Lema o podizanju eksponenata (2)

Julije Jakšetić[1], *Josip Lopatič*[2], *Marjan Praljak*[3], *Robert Soldo*[4]

Ovo je nastavak članka iz prethodnog broja MFL-a, u kojem smo opisali lemu o podizanju eksponenata (eng. lifting the exponent, LTE) i dali nekoliko njezinih jednostavnijih primjena. LTE se može primijeniti u širokom rasponu problema iz teorije brojeva, a u ovom članku ćemo pokazati nekoliko složenijih problema u kojima LTE ima ključnu ulogu.

Zadatak 1. *(Sveruska matematička olimpijada 1996.) Nađite sve prirodne brojeve n, koji za neke uzajamno proste prirodne brojeve x i y i prirodan broj k, $k>1$, zadovoljavaju jednakost*

$$3^n = x^k + y^k. \tag{1}$$

Rješenje. Pretpostavimo da je k paran prirodan broj. Tada su brojevi x^k i y^k kvadrati, a znamo da kvadrati brojeva koji nisu djeljivi s 3, pri djeljenju s 3 daju ostatak 1. Stoga, ako niti x, niti y nije djeljiv s 3, tada je $x^k+y^k \equiv 2 \pmod 3$, odnosno, ako je točno jedan od brojeva x, y djeljiv s 3, tada je $x^k+y^k \equiv 1 \pmod 3$. Na osnovu ovog, zaključujemo, da bi bila ispunjena jednakost iz zadatka, u slučaju k je paran prirodan broj, nužno mora biti $3 \mid x$ i $3 \mid y$, a to je proturječje s uvjetom zadatka da su brojevi x i y uzajamno prosti.

Pretpostavimo da je k neparan prirodan broj. Uočimo, da bi bila ispunjena jednakost iz zadatka, brojevi x i y moraju biti različite parnosti. U suprotnom desna strana u jednakosti (1) bila bi djeljiva s 2, a što je proturječje da je ona isključivo potencija broja 3. Stoga, postoji neparan prosti broj p takav da $p \mid x+y$. Nadalje, za takav p vrijedi $p \nmid x$, $p \nmid y$. Naime, kada bi p dijelio jedan od brojeva x ili y, tada bi nužno zbog $p|x+y$, p dijelio i drugog. No, tada bismo imali $m(x,y) \geq p > 1$, a što je ponovno proturječje s činjenicom da su brojevi x i y uzajamno prosti. U uvjetima smo teorema 2, prema kojem slijedi

$$v_p(3^n) = v_p\left(x^k+y^k\right) = v_p(x+y) + v_p(k) > 0,$$

jer $p \mid x+y$, odnosno $v_p(x+y) \geq 1$. Kako je $v_p(3^n) > 0$, imamo $p \mid 3^n$, odakle slijedi $p=3$.

S obzirom da je k neparan prirodan broj, tada $x+y \mid x^k+y^k$, stoga, da bi bila ispunjena jednakost iz zadatka nužno je $x+y=3^m$, za neki prirodan broj m. Odavde, specijalno slijedi $v_3(x+y)=m$. Koristeći gornju jednakost proizašlu iz teorema 2, dobivamo $n = v_3(3^n) = v_3(x+y) + v_3(k) = m + v_3(k)$. Razlikovat ćemo ovdje dva podslučaja u ovisnosti o broju m.

Prvo, promatramo podslučaj $m>1$. Koristit ćemo nejednakost $3^a \geq a+2$, koja vrijedi za sve prirodne brojeve a, a koja se lagano provjeri matematičkom indukcijom. Nadalje, uočimo, vrijedi i sljedeća nejednakost $a^{v_a(b)} \leq b$, za sve prirodne brojeve a, b. Sada,

---

[1] Autor je izvanredni profesor na Prehrambeno-biotehnoloskom fakultetu, Zagreb; e-pošta: `jjaksetic@pbf.hr`

[2] Autor je predavač na VVG, Velika Gorica; e-pošta: `josiplopatic@gmail.com`

[3] Autor je izvanredni profesor na Prehrambeno-biotehnološkom fakultetu, Zagreb; e-pošta: `mpraljak@pbf.hr`

[4] Autor je inženjer teorijske matematike, zaposlen u firmi Pružne građevine, Zagreb; e-pošta: `robert.soldo@prg.hr`

ako $3 \mid k$, imamo $v_3(k)+2 \leq 3^{v_3(k)} \leq k$. Štoviše, kako je $k \geq 3$, slijedi da nejednakost $v_3(k)+2 \leq k$ vrijedi i u slučaju kada je $v_3(k)=0$, tj. i u slučaju kada $3 \nmid k$.

Označimo li $M = \max(x,y)$, lagano dobivamo $\dfrac{x+y}{2} \leq M$. Na osnovu činjenice $x+y=3^m \geq 9$, nužno je $M \geq 5$. Sada je

$$3^n = x^k + y^k > M^k = M \cdot M^{k-1} \geq \frac{3^m}{2} \cdot 5^{k-1} > 3^m \cdot 5^{k-2} > 3^{m+k-2} \geq 3^{m+v_3(k)} = 3^n,$$

a to je proturječje, tj. podslučaj $m>1$ nije moguć.

Ostaje promotriti podslučaj $m=1$. Tada je $x+y=3$, odakle su jedine dvije mogućnosti: $x=1$, $y=2$ ili $x=2$, $y=1$. Uzmimo $x=1$, $y=2$ (potpuno analogno bismo tretirali mogućnost $x=2$, $y=1$; naime, u oba slučaja je $x^k+y^k=1+2^k$). Sada je $1+2^k = x^k+y^k = 3^n = 3^{m+v_3(k)} = 3^{1+v_3(k)} = 3 \cdot 3^{v_3(k)} \leq 3k$. Provjerom vidimo da jedini neparni broj $k>1$ koji zadovoljava nejednakost $1+2^k \leq 3k$ je $k=3$. Naime, u slučaju k prirodan broj, $k>3$, lagano se indukcijom dokaže da vrijedi $1+2^k > 3k$. Za $k=3$ iz jednakosti $1+2^k=3^n$ proizlazi $n=2$. Konačno, sva rješenja koja zadovoljavaju uvjete zadatka dana su

$$(x,y,n,k) \in \{(1,2,2,3),(2,1,2,3)\}.$$

Zadatak 2. *(Državno natjecanje 1998.) Neka su a i m prirodni brojevi, te p neparan prosti broj takav da $p^m \mid a-1$ i $p^{m+1} \nmid a-1$. Dokažite:*

a) $p^{m+n} \mid a^{p^n}-1$,

b) $p^{m+n+1} \nmid a^{p^n}-1$,

za svaki prirodan broj n.

Rješenje. Iz uvjeta zadatka je $v_p(a-1)=m$, odakle pak, očito slijedi da i $p \mid a-1$. Sada, prema teoremu 1 dobivamo $v_p\big(a^{p^n}-1\big) = v_p(a-1)+v_p(p^n) = m+n$, čime smo ujedno dokazali i a) i b) dio zadatka.

Zadatak 3. *U skupu prirodnih brojeva riješite jednadžbu*

$$x^{2009}+y^{2009}=7^z.$$

Rješenje. Ukoliko dana jednadžba ima rješenja u skupu prirodnih brojeva, pokazat ćemo prvo da, možemo pretpostaviti da 7 ne dijeli niti x, niti y.

Ako pak 7 dijeli x, tada prama danoj jednadžbi 7 nužno dijeli i y. Vrijedi, jasno i obrnuto. Stoga, postoje prirodni brojevi α, β, x_1, y_1 takvi da je $x=7^\alpha x_1$, $y=7^\beta y_1$, pri čemu $7 \nmid x_1$ i $7 \nmid y_1$.

Pretpostavimo da je $\alpha \geq \beta$. Sada, iz dane jednadžbe dobivamo $7^{(\alpha-\beta)2009}x_1^{2009} + y_1^{2009} = 7^{z-2009\beta}$, odakle slijedi $z-2009\beta > 0$. Nadalje, ako je $\alpha > \beta$, tada bi iz posljednje jednakosti sljedilo da 7 dijeli y_1, što je u suprotnosti s pretpostavkom da su brojevi y_1 i 7 relativno prosti. Dakle nužno je $\alpha=\beta$, odnosno posljednja jednadžba tada prelazi u oblik $x_1^{2009}+y_1^{2009}=7^{z_1}$, gdje je $z_1 = z-2009\beta$. Naravno, do istovjetnog zaključka bismo došli i uz pretpostavku $\alpha \leq \beta$. Ovime smo opravdali pretpostavku da $7 \nmid x$, $7 \nmid y$.

Zbog neparnosti broja 2009, $x+y \mid x^{2009}+y^{2009}$. Kako je $x+y>1$, a da bi bila zadovoljena jednadžba slijedi da nužno $7 \mid x+y$. U uvjetima smo teorema 2, te zbog $2009 = 7^2 \cdot 41$ imamo $v_7(2009)=2$, i onda prema teoremu 2 imamo $v_7(x^{2009}+y^{2009}) = v_7(x+y)+v_7(2009) = v_7(x+y)+2$, što dalje povlači $x^{2009}+y^{2009} = (x+y)\cdot 7^2 k$, za neki prirodan broj k takav da $7 \nmid k$. No, iz zadane jednadžbe vidimo da je 7 jedini prosti faktor u rastavu broja $x^{2009}+y^{2009}$, pa je $k=1$. Dakle, dobili smo

$$x^{2009}+y^{2009}=49(x+y).$$

Očito, ako je $\max(x,y)>1$ lijeva strana gornje jednadžbe je puno veća od desne, to je jedina mogućnost da ona bude zadovoljena ako je $x=y=1$. Provjerom vidimo da ni taj par nije rješenje, stoga gornja, a samim time i dana jednadžba nema rješenja u skupu prirodnih brojeva.

Zadatak 4. *(Izborno natjecanje u Hrvatskoj 2006.) U skupu prirodnih brojeva riješite jednadžbu*

$$3^x=2^xy+1.$$

Rješenje. Danu jednadžbu ćemo zapisati u obliku $3^x-1=2^xy$. Ako je $x=1$, tada je $y=1$, tj. $(x,y)=(1,1)$ je rješenje dane jednadžbe. Ako je $x\geq 2$ desna strana posljednje jednadžbe je tada djeljiva s 4, pa mora biti i lijeva, tj. tada $4 \mid 3^x-1$.

Ako je $x=2n+1$ neparan broj, imamo $3^2\equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 3^{2n}\equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 3^{2n+1}\equiv 3 \pmod 4 \Rightarrow 3^{2n+1}-1\equiv 2 \pmod 4$, tj. x ne može biti neparan broj veći od 1 koji zadovoljava posljednju jednadžbu.

Ako je $x=2n$ paran broj, imamo $3^2\equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 3^{2n}\equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 3^{2n}-1\equiv 0 \pmod 4$.

Dakle, ako $x>1$ zadovoljava posljednju jednadžbu, tada je nužno x paran broj. Sada, za paran broj x, na osnovu teorema 4 dobivamo

$$v_2(3^x-1)=v_2(3-1)+v_2(3+1)+v_2(x)-1=v_2(x)+2. \tag{2}$$

No, kako je $v_2(3^x-1)=v_2(2^xy)=v_2(2^x)+v_2(y)=x+v_2(y)\geq x$, iz relacije (2) slijedi

$$v_2(x)+2\geq x. \tag{3}$$

Kako je x paran broj, imamo $v_2(x)\geq 1$. U ovisnosti o $v_2(x)$ promatrat ćemo dva slučaja.

Ako je $v_2(x)=1$, iz nejednakosti (3) dobivamo $x\leq 3$, pa je jedini mogući takav (paran) broj $x=2$, za kojeg dobivamo iz jednadžbe zadatka $2^2y=3^2-1$, tj. $4y=8$, odnosno $y=2$. Dakle, $(x,y)=(2,2)$ je rješenje zadane jednadžbe.

Neka je sada $v_2(x)\geq 2$. Koristit ćemo nejednakost $2^a\geq a+2$, koja vrijedi za sve prirodne brojeve $a\geq 2$, te se lagano provjeri matematičkom indukcijom. Stoga, imamo

$$v_2(x)+2\leq 2^{v_2(x)}\leq x. \tag{4}$$

Sada, iz nejednakosti (3) i (4) dobivamo $v_2(x)+2=x$, tj. $v_2(x)=x-2$, odnosno zbog zadnje nejednakosti u (4), slijedi $2^{x-2}\leq x$. Kako ova nejednakost nije zadovoljena za niti jedan $x>4$, odnosno ista je ispunjena samo za prirodne brojeve 2, 3 i 4, ostaje vidjeti je li za $x=4$ jednadžba ima rješenje. Uvrštavanjem u zadanu jednadžbu dobivamo $2^4y=3^4-1$, tj. $16y=80$, odnosno $y=5$. Dakle, $(x,y)=(4,4)$ je rješenje zadane jednadžbe. Sve zajedno, sva rješenja zadane jednadžbe su

$$(x,y)\in\{(1,1),(2,2),(4,5)\}.$$

Zadatak 5. *(Rumunjska 1994.) Neka je n neparan prirodan broj. Dokažite da $\big((n-1)^n+1\big)^2$ dijeli broj $n(n-1)^{(n-1)^n+1}+n$.*

Rješenje. Za $n=1$ tvrdnja zadatka je trivijalna, zato neka je $n>1$ neparan prirodan broj. Najprije, promotrimo izraz $(n-1)^n+1$, kojeg zbog neparnosti od n možemo faktorizirati na sljedeći nacin

$$(n-1)^n+1=\big((n-1)+1\big)\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(n-1)^{n-1-k}1^k=n\cdot\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(n-1)^{n-1-k},$$

odakle $n\mid(n-1)^n+1$, te

$$\frac{(n-1)^n+1}{n}=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k(n-1)^{n-1-k}=1+\sum_{k=0}^{n-2}(-1)^k(n-1)^{n-1-k}. \tag{5}$$

U sumi na desnoj strani identiteta (5) svi pribrojnici su, do na predznak, oblika $(n-1)^j$, za $j=1,2,\ldots,n-1$, tj. svih $n-1$ pribrojnika (jer je $n-1$ paran prirodan broj, te jer je potencija $j\geq 1$) su parni brojevi. Samim time suma na desnoj strani u (5) je parna, pa zaključujemo da je čitav izraz na desnoj strani identiteta (5) neparan broj, tj. $\dfrac{(n-1)^n+1}{n}$ je neparan prirodan broj.

Neka je p proizvoljan neparan prosti broj takav da $p\mid\big((n-1)^n+1\big)^2$. Da bismo dokazali tvrdnju zadatka, dovoljno je vidjeti da tada vrijedi

$$v_p\Big(\big((n-1)^n+1\big)^2\Big)\leq v_p\Big(n(n-1)^{(n-1)^n+1}+n\Big). \tag{6}$$

Pretpostavimo, prvo da $p\mid n=(n-1)+1$. Prema teoremu 2, imamo

$$v_p\Big(\big((n-1)^n+1\big)^2\Big)=2v_p\big((n-1)^n+1\big)=2\Big(v_p\big((n-1)+1\big)+v_p(n)\Big)=4v_p(n).$$

S druge strane, koristeći činjenicu da je $(n-1)^n+1$ neparan broj, te primjenom teorema 2, odnosno potom i gornjeg identiteta, dobivamo

$$\begin{aligned}v_p\Big(n(n-1)^{(n-1)^n+1}+n\Big)&=v_p(n)+v_p\Big((n-1)^{(n-1)^n+1}+1\Big)\\&=v_p(n)+v_p(n)+v_p\big((n-1)^n+1\big)=4v_p(n).\end{aligned}$$

Dakle, u slučaju $p\mid n$, na osnovu prethodna dva identiteta, slijedi (6).

Pretpostavimo sada da $p\nmid n$, te označimo $x=v_p\big((n-1)^n+1\big)$, tj. odavde je $2x=v_p\Big(\big((n-1)^n+1\big)^2\Big)$. Prema pretpostavci $p\mid(n-1)^n+1$, te zbog ranije utvrđenje činjenice

$\dfrac{(n-1)^n+1}{n}$ je neparan prirodan broj, ponovno primjenom teorema 2, slijedi

$$\begin{aligned}
v_p\Big(n(n-1)^{(n-1)^n+1}+n\Big) &= v_p(n)+v_p\Big((n-1)^{(n-1)^n+1}+1\Big)\\
&= v_p\Big(\big((n-1)^n\big)^{\frac{(n-1)^n+1}{n}}+1\Big)\\
&= v_p\big((n-1)^n+1\big)+v_p\left(\frac{(n-1)^n+1}{n}\right),
\end{aligned}$$

odakle, zbog činjenice da n dijeli $(n-1)^n+1$, te koristeći relaciju (4), dalje imamo

$$\begin{aligned}
v_p\Big(n(n-1)^{(n-1)^n+1}+n\Big) &= v_p\big((n-1)^n+1\big)+\Big(v_p\big((n-1)^n+1\big)-v_p(n)\Big)\\
&= 2v_p\big((n-1)^n+1\big)=2x,
\end{aligned}$$

stoga, i u slučaju $p\nmid n$, vrijedi relacija (6). Time je tvrdnja zadatak u potpunosti dokazana.

Zadatak 6. *(Bjelorusija 2005., Tajvan 2016.) Nađite sve prirodne brojeve $a>b$ takve da vrijedi $(a-b)^{ab}=a^b b^a$.*

Rješenje. Očito su i a i b parni brojevi. Naime, ako su oba neparna lijeva strana jednadžbe je parni broj, a desna neparni. Ako je jedan od njih paran, a drugi neparan, tada je lijeva strana jednadžbe neparan, a desna paran broj.

U ovisnosti o odnosu između brojeva $v_2(a)$ i $v_2(b)$ razlikovat ćemo tri slučaja.

Pretpostavimo, neka je prvo $v_2(a)>v_2(b)$. Tada je $v_2(a-b)=\min\{v_2(a),v_2(b)\}=v_2(b)$, odakle dobivamo $v_2\big((a-b)^{ab}\big)=ab\,v_2(b)$. S druge strane, koristeći jednadžbu zadatka, imamo $v_2\big((a-b)^{ab}\big)=v_2(a^bb^a)=v_2(a^b)+v_2(b^a)=bv_2(a)+av_2(b)$. Stoga je $ab\,v_2(b)=bv_2(a)+av_2(b)\ \Rightarrow\ av_2(b)(b-1)=bv_2(a)$, odnosno, dalje imamo

$$\frac{b}{b-1}=\frac{a}{v_2(a)}\cdot v_2(b). \tag{7}$$

Kako je b paran broj, to je $v_2(b)\geq 1$, pa iz (7) slijedi

$$\frac{a}{v_2(a)}\leq\frac{b}{b-1}. \tag{8}$$

Nadalje, zbog činjenice da je $2^{v_2(a)}\leq a$, odnosno zbog činjenice da za svaki prirodan broj n vrijedi nejednakost $2^n\geq 2n$, a koju ćemo ovdje primijeniti za prirodan broj $v_2(a)$, iz nejednakosti (8) proizlazi

$$2\leq\frac{2^{v_2(a)}}{v_2(a)}\leq\frac{a}{v_2(a)}\leq\frac{b}{b-1}\quad\Rightarrow\quad\frac{b}{b-1}\geq 2\quad\Rightarrow\quad b\leq 2,$$

odakle, jer je b paran prirodan broj, slijedi $b=2$. Sada je $v_2(b)=v_2(2)=1$, pa iz jednakosti (7) dobivamo $a=2v_2(a)$. Odavde, dalje, ponovno koristeći činjenicu $2^{v_2(a)}\leq a$, imamo $2^{v_2(a)}\leq 2v_2(a)$, tj. $v_2(a)\geq 2^{v_2(a)-1}$. Ova nejednakost je istinita samo za $v_2(a)\in\{1,2\}$ (naime, za svaki prirodan broj $n\geq 3$ vrijedi $n<2^{n-1}$). Za $v_2(a)=1$, dobivamo $a=2v_2(a)=2\cdot 1=2$, što nije rješenje zbog uvjeta zadatka $a>b$. Za $v_2(a)=2$, dobivamo rješenje $a=2v_2(a)=2\cdot 2=4$.

Pretpostavimo sada $v_2(a)<v_2(b)$. Analogno prethodnom slučaju dobivamo $v_2(a-b)=v_2(a)$, odakle slijedi $v_2\big((a-b)^{ab}\big)=ab\,v_2(a)$. Kako je, zbog zadane jednadžbe,

$v_2\big((a-b)^{ab}\big) = bv_2(a) + av_2(b)$, ponovno, izjednačavanjem slijedi $ab\,v_2(a) = bv_2(a) + av_2(b) \;\Rightarrow\; bv_2(a)(a-1) = av_2(b)$, odnosno, dalje imamo

$$\frac{a}{a-1} = \frac{b}{v_2(b)} \cdot v_2(a). \tag{9}$$

Kako je a paran broj, to je $v_2(a) \geq 1$, pa iz (9) slijedi

$$\frac{b}{v_2(b)} \leq \frac{a}{a-1}. \tag{10}$$

Analogno, kao u prethodnom slučaju, na osnovu činjenica da je $2^{v_2(b)} \leq b$ i $2^{v_2(b)} \geq 2v_2(b)$, koristeći nejednakost (10), dobivamo $\dfrac{a}{a-1} \geq 2$, a odakle pak, zbog parnosti broja a, slijedi $a = 2$, a što je u proturječju s pretpostavkom zadatka $a > b$, te činjenicom da je b paran prirodan broj. Dakle, u slučaju $v_2(a) < v_2(b)$ nema rješenja.

Konačno, ostaje nam slučaj $v_2(a) = v_2(b)$. Označimo $x = v_2(a)$. Sada, postoje neparni prirodni brojevi A, B takvi da je $a = 2^x A$, $b = 2^x B$. Zbog uvjeta zadatka $a > b$, slijedi $A > B$.

Nadalje, iz zadane jednadžbe, dobivamo $2^{xab}(A-B)^{ab} = 2^{bx}A^b \cdot 2^{ax}B^a$, odnosno

$$2^{abx}(A-B)^{ab} = 2^{(a+b)x}A^bB^a. \tag{11}$$

Dalje, koristeći činjenicu da su A, B neparni prirodni brojevi takvi da je $A > B$, slijedi $A - B$ je paran prirodan broj, stoga je $v_2(A-B) \geq 1$. Računamo

$$\begin{aligned} v_2\big(2^{abx}(A-B)^{ab}\big) &= v_2(2^{abx}) + v_2\big((A-B)^{ab}\big) \\ &= abx + abv_2(A-B) \geq abx + ab = ab(x+1) > abx. \end{aligned} \tag{12}$$

S druge strane, koristeći činjenicu da su A, B neparni brojevi, to $v_2(A) = v_2(B) = 0$, dobivamo

$$v_2\big(2^{(a+b)x}A^bB^a\big) = v_2\big(2^{(a+b)x}\big) + v_2\big(A^bB^a\big) = (a+b)x + bv_2(A) + av_2(B) = (a+b)x. \tag{13}$$

Sada, zbog relacija (11)–(13), slijedi

$$abx < v_2\big(2^{abx}(A-B)^{ab}\big) = v_2\big(2^{(a+b)x}A^bB^a\big) = (a+b)x,$$

odakle, dalje dobivamo $ab < a + b$, odnosno dalje $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > 1$.

No, jer su a, b parni prirodni brojevi to je $a \geq 2$, $b \geq 2$, odnosno $\dfrac{1}{a} \leq \dfrac{1}{2}$, $\dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{2}$, odakle slijedi $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$, a što je u proturječju s $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} > 1$. Stoga, ni u slučaju $v_2(a) = v_2(b)$ nema rješenja.

Dakle, jedino rješenje zadatka je $(a, b) = (4, 2)$.

Zadatak 7. *(Međunarodna matematička olimpijada 2022.) Odredite sve trojke (a, b, p) prirodnih brojeva takvih da je p prosti broj i vrijedi*

$$a^p = b! + p.$$

Rješenje. Najprije, pretpostavit ćemo $b < p$.

Promatramo podslučaj $a \leq b$. Jer je $a \leq b$, tada $a \mid b!$. Iz jednažbe zadatka slijedi da $a \mid p$. No, jer je $a \leq b < p$, tj. $a < p$, te jer je p prosti broj i a je njegov djeljitelj, nužno je $a = 1$. Uvrštavanjem $a = 1$ u zadanu jednadžbu imamo $1 = b! + p$, što je u proturječju s činjenicom da je $b! + p \geq 1 + 2 = 3$. Stoga, u podslučaju $a \leq b$ zadana jednadžba nema rješenja.

Promatramo podslučaj $a > b$. Tada je $a \geq b + 1$. Sada, koristeći danu jednadžbu, odnosno binomni teorem, dobivamo

$$\begin{aligned} b! = a^p - p \geq (b+1)^p - p &= \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} b^k - p \\ &\geq 1 + pb + b^p - p = 1 + p(b-1) + b^p > b^p \geq b! \end{aligned}$$

Stoga, ni u podslučaju $a > b$ zadana jednadžba nema rješenja.

Pretpostavit ćemo sada $b \geq p$.

Uočimo, iz $p \leq b$, proizlazi $p \mid b!$. No, kako je trivijalno ispunjeno $p \mid p$, sada iz jednadžbe zadatka slijedi $p \mid a^p$, odakle dobivamo $p \mid a$. Dakle, postoji prirodan broj k takav da je $a = kp$.

U nastavku, u slučaju $b \geq p$, pokazat ćemo da je tada nužno $b < 2p$. Pretpostavimo suprotno, tj. $2p \leq b$. Odavde, pak slijedi da $p^2 \mid b!$. No, jer $p \mid a$, tada $p^2 \mid a^2 \leq a^p$, tj. tada i $p^2 \mid a^p$. Dakle, $p^2 \mid a^p - b!$. Kako je $a^p - b! = p$, proizlazi da $p^2 \mid p$ što je kontradikcija. Stoga, u slučaju $b \geq p$, pokazali smo da je nužno $b < 2p$, odnosno $b \leq 2p - 1$.

Nadalje, u ovom slučaju, tj. $p \leq b \leq 2p - 1$, gdje je $a = kp$, promatrat ćemo podslučajeve u ovisnosti o prirodnom broju k.

Pretpostavimo da je $1 < k < p$. Prvo iz $a = kp$ slijedi $k \mid a$, stoga $k \mid a^p$. Nadalje, jer je $k < p$ i $p \leq b$, to je $k < b$, pa $k \mid b!$. Dakle, $k \mid a^p - b!$, tj. $k \mid p$, što je kontradikcija s pretpostavkom $1 < k < p$, te činjenicom da je p prosti broj.

Pretpostavimo sada $k \geq p$. Tada je $a \geq p^2$, odakle imamo $a^p \geq p^{2p}$. Ponovno, prema zadanoj jednadžbi, odnosno uvjetima u promatranom slučaju, slijedi

$$\begin{aligned} a^p = b! + p \leq (2p-1)! + p = \prod_{j=1}^{2p-1} j + p &= p \prod_{j=1}^{p-1} (p-j)(p+j) + p \\ &= p \prod_{j=1}^{p-1} (p^2 - j^2) + p < p \prod_{j=1}^{p-1} p^2 + 1 \\ &= p \cdot p^{2(p-1)} + 1 < p^{2p}, \end{aligned}$$

odakle koristeći činjenicu $a^p \geq p^{2p}$ dobivamo $p^{2p} \leq a^p < p^{2p}$ konradikciju.

Dakle, nužno je $k = 1$, tj. $a = p$, odnosno jednadžba zadatka ima oblik

$$p^p - p = b!, \tag{14}$$

gdje je b prirodan broj, p prosti broj takvi da je $p \leq b \leq 2p - 1$.

Za $p = 2$, iz jednadžbe (14) imamo $b! = 2^2 - 2 = 2$, tj. $b = 2$. S obzirom da se $b = 2$ nalazi unutar intervala $p = 2 \leq b = 2 \leq 2 \cdot 2 - 1 = 2p - 1$, dobili smo jedno rješenje jednadžbe zadatka $(a, b, p) = (2, 2, 2)$.

Neka je $p \geq 3$ prosti broj, tada je specijalno $v_2(p) = 0$ i $p-1$ je paran prirodan broj. Prema teoremu 4, uz jednadžbu (14), dobivamo

$$\begin{aligned} v_2(b!) = v_2(p^p - p) &= v_2(p) + v_2\big(p^{p-1} - 1\big) \\ &= v_2(p) + \big(v_2(p-1) + v_2(p+1) + v_2(p-1) - 1\big) \\ &= 2v_2(p-1) + v_2(p+1) - 1. \end{aligned} \tag{15}$$

Nadalje, za $p = 3$ iz jednadžbe (14) slijedi $b! = 3^3 - 3 = 24$, tj. $b = 4$. Ponovno, jer je $b = 4 \in [p, 2p-1] = [3, 2 \cdot 3 - 1] = [3, 5]$, to je $(a, b, p) = (3, 4, 3)$ još jedno rješenje jednadžbe zadatka.

Za $p = 5$ iz jednadžbe (14) slijedi $b! = 5^5 - 5 = 3120$, tj. za $p = 5$ nema rješenja, jer ne postoji prirodan broj b takav da je $b! = 3120$.

Neka je sada $p \geq 7$ prosti broj. S obzirom da za svaki prirodan broj $n \geq 3$ vrijedi $n^n - n > n!$ (ovu tvrdnju može se dokazati matematičkom indukcijom), te primijenimo li istu na proizvoljan prosti broj $p \geq 7$, imamo $p^p - p > p!$, odakle pak, zbog jednadžbe (14) slijedi $b! > p!$, iz čega dobivamo $b > p$, tj. $b \geq p+1$, odnosno dalje $b! \geq (p+1)!$. Primjetimo, također da za $p \geq 7$ slijedi $\dfrac{p-1}{2} \geq 3$.

Dakle, na osnovu prethodne argumentacije, te koristeći činjenicu da $2 \mid p-1$ i relaciju (4), dobivamo

$$\begin{aligned} v_2(b!) \geq v_2\big((p+1)!\big) &\geq v_2(p+1) + v_2(p-1) + v_2\Big(\frac{p-1}{2}\Big) + v_2(2) \\ &> v_2(p+1) + v_2(p-1) + v_2\Big(\frac{p-1}{2}\Big) \\ &= v_2(p+1) + v_2(p-1) + \big(v_2(p-1) - v_2(2)\big) \\ &= 2v_2(p-1) + v_2(p+1) - 1. \end{aligned} \tag{16}$$

Konačno, za proizvoljan prosti broj $p \geq 7$, na osnovu relacija (15) i (16) dolazimo do kontradikcije, tj. za prosti broj $p \geq 7$ jednadžba zadatka nema rješenja. Stoga, sva rješenja zadatka dana su s

$$(a, b, p) \in \{(2, 2, 2), (3, 4, 3\}.$$

Na koncu ostavljamo nekoliko zadataka za samostalno rješavanje i da se sami uvjerite koliko je LTE moćan alat pri rješavanju ovakvih zadataka.

Zadatci za vježbu

1. (AIME 2020.) Neka je n najmanji prirodan broj za koji je $149^n - 2^n$ djeljiv s $3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7$. Nađite broj djeljitelja od n. (*Rezultat*: 270)

2. Neka su a i n dva prirodna broja, p neparan prosti broj takav da je $a^p \equiv 1 \pmod{p}$. Dokažite da tada vrijedi $a \equiv 1 \pmod{p^{n-1}}$.

3. Odredite sve proste brojeve p, za koje je $3^p + 4^p$ potencija prirodnog broja s eksponentom većim od 1. (*Rezultat*: $p = 2$)

4. (Iran 2008.) Dokažite da je jedini prirodni broj a za koji je $4(a^n + 1)$ potpun kub za bilo koji $n \in \mathbb{N}$, broj 1.

5. Nađite najveći eksponent k s kojim potencija 1979^k dijeli broj

$$1978^{1979^{1980}} + 1980^{1979^{1978}}.$$

6. (Bugarska 1996.) Nađite sve proste brojeve p, q za koje je $\dfrac{(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)}{pq}$ cijeli broj. (*Rezultat*: $(p, q) \in \{(3, 3), (3, 13)\}$)

7. (Poljska 1987.) Neka je q paran prirodan boj. Dokažite da je za svaki prirodan broj n broj $q^{(q+1)^n} + 1$ djeljiv s $(q+1)^{n+1}$, ali nije s $(q+1)^{n+2}$.

Literatura

[1] A. H. PARVARDI, *Lifting The Exponent Lemma (LTE)*, 2011. `https://www.academia.edu/4034266/Lifting_The_Exponent_Lemma_LTE_`

[2] P. KOŽEVNIKOV, V. SENDEROV, *Stepeni n i $n-e$ stepeni*, Kvant 2012, br. 1.

[3] A. DUJELLA, *Teorija brojeva*, Školska Knjiga, Zagreb 2019.

[4] N. ELEZOVIĆ, *Odabrani zadaci elementarne matematike*, Element, Zagreb 1992.

[5] B. BZDEGA, *Lema o podizanju p-adskog exponenta*, Delta, časopis(Poljska), no. 12, 2020. `https://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/teoria_liczb/2020/11/30/lemat-o-zwiekszaniu-wykladnika-p-adycznego/`

⋆ ⋆ ⋆

Igra s brojevima

285	Izaberite bilo koje tri znamenke tako da kod troznamenkastog broja budu znamenke jedinica i stotica različite.
582	Obrnite redoslijed znamenaka.
$582 - 285$	Oduzmite manji broj od većeg.
$= 297$	Rezultat će uvijek biti s brojkom 9 na mjestu desetica, a zbroj drugih dviju znamenaka će uvijek biti 9.
792	Sada ponovno obrnite znamenke u rezultatu.
$792 + 297$	Zbrojite ta dva broja.
$= 1089$	Rezultat će uvijek biti 1089.