homogenim Robinovim rubnim uvjetima:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy}{dx} \right] + [q(x) + \lambda r(x)] y &= f(x) \\ k_1 \frac{dy}{dx} \Big|_{x=a} + k_2 y \Big|_{x=a} &= 0 \\ k_3 \frac{dy}{dx} \Big|_{x=b} + k_4 y \Big|_{x=b} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

uz uvjet  $\lambda \notin \{\lambda_n : n \in \mathbb{N}_0\}$ , tj.  $\lambda$  nije svojstvena vrijednost pripadne homogene zadaće (u suprotnom, ako bi rješenje postojalo, ne bi bilo jedinstveno). Ponovno se (28) rješava na intervalu  $[a, b]$ . Neka su  $y_n$  vlastite funkcije homogenog Sturm-Liouvilleovog problema (20), (21) koje pripadaju vlastitim vrijednostima  $\lambda_n$ . Prema teoremu 5, skup  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  čini potpunu ortogonalnu bazu na prostoru  $L^2[a, b, r(x)dx]$  pa se svaka funkcija, a stoga i rješenje Sturm-Liouvilleovog problema (28), može razviti po toj bazi:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n, \quad (29)$$

pri čemu su  $c_i$  realne konstante. Nadalje ćemo s ovim izrazom raditi kao da je riječ o konačnoj sumi. Time se izbjegavaju suptilni argumenti potrebni za opravdanje promjene poretka sumacije i derivacije, odnosno sumacije i integracije, što će se javljati u računu. Na taj način moguće je staviti naglasak na sam (formalan) postupak konstrukcije rješenja zadaće (28).

Uvrštavanjem (29) u (28) i sređivanjem dobiva se:



$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{d \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n}{dx} \right] + [q(x) + \lambda r(x)] \sum_{n=0}^{\infty} c_n y_n &= f(x) \iff \\
\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left\{ \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_n}{dx} \right] + [q(x) + \lambda r(x)] y_n \right\} &= f(x) \iff \quad (30) \\
\sum_{n=0}^{\infty} c_n \left\{ \left[ \frac{d}{dx} \left[ p(x) \frac{dy_n}{dx} \right] + q(x) y_n + \lambda_n r(x) y_n \right] + (\lambda - \lambda_n) r(x) y_n \right\} &= f(x).
\end{aligned}$$

Član u vanjskoj uglatoj zagradi prethodne jednakosti je 0 jer za svaki  $n \in N_0$  funkcija  $y_n$  zajedno sa svojom vlastitom vrijednosti  $\lambda_n$  zadovoljava homogenu jednadžbu (20). Zato je:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\lambda - \lambda_n) r(x) y_n = f(x). \quad (31)$$

Da bi se pronašao koeficijent  $c_m$ , valja pomnožiti (31) s  $y_m$  i integrirati na intervalu  $[a, b]$  kako bi se mogao iskoristiti teorem 4:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (\lambda - \lambda_n) \int_a^b y_n y_m r(x) dx = \int_a^b y_m f(x) dx. \quad (32)$$

Uvažavajući teorem 4 preostat će jedino član s indeksom  $m$  u sumi jer su svi ostali integrali unutar sume 0 (prepoznaje se skalarni produkt ortogonalnih funkcija) pa je:

$$c_m (\lambda - \lambda_m) \int_a^b y_m^2 r(x) dx = \int_a^b y_m f(x) dx \iff c_m = \frac{1}{\lambda - \lambda_m} \frac{\int_a^b y_m f(x) dx}{\int_a^b y_m^2 r(x) dx}. \quad (33)$$

Ako su  $y_0, y_1, y_2, \dots, y_n, \dots$  normirane funkcije, tj. ako taj skup nije samo ortogonalna, već i ortonormirana baza, onda je:

$$\int_a^b y_m^2 r(x) dx = \langle y_m, y_m \rangle \equiv \|y_m\|^2 = 1, \quad (34)$$

pa zbog toga koeficijenti u (33) postaju:

$$c_m = \frac{\int_a^b y_m f(x) dx}{\lambda - \lambda_m}. \quad (35)$$

Uvrštavanjem (35) u (29) dobiva se:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\int_a^b y_n(z) f(z) dz}{\lambda - \lambda_n} y_n(x) \iff y(x) = \int_a^b \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n(z) y_n(x)}{\lambda - \lambda_n} \right\} f(z) dz. \quad (36)$$

Funkcija u vitičastim zagradama naziva se Greenova funkcija Sturm-Liouvilleovog problema (28) i označava se:

$$G(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n(z)y_n(x)}{\lambda - \lambda_n}. \quad (37)$$

Jasno je da se koristeći Greenovu funkciju rješenje (34) može zapisati u formi:

$$y(x) = \int_a^b G(x, z)f(z)dz. \quad (38)$$

Posebno, ako je vanjska uzbuda  $f(z) = \delta(z - x)$  Diracova delta funkcija s impulsom u  $z = x$ , onda je prema (38) i zbog svojstva integrala Diracove delta funkcije  $y(x) = G(x, x)$  za svaki  $z \in [a, b]$ . Iz toga se vidi da je Greenova funkcija odziv sustava opisanog s (28) na jedinični vanjski impuls  $\delta(z - x)$ . Zanimljivo je još promotriti dva ekvivalentna izraza u (36). Prvi izraz daje razvoj odziva sustava  $y(x)$  po bazi vlastitih funkcija dok drugi izraz u (36) ili ekvivalentno izraz (38) daje razvoj odziva sustava  $y(x)$  u bazi odziva na jedinične impulse. Druga tvrdnja slijedi jer je  $G(x, z)$  odziv sustava na jedinični impuls u  $z \in [a, b]$ , a taj se odziv na jedinični impuls u (38) množi sa stvarnom pobudom u točki  $z$  te se zatim sumira (integrira) doprinos ukupnom odzivu po svim  $z \in [a, b]$ . Stoga se ovaj formalni račun Greenovih funkcija može shvatiti kao promjena baze u kojoj se prikazuje odziv sustava  $y(x)$ . Čitatelje koji žele dobiti opsežniji uvid u Greenove funkcije (uključujući i Greenove funkcije za parcijalne diferencijalne jednadžbe) upućuje se na [13] i [15]. Za razliku od prethodnih rezultata i metoda iz članka gdje je njihovo razmatranje stalo na teorijskoj razini, ovdje će biti pokazan primjer rješavanja jednostavne obične linearne diferencijalne jednadžbe drugog reda metodom Greenovih funkcija.

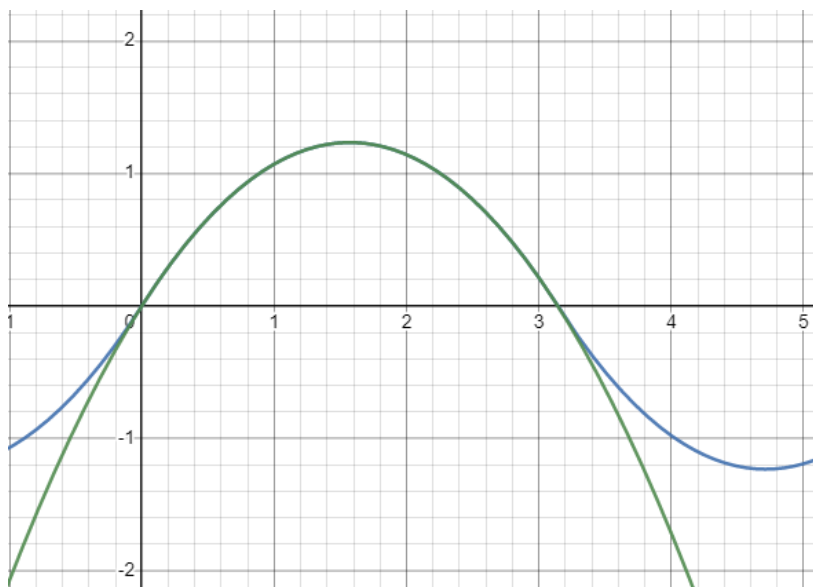
**Primjer 2.** Riješimo diferencijalnu jednadžbu  $u''(x) = -1$  s rubnim uvjetima  $u(0) = u(\pi) = 0$  metodom Greenovih funkcija.

*Rješenje.* Zadana je jednadžba ekvivalentna nehomogenoj Sturm-Liouvilleovoj zadaći (28) uz izbor  $f(x) = -1$ ,  $q(x) = 0$ ,  $p(x) = 1$  i  $\lambda = 0$ . Pripadni homogeni Sturm-Liouvilleov problem glasi:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u_n}{dx^2} + \lambda_n u_n &= 0 \\ u_n(0) &= 0 \\ u_n(\pi) &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (39)$$

pri čemu smo odabrali  $r \equiv 1$ . Čitateljima je za vježbu ostavljeno da dokažu kako su netrivialna (različita od nulfunkcije) rješenja Sturm-Liouvilleovog problema (39) dana za  $\lambda_n = n^2$  i jednaka su  $u_n(x) = C \sin(nx)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , gdje je  $C$  neka realna konstanta. Funkcija  $u_0 = 0$  također je rješenje, ali nulvektor ne može biti element baze jer svaki neprazan skup vektora koji sadrži nulvektor nije linearno nezavisan. Konstantu  $C$  određujemo iz uvjeta normiranosti (34):

$$1 = \int_0^\pi u_n^2 dx = C^2 \int_0^\pi \sin^2(nx) dx = C^2 \frac{\pi}{2} \implies C = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$



**Slika 1:** Grafička usporedba rješenja (40) s rješenjem  $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{2}x$

Konačno rješenje diferencijalne jednačbe sada se može naći iz (36) uz  $\lambda = 0$  i  $f(x) = -1$ :

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^{\pi} u_n(z) dz}{\lambda_n} u_n(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\int_0^{\pi} \sin(nz) dz}{n^2} \sin(nx).$$

Može se pokazati da je rješenje integrala pod sumom 0 za parne  $n$  i  $\frac{2}{n}$  za neparne  $n$  pa je konačno rješenje zadanog problema:

$$u(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin[(2n+1)x]}{(2n+1)^3}. \quad (40)$$

U ovom se primjeru lako možemo uvjeriti da je nađeno rješenje (40) točno rješenje usporedbom s rješenjem koje se dobiva integracijom. S obzirom na zadane rubne uvjete, jedinstveno rješenje zadane je s  $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{2}x$ . Na slici 1 zelenom je bojom ucrtan graf funkcije  $u(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{\pi}{2}x$  dok je plavom bojom ucrtan graf funkcije  $u(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{1000} \frac{\sin[(2n+1)x]}{(2n+1)^3}$  kao aproksimacija rješenja (40). Kako je  $n$ -ti sumand u nazivniku (40) klase  $O(n^3)$ , suma prvih 1000 članova reda osigurava točnost do reda veličine  $10^{-8}$ , tj. pogreška je reda veličine  $10^{-9}$ . Na intervalu  $[0, \pi]$  može se vidjeti potpuna podudarnost zelenog i plavog grafa, čime je dodatno opravdano da je izrazom (40) zaista dano rješenje zadane Sturm-Liouvilleove zadaće.  $\square$

## 7 Zaključak

Cilj članka bio je pokazati široku primjenu aparata linearne algebre na dokazivanje nekih opće poznatih teorema o običnim linearnim diferencijalnim jednadžbama. Tako je prvo promatran vektorski prostor rješenja OLDJ drugog reda i u nešto manjoj mjeri  $n$ -tog reda. Definirana je determinanta Wronskog funkcija i pokazana je njena primjena u ispitivanju linearne nezavisnosti funkcija te u konstrukciji rješenja nehomogene OLDJ drugog reda. Nešto napredniji aparat linearne algebre bio je potreban prilikom razmatranja Sturm-Liouvilleovog problema gdje je ključan bio teorem ortogonalnosti rješenja Sturm-Liouvilleovog problema i potpunost ortogonalne (ortonormirane) baze koju čine vlastite funkcije Sturm-Liouvilleovog problema. Na kraju je pokazano rješavanje nehomogenog Sturm-Liouvilleovog problema metodom Greenovih funkcija te je kao primjer u potpunosti riješena OLDJ drugog reda s konstantnim koeficijentima uz Robinove rubne uvjete. Primjene ostalih ovdje pokazanih metoda rješavanja OLDJ drugog reda nisu bile sadržaj i svrha članka, ali ponovno podsjećamo da se konkretne primjene na zadatke ovdje teorijski dokazanih i izvedenih metoda mogu pronaći u kolekcijama zadataka danih u [6], [7], [8], [9].

## Literatura

- [1] A. Aglič Aljinović, N. Elezović, D. Žubrinić, *Linearna algebra*, Element, Zagreb, 2017.
- [2] D. Bakić, *Linearna algebra i primjene*, Školska knjiga, Zagreb, 2021.
- [3] S. Kurepa, *Uvod u linearnu algebru*, Školska knjiga, Zagreb, 1975.
- [4] S. Kurepa, *Matematička analiza 2*, Školska knjiga, Zagreb, 1997.
- [5] A. Aglič Aljinović, V. Čepulić, N. Elezović, L. Horvat Dmitrović, Lj. Marangunic, T. Šikić, A. Žgaljić Keko, D. Žubrinić, V. Županović, *Matematika 2*, Element, Zagreb, 2016.
- [6] M. Pačar, M. Katalinić, *Diferencijalne jednadžbe s primjenom*, Dvostruka Duga, Osijek, 2012.
- [7] B. Apsen, *Repetitorij više matematike - drugi dio*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1989.
- [8] V. Minorski, *Zbirka zadataka više matematike*, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.
- [9] B. Demidovič, *Zadaci i riješeni primjeri iz matematičke analize za tehničke fakultete*, Tehnička knjiga, Zagreb, 2003.
- [10] V.I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics*, Springer, 2013.
- [11] S. Kurepa, *Funkcionalna analiza*, Školska knjiga, Zagreb, 1990.
- [12] N. Antonić, M. Vrdoljak, *Mjera i integral*, PMF - Matematički odjel, Zagreb, 2001.

- [13] P. Morse, H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill book company, 1953.
- [14] N. Elezović, M. Puljiz, *Laplaceova transformacija, Fourierov red i Fourierova transformacija*, Element, Zagreb, 2019.
- [15] D.G. Duffy, *Green's functions with applications*, Chapman and Hall/CRC, 2015.