Dinamika Hénonovih preslikavanja[1]

Ana Belcar[2], *Sonja Štimac*[3]

Uvod

Jedan od najistraživanijih primijera dinamičkih sustava su Hénonova preslikavanja. Njihova fascinantna kaotična dinamika, nakon 47 godina intenzivnog istraživanja, u kojima su sudjelovali i neki od najeminentnijih matematičara, još uvijek je dobrim dijelom nepoznata i zagonetna te se i danas intenzivno istražuje. No postoje mnogi vrlo zanimljivi rezultati o dinamici Hénonovih preslikavanja. Prezentirat ćemo ovdje neke od njih, kao i dio teorije dinamičkih sustava koji je potreban za njihovo razumijevanje.

U matematici dinamički sustav (X, f) je sustav koji se sastoji od prostora X, koji zovemo *fazni prostor* ili *prostor stanja*, i preslikavanja $f : X \to X$ koje opisuje vremensku ovisnost točaka faznog prostora. Preciznije, preslikavanje f opisuje neposrednu budućnost svih varijabli stanja, s obzirom samo na sadašnje vrijednosti tih istih varijabli stanja. Teorija dinamičkih sustava obuhvaća metode za analizu iteriranih preslikavanja (kada je vrijeme diskretno) i diferencijalnih jednadžbi (kada je vrijeme kontinuirano). Iterirana preslikavanja f^n, $n \in \mathbb{N}$, definiraju se induktivno $f^n = f \circ f^{n-1}$, pri čemu je f^0 identiteta, tj. $f^0(x) = x$ za svaki $x \in X$. Cilj je proučiti buduća stanja kada vrijeme ide u beskonačno. Hénonova preslikavanja su primijer diskretnih dinamičkih sustava (kada je vrijeme diskretno). U diskretnoj dinamici proučavamo *orbite naprijed* točaka faznog prostora, $\mathcal{O}^+(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}_0\} = \{x, f(x), f^2(x), \dots\}$, $x \in X$. Ako je preslikavanje f invertibilno, proučavamo (*pune*) *orbite* točaka, $\mathcal{O}(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, f^{-2}(x), f^{-1}(x), x, f(x), f^2(x), \dots\}$, $x \in X$, pri čemu je $f^{-n} = (f^{-1})^n$, $n \in \mathbb{N}$. Teorija dinamičkih sustava, osim vlastitih metoda, koristi i metode matematičke analize, geometrije i topologije.

Mnogi smatraju francuskog matematičara Henrija Poincaréa utemeljiteljem dinamičkih sustava. Poincaré je postavio osnove za lokalnu i globalnu analizu nelinearnih diferencijalnih jednadžbi u radu od 270 stranica o nebeskoj mehanici iz 1890. godine, [7]. Teoriju stabilnosti dinamičkih sustava započeo je ruski matematičar Aleksandr Ljapunov. Njegove metode razvijene 1892. godine omogućuju definiranje stabilnosti skupova običnih diferencijalnih jednadžbi, [6]. Godine 1927., američki matematičar George David Birkhoff (najpoznatiji po onome što se danas zove ergodički teorem) objavio je rad *Dynamical Systems*, gdje je dokazao iznenađujući rezultat da u blizini bilo koje homokliničke točke dvodimenzionalnog preslikavanja, postoji beskonačan niz periodičnih orbita čiji periodi idu u beskonačno, [3]. U kasnim 1950-im, američki matematičar Stephen Smalle uveo je topološki pristup u proučavanje dinamičkih sustava. Također, u radu [8] iz 1965. godine, otkrio je i proučio dinamički sustav koji je danas poznat kao Smaleova potkova. Ti rezultati pokrenuli su značajna istraživanja dinamičkih sustava.

Jedan od najistraživanijih primjera dinamičkih sustava definirao je francuski matematičar Michel Hénon u radu [5] iz 1976. godine. Ta preslikavanja danas zovemo Hénonova

---

[1] Ovaj članak je baziran na diplomskom radu A. B. pod mentorstvom S. Š.

[2] Autorica je mag. math, radi u Studencu d.o.o. u Zagrebu; e-pošta: `ana.belcar@gmail.com`

[3] Autorica je prof. dr. sc. na Matematičkom odsjeku PMF-a u Zagrebu; e-pošta: `sonja@math.hr`

preslikavanja i definirana su na sljedeći način: $H_{a,b}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$,

$$H_{a,b}(x,y)=(a-by-x^2,x),$$

pri čemu su a i b realni parametri, tj. preslikavanje $H_{a,b}$ ovisi o dva parametra, $a,b\in\mathbb{R}$. Hénon je vjerovao da su ta preslikavanja važna, jer su numerički eksperimenti za $a=1.4$ i $b=0.3$ sugerirali egzistenciju *čudnog atraktora* i *kaosa*. No da bi se matematički rigorozno dokazalo postojanje čudnih atraktora i kaos za Hénonova preslikavanja trebalo je pričekati 15 godina. To su tek 1991. godine uspjeli dokazati M. Benedicks i L. A. E. Carleson, [2]. Njihov dokaz, dugačak čak 96 stranica, objavljen je u časopisu Annals of Mathematics, koji je jedan od najboljih svjetskih znanstvenih matematičkih časopisa.

No krenimo redom, prvo nas zanima kako se dinamika Hénonovih preslikavanja mijenja kada variramo parametre a i b.

Parametar b

Budući da su Hénonova preslikavanja preslikavanja ravnine, sve definicije i rezultate koje ćemo trebati, zbog jednostavnosti, iskazat ćemo na ravnini, mada se neki od njih mogu iskazati i vrijede na puno općenitijim prostorima. Cilj nam je da članak bude razumljiv što širem krugu čitatelja.

Najprije ćemo pokazati da nije potrebno proučavati Hénonova preslikavanja $H_{a,b}$ za sve $b\in\mathbb{R}$, već je dovoljno proučavati $H_{a,b}$ samo za $0<|b|\leqslant 1$. Za to će nam trebati sljedeća definicija.

Kažemo da su preslikavanja $f,g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ *topološki konjugirana* ako postoji homeomorfizam[4] $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ takav da je

$$h\circ f=g\circ h.$$

Homeomorfizam h zovemo *topološka konjugacija* za f i g. Intuitivno, to znači da postoji "neprekidan prijelaz" s preslikavanja f na preslikavanje g i obratno. Dva topološki konjugirana preslikavanja imaju ekvivalentnu dinamiku pa je dovoljno proučavati samo jednu od njih, druga je "jednaka".

U slučaju $b=0$, Hénonova preslikavanja $H_{a,0}=(a-x^2,x)$ topološki su konjugirana jednodimenzionalnim kvadratnim preslikavanjima $Q_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $Q_a(x)=a-x^2$, $a\in\mathbb{R}$. No u ovom članaku se ne želimo baviti jednodimenzionalnom dinamikom te u nastavku nećemo promatrati slučaj $b=0$. Napomenimo samo da je dinamika kvadratnih preslikavanja bila dobro poznata u vrijeme kada su Hénonova preslikavanja definirana. Budući da se za male parametre b, na Hénonova preslikavanja može gledati kao na malu perturbaciju kvadratnih preslikavanja, vjerovalo se da će za dovoljno male parametre b, dinamika Hénonovih preslikavanja biti slična dinamici kvadratnih preslikavanja, i da će zato biti lako istražena. Ubrzo se pokazalo da to nije slučaj te da je dinamika Hénonovih preslikavanja, čak i za vrlo male vrijednosti parametra b, jako različita od dinamike kvadratnih preslikavanja, no puna iznenađenja i vrlo zanimljiva.

Kada je $b\neq 0$, Hénonovo preslikavanje $H_{a,b}$ je invertibilno i lako je izračunati inverz

$$H_{a,b}^{-1}(x,y)=\left(y,\frac{a-x-y^2}{b}\right)$$

koji je dobro definiran (jer je $b\neq 0$) i neprekidan. Štoviše, dokazat ćemo da ako su A i $B\neq 0$ parametri, tada je preslikavanje $H_{A,B}^{-1}$ topološki konjugirano preslikavanju $H_{a,b}$,

[4] Vidi definiciju 1 u Dodatku.

gdje su parametri a, b definirani na sljedeći način:

$$a = \frac{A}{B^2}, \quad b = \frac{1}{B},$$

a topološka konjugacija h je dana formulom:

$$h(x, y) = b \cdot (y, x).$$

Dokaz provodimo eksplicitnim računom:

$$\begin{aligned} h \circ H_{A,B}^{-1}(x, y) &= h\Big(y, \frac{1}{B}(A - x - y^2)\Big) = b\Big(\frac{1}{B}(A - x - y^2), y\Big) \\ &= b\Big(b\Big(\frac{a}{b^2} - x - y^2\Big), y\Big) = (a - b(bx) - (by)^2, by) \\ &= H_{a,b}(by, bx) = H_{a,b}(b(y, x)) = H_{a,b} \circ h(x, y). \end{aligned}$$

Primijetimo da je $H_{A,B}^{-1}$ također Hénonovo preslikavanje te za $B > 1$ vrijedi $0 < b < 1$, a za $B < -1$ vrijedi $-1 < b < 0$. Stoga je dovoljno proučavati dinamiku Hénonovih preslikavanja $H_{a,b}$ za $0 < |b| \leqslant 1$, jer za $|b| > 1$ postoji Hénonovo preslikavanje $H_{A,B}$, $0 < |B| < 1$, čiji inverz $H_{A,B}^{-1}$ i $H_{a,b}$ imaju ekvivalentnu dinamiku.

Za $0 < |b| < 1$ Hénonova preslikavanja $H_{a,b}$ imaju jedno jako važno svojstvo, ona su *disipativna*. To znači da za svaki podskup ravnine $S \subset \mathbb{R}^2$ koji ima strogo pozitivnu površinu, $P(S) > 0$ ($P(S)$ označava površinu skupa S), vrijedi $P(H_{a,b}(S)) < P(S)$, odnosno slika $H_{a,b}(S)$ skupa S ima manju površinu od skupa S. S druge strane, za $|b| = 1$ Hénonova preslikavanja čuvaju površinu, to jest $P(S) = P(H_{a,b}(S))$ za svaki podskup ravnine $S \subset \mathbb{R}^2$.

Budući da su metode istraživanja dinamike za disipativna preslikavanja bitno različite od metoda istraživanja dinamike preslikavanja koja čuvaju površinu, u nastavku ćemo promatrati samo disipativna Hénonova preslikavanja, tj. ona za koje je $0 < |b| < 1$.

Fiksne točke

Jako važan pojam, ne samo u dinamičkim sustavima već i u matematici općenito, su fiksne točke. Intuitivno, kao što im i samo ime kaže, to su točke koje ostaju "nepomične" pod iteracijama. Formalno, ako je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ preslikavanje, točku $x \in \mathbb{R}^2$ zovemo *fiksna točka* za preslikavanje f ako vrijedi

$$f(x) = x.$$

U dinamičkim sustavima posebnu ulogu imaju hiperboličke fiksne točke. Za fiksnu točku x preslikavanja f kažemo da je *hiperbolička* ako je apsolutna vrijednost Jacobijeve determinante[5] od f u x različita od jedan, $|Df(x)| \neq 1$. Razlikujemo tri vrste hiperboličkih fiksnih točaka, privlačne fiksne točke, odbojne fiksne točke i sedlaste fiksne točke. One su definirane na sljedeći način:

Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ difeomorfizam[6]. Neka je x hiperbolička fiksna točka preslikavanja f. Kažemo da je točka x:

[5] Vidi napomenu 1 u Dodatku.

[6] Vidi definiciju 2 i napomenu 1 u Dodatku.

(1) *privlačna*, ako su obje svojstvene vrijednosti[7] matrice $Df(x)$ po apsolutnoj vrijednosti strogo manje od 1,

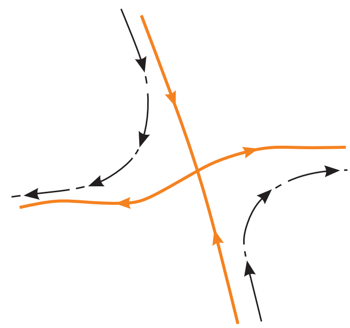
(2) *odbojna*, ako su obje svojstvene vrijednosti matrice $Df(x)$ po apsolutnoj vrijednosti strogo veće od 1,

(3) *sedlasta*, ako je jedna svojstvena vrijednost matrice $Df(x)$ po apsolutnoj vrijednosti strogo manja od 1, a druga po apsloutnoj vrijednosti strogo veća od 1.

Hiperboličke fiksne točke su važne, jer "upravljaju" dinamikom svih točaka u nekoj njihovoj okolini. Privlačna fiksna točka x za preslikavanje f ima svojstvo da postoji *otvoreni skup*[8] koji sadrži točku x, čije sve točke konvergiraju prema x pod iteracijama naprijed od f, tj. x "privlači" sve točke iz neke svoje okoline.

Odbojna fiksna točka x za preslikavanje f ima svojstvo da postoji otvoreni skup U koji sadrži točku x čije sve točke konvergiraju prema x pod iteracijama nazad od f. To znači da za svaku točku $y \in U$ postoji prirodni broj $k \in \mathbb{N}$ takav da $f^k(y)$ više ne pripada skupu U, $f^k(y) \notin U$, tj. x "odbija" sve točke iz neke svoje okoline.

Sedlasta fiksna točka generira puno složeniju dinamiku. Ako preslikavanje f ima sedlastu fiksnu točku x, postoje dvije krivulje koje se sijeku u točki x i koje se zovu *stabilna* i *nestabilna mnogostrukost* od x. To je dokazano u jednom od važnih teorema u dinamičkim sustavima koji se zove teorem o stabilnim i nestabilnim mnogostrukostima. Sve točke stabilne mnogostrukosti od x konvergiraju prema x pod iteracijama naprijed od f, a sve točke nestabilne mnogostrukosti od x konvergiraju prema x pod iteracijama nazad od f. Točke u nekoj okolini od x ponašaju se u skladu s tim, vidi sliku 1.



Slika 1. Stabilna i nestabilna mnogostrukost te iteracije točaka u okolini sedlaste fiksne točke.

Također, ako se stabilna i nestabilna mnogostrukost točke x sijeku u nekim točkama različitim od x, onda te točke zovemo *homokliničke točke* od x i na njih se odnosi Birkhoffov rezultat spomenut u uvodu.

Kao što smo definirali fiksne točke i njihova svojstva, na sličan način definiramo i periodične točke. Neka je $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ preslikavanje i neka je $n \in \mathbb{N}$. Točku x zovemo *periodična točka perioda n* ako je

$$f^n(x) = x.$$

Ako uz to još za svaki prirodni broj $m < n$ vrijedi $f^m(x) \neq x$, tada se n zove *osnovni period* od x.

Primijetimo da je fiksna točka zapravo periodična točka osnovnog perioda 1, a periodična točka perioda n je ustvari fiksna točka preslikavanja f^n. Analogno definiramo da je periodična točka osnovnog perioda n *hiperbolička* ako je apsolutna vrijednost Jacobijeve determinante od f^n u x različita od jedan, $|Df^n(x)| \neq 1$, te razlikujemo tri vrste hiperboličkih periodičnih točaka, privlačne, odbojne i sedlaste.

U slučaju Hénonovih preslikavanja egzistencija i vrsta fiksnih i periodičnih točaka ovisi o parametrima a i b. Rješavajući jednadžbu $H_{a,b}(x,y) = (x,y)$, tj. $(a - by - x^2, x) =$

[7] Vidi definiciju 1 u Dodatku.

[8] Vidi Dodatak.

(x, y), dobivamo jednadžbe $y = x$ i $x^2 + (b+1)x - a = 0$. Njihova rješenja su $y_{1,2} = x_{1,2} = \dfrac{-b-1 \pm \sqrt{(b+1)^2+4a}}{2}$. Iz toga slijedi da ako uvedemo oznaku

$$a_0 = a_0(b) = -\frac{(b+1)^2}{4},$$

tada $H_{a,b}$ nema fiksnih točaka za $a < a_0$ (vidi sliku 2), $H_{a,b}$ ima jednu fiksnu točku

$$X_0 = \Big(-\frac{b+1}{2}, -\frac{b+1}{2}\Big)$$

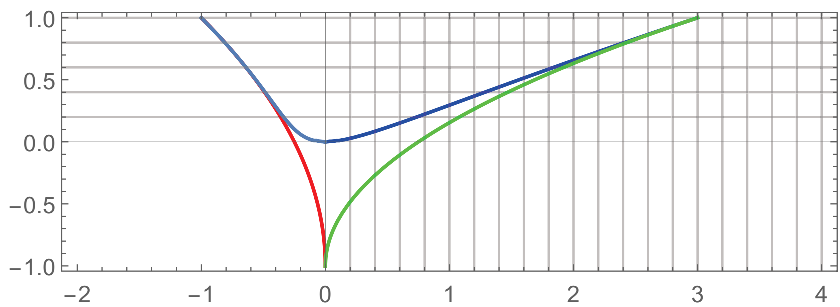
(u trećem kvadrantu) za $a = a_0$ i $H_{a,b}$ ima dvije fiksne točke za $a > a_0$ i to

$$X = \left(\frac{-b-1-\sqrt{(b+1)^2+4a}}{2}, \frac{-b-1-\sqrt{(b+1)^2+4a}}{2}\right)$$

u trećem kvadrantu i

$$Y = \left(\frac{-b-1+\sqrt{(b+1)^2+4a}}{2}, \frac{-b-1+\sqrt{(b+1)^2+4a}}{2}\right),$$

koja je za $a < 0$ u trećem kvadrantu, a za $a > 0$ u prvom kvadrantu.



Slika 2. Parametar a se nalazi na horizontalnoj osi, a parametar b na vertikalnoj. Krivulja $a_0(b) = -\dfrac{(b+1)^2}{4}$ je crvena, $a_1(b) = \dfrac{3(b+1)^2}{4}$ je zelena, $a_-(b) = b - (b+1)\sqrt{b}$ je sivo-plava, a $a_+(b) = b + (b+1)\sqrt{b}$ plava. Primijetimo da je crvena krivulja definirana za sve $b \in (-1, 1)$ samo se u jednom dijelu podudara sa sivo-plavom krivuljom te u malom dijelu i sa zelenom krivuljom. Za $a_-(b) < a < a_+(b)$ svojstvene vrijednosti matrice $DH(Y)$ su kompleksni brojevi.

Eksplicitnim računom za $a = a_0$ dobivamo

$$DH(X_0) = \begin{bmatrix} b+1 & -b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

i karakteristična jednadžba $\det(DH(X_0) - \lambda I) = 0$ ima rješenja $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = b$ pa za $a = a_0$ fiksna točka X_0 nije hiperbolička.

Za $a > a_0$ i fiksne točke X i Y vrijedi

$$DH(X) = \begin{bmatrix} b+1+\sqrt{(b+1)^2+4a} & -b \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$H(Y) = \begin{bmatrix} b+1-\sqrt{(b+1)^2+4a} & -b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

pa, očigledno, treba nešto više truda za izračunati i analizirati svojstvene vrijednosti matrica $DH(X)$ i $DH(Y)$. No, nakon par stranica računa dobije se da je fiksna točka X hiperbolička sedlasta točka za sve $a > a_0$ i $0 < |b| < 1$. Uz oznaku $a_1 = a_1(b) = \dfrac{3(b+1)^2}{4}$, fiksna točka Y nije hiperbolička za $a = a_1$ i $0 < |b| < 1$. Za $a < a_1$ i $0 < |b| < 1$, točka Y je privlačna hiperbolička fiksna točka, a za $a > a_1$ i $0 < |b| < 1$, točka Y je sedlasta hiperbolička fiksna točka (vidi sliku 2).

Dakle, za $a < a_0$, Hénonovo preslikavanje $H_{a,b}$ nema periodičnih točaka i dinamika je vrlo jednostavna, sve točke pod iteracijama naprijed i nazad divergiraju u beskonačno, preciznije:

$$\lim_{n\to\infty} |H^n_{a,b}(x)| = \infty \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} |H^{-n}_{a,b}(x)| = \infty.$$

Za $a = a_0$, $H_{a,b}$ ima jednu fiksnu točku koja nije hiperbolička. Za $a > a_0$, $H_{a,b}$ ima dvije fiksne točke, od kojih je jedna sedlasta. Druga fiksna točka je hiperbolička privlačna za $a_0 < a < a_1$, u $a = a_1$ nije više hiperbolička i za $a > a_1$ je opet hiperbolička, ali ovaj puta sedlasta. Dakle, za $a > a_1$, $H_{a,b}$ ima dvije hiperboličke fiksne točke i obje su sedlaste te dinamika postaje jako složena, toliko da ju niti danas, nakon 47 godina istraživanja, ne razumijemo dobro. No iako dinamika Hénonovih preslikavanja postaje sve složenija kako a raste, za dovoljno velike vrijednosti parametra a, dinamika je potpuno poznata i uz to veoma zanimljiva. Da bismo ju mogli opisati, proučimo prvo što je to *kaos*.

Kaos

Postoji više definicija kaosa, no mi ćemo se baviti topološkim pristupom. Danas je već standardna Devaneyeva definiciju kaosa iz 1986. godine, [4]. Da bismo ju razumijeli, prvo trebamo definirati dva pojma.

Topološka tranzitivnost. Neka je $S \subset \mathbb{R}^2$ podskup ravnine. Kažemo da je preslikavanje $f : S \to S$ *topološki tranzitivno* na S ako za svaki par otvorenih skupova $U, V \subset S$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $f^k(U) \cap V \neq \emptyset$. Može se pokazati da je f topološki tranzitivno na S ako i samo ako postoji točka $x \in S$ takva da je njena orbita naprijed $\mathcal{O}^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), \ldots\}$ gusta u S, tj. ima sljedeće svojstvo: koju god točku $y \in S$ izaberemo i kako god mali otvoreni skup U koji sadrži y uzmeno, $y \in U$, uvijek možemo naći neki $n \in \mathbb{N}$ takav da je $f^n(x) \in U$. Drugim riječima, proizvoljno blizu svake točke skupa S nalazi se barem jedna točka iz orbite točke x.

Osjetljivost na početne uvjete. Kažemo da je preslikavanje $f : S \to S$ *osjetljivo na početne uvjete* na S ako postoji $\delta > 0$ takav da za svaki $x \in S$ i svaki otvoreni skup U koji sadrži x, postoje $y \in U$ i $n \in \mathbb{N}$ takvi da je $d(f^n(x), f^n(y)) > \delta$. Osjetljivost na početne uvjete znači da za svaku točku i za svaku njenu okolinu postoji točka u toj okolini koja se u konačno mnogo iteracija odvoji od početne točke za barem δ.

Sada imamo sve pojmove potrebne za Devaneyevu definiciju kaosa. Neka je S podskup ravnine, $S \subseteq \mathbb{R}^2$. Kažemo da je preslikavanje $f : S \to S$ *kaotično* na S ako vrijede sljedeća tri svojstva:

(1) f je topološki tranzitivno na S,

(2) skup periodičnih točaka od f je gust podskup od S (tj. proizvoljno blizu svake točke skupa S nalazi se barem jedna periodična točka od f),

(3) f je osjetljivo na početne uvjete na S.

Intuitivno, kaotična preslikavanja imaju tri naizgled nespojiva svojstva. Naime, nepredvidljiva su jer se dvije točke, koje su toliko blizu da se numerički ne mogu razlikovati, mogu pod iteracijama jako udaljiti zbog osjetljivosti na početne uvjete; nerastavljiva su zbog topološke tranzitivnosti, jer postoji gusta orbita koja na neki način "povezuje" sve točke; i usred svega toga postoji gust skup točaka u S koje se pod iteracijama ponašaju potpuno regularno, tj. periodične su. Posljedično, ako je preslikavanje kaotično, svako numeričko računanje iteracija, koliko god bilo precizno, ustvari je besmisleno, jer se male greške u računu nastale zaokruživanjem, uvelike uvećavaju iteriranjem i na taj način ne možemo razlikovati dvije točke koje su jako blizu, a dinamički su bitno različite, na primjer, jedna od njih je periodična, a druga ima gustu orbitu. No postoje razne metode u dinamičkim sustavima koje su vrlo uspješne u prevladavanju tog problema, jedna od njih je simbolička dinamika.

Osjetljivost na početne uvjete smatralo se fundamentalnim svojstvom kaosa na početku razvoja te teorije. Godine 1992., J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis i P. Stacey dokazuju na dvije stranice u [1] imaju iznenađujuće svojstvo za neprekidna preslikavanja (kao i do sada, teorem iskazujemo na $\mathbb{R}^2$, mada vrijedi općenitije):

Teorem 1. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^2$ podskup i $f : S \to S$ neprekidno preslikavanje. Ako je f topološki tranzitivna na S i skup periodičnih točaka je gust u S, tada je f osjetljiva na početne uvjete na S.*

Dakle, kod neprekidnih preslikavanja osjetljivost na početne uvjete je samo posljedica topološke tranzitivnosti i egzistencije gustog podskupa periodičnih točaka.

Hiperbolički skup

Vratimo se sada na Hénonova preslikavanja. Za parametar a dovoljno velik i za $0 < |b| < 1$ postoji podskup ravnine Λ takav da je Hénonovo preslikavanje na tom skupu topološki tranzitivno. Također, Λ sadrži sve periodične točke Hénonovog preslikavanja i skup periodičnih točaka je gust u Λ. Budući da je Hénonovo preslikavanje neprekidno, po teoremu 1 slijedi da je osjetljivo na početne uvjete pa onda i kaotično na Λ. Pokažimo koliko velik treba biti a i gdje se u ravnini nalazi skup Λ.

Krenut ćemo od skupa S, definiranog kao kvadrat u ravnini oko ishodišta, $S = (-R, R) \times (-R, R) = (-R, R)^2$, gdje je R veći korijen jednadžbe $\rho^2 - (|b| + 1)\rho - a = 0$, odnosno

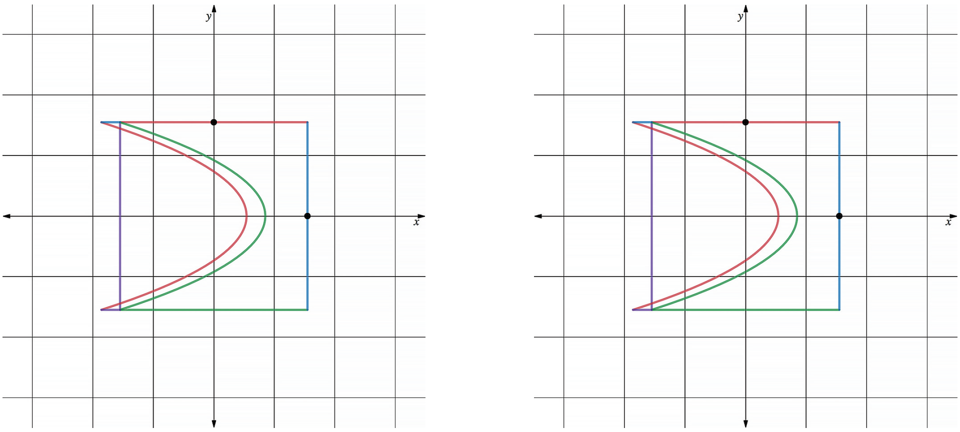
$$R = \frac{(|b| + 1) + \sqrt{(|b| + 1)^2 + 4a}}{2}.$$

Može se pokazati da sve točke izvan tog kvadrata pod iteracijama naprijed ili nazad divergiraju u beskonačnost. Preciznije, za svaki $x \notin S$ vrijedi

$$\text{ili} \lim_{n\to\infty} |H^n_{a,b}(x)| = \infty \quad \text{ili} \quad \lim_{n\to\infty} |H^{-n}_{a,b}(x)| = \infty.$$

Stoga se sve periodične točke od $H_{a,b}$ nalaze unutar skupa S.

Za $0 < |b| < 1$ i za ovako definiran skup S, postoji $a_2 = a_2(b)$ takav da za svaki $a > a_2$ skup $H_{a,b}(S)$ presijeca S. Na slici 3 možemo vidjeti dva primjera. Na lijevoj slici su kvadrat S i njegova slika $H_{0.7,0.1}(S)$ za parametre $a = 0.7$ i $b = 0.1$, a na desnoj slici su kvadrat S i njegova slika $H_{2.7,0.1}(S)$ za parametre $a = 2.7$ i $b = 0.1$. Na lijevoj slici, slika kvadrata S ne presijeca S, dok na desnoj slici, slika od S presjeca S.



Slika 3. Lijevo: $b = 0.1$, $a = 0.7$, *desno:* $b = 0.1$, $a = 2.7$

Kvadrat S na slici ima svaku stranicu u drugoj boji da se vidi kako $H_{a,b}$ preslikava stranice od S. Na primijer, crvena i zelena stranica kvadrata se preslikaju u crvenu i zelenu parabolu na slici, a vertikalne stranice kvadrata se preslikaju u male horizontalne dužine, lijeva ljubičasta stranica se preslika u malu donju ljubičastu dužinu, a desna plava stranica u gornju plavu dužinu.

Vrijednost parametra a_2 možemo izračunati usporedbom x-koordinata dviju točaka p i $H_{a,b}(q)$, pri čemu je p točka na sjecištu plave stranice kvadrata i x-osi, a q je točka na presjeku crvene stranice kvadrata i y-osi, vidi sliku 3. Kada je x-koordinata točke $H_{a,b}(q)$ veća od x-koordinate točke p, skup $H_{a,b}(S)$ presijeca S. Na taj način dobivamo $a_2 = 2(|b| + 1)^2$.

Neka je $z = (z_x, z_y) \in \mathbb{R}^2$ točka u ravnini s koordinatama z_x, z_y. Primijetimo da je skup svih točaka $z \in \mathbb{R}^2$ za koje je $|z_x| \leq 1 + |b|$ vertikalna pruga u ravnini koja sadrži y-os te da je skup svih točaka $z \in \mathbb{R}^2$ za koje je $|z_y| \leq 1 + |b|$ horizontalna pruga u ravnini koja sadrži x-os. Može se pokazati, no to sada više nije tako jednostavno, da ako je $a > a_2$, tada pruge $|z_x| \leq 1 + |b|$ i $|z_y| \leq 1 + |b|$ ne sadrže niti jednu periodičnu točku od $H_{a,b}$ i pripadni skup S bez te dvije pruge je neprazan skup koji se sastoji od četiri kvadrata od kojih svaki sadrži po jedan vrh kvadrata S. Ako taj skup označimo s D,

$$D = S \setminus (\{z = (z_x, z_y) : |z_x| \leq 1 + |b|\} \cup \{z = (z_x, z_y) : |z_y| \leq 1 + |b|\}),$$

vrijedi $\Lambda \subset D$ i štoviše

$$\Lambda = \{z \in D : H^n_{a,b}(z) \in D, \forall n \in \mathbb{Z}\},$$

tj. Λ je skup svih onih točaka iz D čije sve iteracije naprijed i nazad zauvijek ostaju u D. Skup Λ je *hiperbolički skup* za $H_{a,b}$, što grubo govoreći znači da svaka točka od Λ ima svoju stabilnu i nestabilnu mnogostrukost. Kao što smo već rekli, skup Λ sadrži točku koja ima gustu orbitu u Λ, sadrži skup svih periodičnih točaka koji je gust u Λ te je $H_{a,b}$ na Λ kaotična. Dinamika Hénonovog preslikavanja na skupu Λ je topološki konjugirana dobro poznatoj Smaleovoj potkovi.

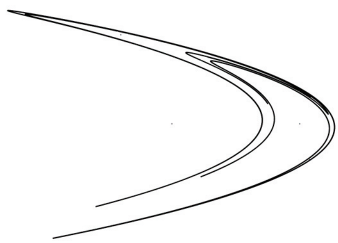
Primijetimo da je $a_1 < 1.5$ za male b i da je $a_2 > 2$. Za parametre a između a_1 i a_2 i male b, dinamika Hénonovih preslikavanja je najsloženija i jos uvijek ju slabo razumijemo. No postoje neki vrlo zanimljivi rezultati i za te parametre. Da bismo ih mogli iskazati, proučimo što su to atraktori.

Hénonov atraktor

Jedno od važnih pitanja pri proučavanju dinamičkih sustava je egzistencija čudnih atraktora. Za dinamički sustav (X, f) atraktor je skup $A \subset X$ za koji postoji otvoreni skup $U \subset X$ koji sadrži A, $A \subset U$, takav da je slika *zatvarača*[9] od U sadržana u U, $f(\mathrm{Cl}\, U) \subset U$, i pri tome je $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} f^n(U)$. To znači da kada iteriramo bilo koju točku $x \in U$, ona se po iteracijame sve više i više približava atraktoru A, odnosno atraktor A 'privlači' sve točke iz svoje okoline. Zato se A i zove atraktor. Lako se može pokazati da je atraktor invarijantan skup za f, što znači da vrijedi $f(A) = A$ i $f^{-1}(A) = A$.

Atraktor može biti samo jedna točka, fiksna točka, ili skup od konačno mnogo točaka, periodična orbita, no zaista zanimljivi atraktori su oni koje zovemo čudni atraktori, a to su atraktori koji imaju gustu orbitu. Čudni atraktori su vrlo često skupovi koji imaju fraktalnu strukturu.

Kao što smo već rekli, kada je Hénon 1976. godine definirao preslikavanja $H_{a,b}$, vjerovao je da su ona važna, jer su numerički pokusi za $a = 1.4$, $b = 0.3$ sugerirali egzistenciju čudnog atraktora, vidi sliku 4[10].



Slika 4. Hénonov atraktor za $a = 1.4$ *i* $b = 0.3$.

No egzistenciju čudnih atraktora, za skup parametara a, b koji ima pozitivnu površinu, bilo je jako teško rigorozno matematočki dokazati. To su tek 1991. godine uspjeli M. Benedicks i L. A. E. Carleson, [2]. Skup parametara za koji je dokazana egzistencija čudnih atraktora ne uključuje Hénonove orginalne parametre $a = 1.4$, $b = 0.3$. U tom skupu, koji ima fraktalnu strukturu, b-ovi su pozitivni i jako mali, a a-ovi su jako blizu broja 2. Mada je taj skup relativno mali, jako je važno da ima pozitivnu površinu. To znači da je vjerojatnost da $H_{a,b}$ ima čudni atraktor pozitivna, kada god na slučajan način odaberemo neku točku (a, b) u ravnini, ako je (a, b) dovoljno blizini točke $(2, 0)$ i $b > 0$.

Kasnije je taj rad generaliziran više puta od raznih autora, tj. dokazana je egzistencija čudnih atraktora za razne familije preslikavanja koje sadrže familiju Hénonovih preslikavanja za određeni skup parametara. Jedna od generalizacija dana je 10 godina kasnije u [9]. U tom radu Q. Wang i L.-S. Young dokazuju da za svaki $a^* \in [1.5, 2]$, za koji je kvadratna funkcija $q_{a^*}(x) = 1 - a^* x^2$ Misiurewiczevo preslikavanje, postoji skup parametara

[9] Vidi podpoglavlje Otvoreni i zatvoreni skupovi.

[10] Slika je preuzeta s `https://en.wikipedia.org/wiki/Hénon map`.

(a,b), $b \neq 0$, proizvoljno blizu $(a^*,0)$ takav da Hénonovo preslikavanje $H_{a,b}$ ima čudan atraktor. Također, taj skup parametara ima pozitivnu površinu. Primijetimo da ovdje b može biti i pozitivan i negativan te da za $a^* = 2$ i $b > 0$ dobivamo rezultat dokazan u [2]. Inače, preslikavanje $q_a(x) = 1 - ax^2$ zovemo Misiurewiczevo preslikavanje, ako su sve pozitivne iteracije kritične točke 0 'relativno daleko' od 0, ili preciznije, ako postoji $\varepsilon > 0$ takav da je $|q_a^n(0)| > \varepsilon$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Hénonov atraktor preslikavanja $H_{a,b}$ se često označava $\Lambda_{a,b}$ ili kraće samo Λ ako se zna na koje parametre se odnosi. On ne samo da ima točku čija orbita naprijed je gusta u Λ, već je i skup periodičnih točaka gust u Λ te je $H_{a,b}$ kaotično na Λ.

Dodatak

U ovom dodatku definirat ćemo i objasniti neke pojmove koji nisu usko vezani uz dinamičke sustave i Hénonova preslikavanja, već se koriste široko u matematici, a potrebni su za razumijevanje ovog članka. Kao što smo već napomenuli na početku, s ciljem da članak bude razumljiv što širem krugu čitatelja, sve definicije i rezultate iskazat ćemo na ravnini, mada se neki od njih mogu iskazati i vrijede na puno općenitijim prostorima.

Definicija 1. Preslikavanje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zovemo *homeomorfizam* ako je bijekcija te su i f i f^{-1} neprekidna preslikavanja.

Definicija 2. Preslikavanje $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zovemo *difeomorfizam* ako je f homeomorfizam i dodatno su f i f^{-1} diferencijabilna preslikavanja.

Napomena 1. Ono što je za nas važno je da ako je f difeomorfizam, postoje sve parcijalne derivacije od f i f^{-1} te je dobro definirana *Jacobijeva matrica* preslikavanja $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$,

$$Df = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix},$$

i *Jacobijeva determinanta* od f,

$$|Df| = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial f_2}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial f_1}{\partial y}.$$

Definicija 3. *Svojstvene vrijednosti* matrice $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ su korijeni karakterističnog polinoma od M danog s

$$P(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc.$$

Otvoreni i zatvoreni skupovi

Neka su $p, q \in \mathbb{R}^2$, $p = (p_x, p_y)$, $q = (q_x, q_y)$, točke u ravnini. S $d(p, q)$ označavamo udaljenost točaka p, q i ona je dana formulom

$$d(p,q) = \sqrt{(p_x - q_x)^2 + (p_y - q_y)^2},$$

a s $|p| = |(p_x, p_y)|$ udaljenost točke p od ishodišta.

Krug u ravnini sa središtem u točki x radijusa $r > 0$ je skup $K(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) < r\}$, a kružnica sa središtem u točki x radijusa $r > 0$ je skup $S(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) = r\}$. Primijetimo da u našoj definiciji kružnica nije podskup kruga.

Neka je $U \subseteq \mathbb{R}^2$ podskup ravnine. Za U kažemo da je *otvoren skup* ako se može prikazati kao unija neke familije krugova iz $\mathbb{R}^2$. Može se pokazati da je skup U otvoren ako i samo ako za svaku točku $z \in U$ postoji $t > 0$ takav da je $K(z, t) \subseteq U$. Primijetimo da je svaki krug otvoren skup u $\mathbb{R}^2$, no skup $K(x, r) \cup S(x, r)$ nije otvoren u $\mathbb{R}^2$ zato što za bilo koju točku $z \in S(x, r)$ ne postoji niti jedan krug $K(z, t)$, $t > 0$, takav da je $K(z, t) \subseteq K(x, r) \cup S(x, r)$.

Za skup $T \subset \mathbb{R}^2$ kažemo da je *zatvoren* u $\mathbb{R}^2$, ako je njegov komplement $\mathbb{R}^2 \setminus T$ otvoren. *Zatvarač* $\mathrm{Cl}\, V$ skupa $V \subseteq \mathbb{R}^2$ je najmanji zatvoreni skup od $\mathbb{R}^2$ koji sadrži V. Primijetimo da ako je $T \subset \mathbb{R}^2$ zatvoren skup, onda je $T = \mathrm{Cl}\, T$. Također, za svaki $x \in \mathbb{R}^2$ i $r > 0$, vrijedi $\mathrm{Cl}\, K(x, r) = K(x, r) \cup S(x, r)$.

Literatura

[1] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, P. Stacey, *On Devaney's Definition of Chaos*, The American Mathematical Monthly, **99** (1992), 332–334.

[2] M. Benedicks, L. A. E. Carleson, *The dynamics of the Hénon map*, Annals of Mathematics **133** (1991), 73–169.

[3] G. D. Birkhoff, *Dynamical Systems*, American Mathematical Society, Providence, RI, 1927., ponovno tiskano s uvodom J. Mosera i predgovorom od M. Morsea 1966.

[4] R. L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems*, 2nd edition, Westview Press, 1989.

[5] M. Hénon, *A two-dimensional mapping with a strange attractor*, Communications in Mathematical Physics, **50** (1976), 69–77.

[6] A. M. Lyapunov, *The general problem of the stability of motion*, Kharkov Mathematical Society, Kharkov, 1892, 251 stranica (na ruskom).

[7] H. J. Poincaré, *Sur le probleme des trois corps et les équations de la dynamique*, Acta Mathematica, **13** (1890), 1–270.

[8] S. Smale, *Diffeomorphisms with many periodic points*, Differential and Combinatorial Topology: A Symposium in Honor of Marston Morse, S. S. Cairns (ed)., 63–70, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1965.

[9] Q. Wang, L.-S. Young, *Strange attractors with one direction of instability*, Communications in Mathematical Physics **218** (2001), 1–97.