ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 31. prosinca 2023. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. 3/295.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 72.

A) Zadatci iz matematike

3931. Razlomak
$$\frac{101010101}{110010011}$$
zapisan je u proizvoljnoj bazi. Dokaži da mu se vrijednost neće promijeniti ako se srednja znamenka 1 zamijeni bilo kojim slogom znamenki 1, tj. da vrijedi:
$$\frac{101010101}{110010011}=\frac{1010\overbrace{11\ldots1}^{n}0101}{1100\underbrace{11\ldots1}_{n}0011}.$$

3932. Ako su α_1, α_2, α_3 nultočke polinoma x^3+2x^2+7x+1 koliko je $\alpha_1^3+\alpha_2^3+\alpha_3^3$?

3933. Nađi sva cjelobrojna rješenja (x,y) jednadžbe
$$x^2(y-1)+y^2(x-1)=1.$$

3934. Nađi sve racionalne brojeve x za koje je
$$\sqrt{8x^2-2x-3}$$
također racionalan broj.

3935. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc=1$. Dokaži nejednakost
$$\frac{ab}{a^5+b^5+ab}+\frac{bc}{b^5+c^5+bc}+\frac{ca}{c^5+a^5+ca}\leq 1.$$
Kada vrijedi jednakost?

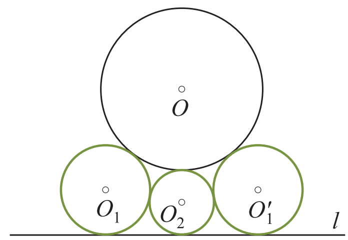
3936. Izračunaj zbroj
$$\sum_{k=1}^{16}\log_2\left(\sqrt{\sin^2\frac{k\pi}{8}+1}-\sin\frac{k\pi}{8}\right).$$

3937. Unutar četverokuta $ABCD$ dana je točka M takva da je $ABMD$ paralelogram. Ako je $\sphericalangle CBM=\sphericalangle CDM$ dokaži da je $\sphericalangle ACD=\sphericalangle BCM$.

3938. Točka M je unutar paralelograma $ABCD$ tako da je $|AM|=6$, $|BM|=2$, $|CM|=\sqrt{2}$. Odredi površinu pravokutnika $ABCD$ ako je $|AB|=2|AD|$.

3939. Neka je ABC šiljastokutni trokut i MD, ME, MF okomice iz točke M unutar trokuta na stranice $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, tim redom. Nađi omjer površina trokuta ABC i DEF ako je $|AB|=c$, $|BC|=a$, $|CA|=b$, $|MD|=n$, $|ME|=k$, $|MF|=m$.

3940. Tri kružnice $O_1(b)$, $O_2(c)$, $O_1'(b)$ tim redom dodiruju pravac l i kružnicu $O(a)$ izvana. Izrazi a u zavisnosti od b i c.



3941. Neka su $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ tri međusobno nekolinearna vektora. Dokaži da su tri kuta koja zatvaraju simetrale kutova $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COA$ ili svi šiljastokutni ili svi pravi ili svi tupokutni.

3942. Dokaži jednakost determinanti
$$\begin{vmatrix}1 & a & a^3\\ 1 & b & b^3\\ 1 & c & c^3\end{vmatrix}=(a+b+c)\begin{vmatrix}1 & a & a^2\\ 1 & b & b^2\\ 1 & c & c^2\end{vmatrix}.$$

3943. Dokaži da zbroj
$$\cos 8x+a_7\cos 7x+a_6\cos 6x+\ldots+a_1\cos x$$
ne može biti pozitivan za sve $x\in\mathbb{R}$.

3944. Odredi zbroj
$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m!n!}{(m+n+2)!}.$$

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 522. Ivan želi izračunati koliko pločica treba kupiti za popločavanje njihovog vanjskog stepeništa koje ima 15 stepenica dugačkih 60 cm i širokih 20 cm. Gazišta su visoka 18 cm. Treba popločiti i cijelu jednu bočnu stranu stepeništa. Njegovi roditelji žele da to lijepo izgleda te da i stepenice i bočna strana budu napravljeni tako da vertikalne i horizontalne fuge budu svuda na istim pravcima. Pločice su dugačke 30 i široke 20 cm. Koliko ih treba kupiti i koliko će posto biti otpada?

OŠ – 523. Loptica ispuštena s visine od pola metra nakon četvrtog odskoka odskoči na visinu 30 cm. Na koju je visinu odskočila nakon prvog odskoka?

OŠ – 524. Matea ima strujni krug u obliku pravokutnika kojem su na duljim stranicama otpornici od $25\ \Omega$, a na kraćima su otpornici od $5\ \Omega$. Na jednu je dijagonalu spojila otpornik kojem nije znala otpor i krajeve te dijagonale je spojila na izvor struje napona 12 V. Struja je u glavnom vodiču iznosila 2 A. Koliko iznosi nepoznati otpor?

OŠ – 525. Astrid treba 12 minuta da brzim hodom stigne do škole. Kad je s prijateljicom hodaju sporije jer moraju provjeriti jesu li dobro napisale zadaću i tada im je brzina manja za 0.4 m u sekundi pa u školu stignu 6 minuta kasnije. Koliko je njena škola udaljena od kuće?

1819. Odredi udio vrijednosti bakra u izradi kovanice od 10 eurocenti. Masa kovanice je 4.1 g, legura za izradu (nordijsko zlato) sadrži 89 % bakra, a cijena bakra je 7.6 eura/kg.

1820. Odredi razliku brzine zvuka u zraku na temperaturi $30\,^\circ\mathrm{C}$ i $0\,^\circ\mathrm{C}$. Zrak je približno dvoatomni idealni plin srednje molekulske mase 29 g/mol.

1821. Halleyev komet ima ekscentričnu putanju koja je najbliže Suncu (perihel) 0.585 a.j., a najdalje od Sunca (afel) 35.082 a.j. Koristeći Keplerove zakone i definiciju a.j. kao duljinu velike poluosi putanje Zemlje oko Sunca odredi ophodno vrijeme, ekscentricitet, najveću i najmanju brzinu kometa u odnosu na Sunce, te brzinu kad se komet nalazi 1 a.j. udaljen od Sunca.

1822. Niz jednoliku kosinu nagiba 8° giba se automobil. Kolika je najveća akceleracija kočenja za koju gume neće prokliznuti, ako je koeficijent proklizavanja gume i podloge (koeficijent statičkog trenja) jednak 0.56?

1823. Koliku bi masu imalo nebesko tijelo oblika kugle, ako je ubrzanje sile teže na površini $9.81\ \mathrm{m/s^2}$, a prosječna mu je gustoća $20\ \mathrm{kg/dm^3}$? Koliki je to postotak mase Zemlje, ako ona iznosi $6\cdot 10^{24}$ kg?

1824. Dva ohmska trošila spojena paralelno u strujni krug troše snagu 70 W i 30 W. Koliku će snagu trošiti svako trošilo, ako ih spojimo serijski na isti naponski izvor?

1825. Radioaktivni uzorak sadrži 44 μg (mikrograma) ^{60}Co. Odredite:

a) Koliko je atoma ^{60}Co u uzorku?

b) Koliko će se atoma ^{60}Co raspasti u deset sekundi?

Vrijeme poluživota ^{60}Co iznosi 1925.1 dan.

C) Rješenja iz matematike

3903. *Neka su a, b, c pozitivni brojevi takvi da je $a+b+c=1$. Dokaži*

$$\frac{bc}{1+a}+\frac{ca}{1+b}+\frac{ab}{1+c}\le\frac{1}{4}.$$

Rješenje. Krenemo od uvjeta zadatka

$$\begin{aligned}1&=a+b+c\\&=\frac{ab+ca}{b+c}+\frac{bc+ab}{c+a}+\frac{ca+cb}{a+b}\\&=bc\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}\right)\\&\quad+ca\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}\right)\\&\quad+ab\left(\frac{1}{c+a}+\frac{1}{b+c}\right).\end{aligned}$$

Za pozitivne broje x, y iskoristimo poznatu nejednakost

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\ge\frac{4}{x+y}.$$

Imamo:

$$\begin{aligned}1 \geq bc \cdot \frac{4}{(a+b+c)+a} \\ + ca \cdot \frac{4}{(a+b+c)+b} \\ + ab \cdot \frac{4}{(a+b+c)+c} \\ \Longrightarrow \frac{bc}{1+a} + \frac{ca}{1+b} + \frac{ab}{1+c} \leq \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Marko Dodig (4),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3904. *Dokaži da je za svaki cijeli broj* $n \geq 1$ *broj*

$$\frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{3}n^3 + \frac{7}{15}n$$

cijeli.

Prvo rješenje. Dani broj svedemo na zajednički nazivnik, pa ga pišemo $\frac{3n^5+5n^3+7n}{15}$. Brojnik ovog razlomka označimo s $I(n) = 3n^5 + 5n^3 + 7n$. Sada ćemo matematičkom indukcijom dokazati da $15 \mid I(n)$, za svaki $n \geq 1$.

Baza. Za $n = 1$, je $I(1) = 15$ i tvrdnja očito vrijedi.

Pretpostavka. Neka vrijedi $15 \mid I(k)$ za sve prirodne brojeve $k \leq n$.

Korak. Dokažimo da tada vrijedi i $15 \mid I(n+1)$.

$$\begin{aligned}I(n+1) &= 3(n+1)^5 + 5(n+1)^3 + 7(n+1) \\ &= 3(n^5 + 5n^4 + 10n^3 + 10n^2 + 5n + 1) \\ &\quad + 5(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) + 7(n+1) \\ &= 3n^5 + 5n^3 + 7n \\ &\quad + 15(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n) + 3 + 5 + 7 \\ &= I(n) + 15(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n) + 15.\end{aligned}$$

Koristeći pretpostavku indukcije vidimo da $15 \mid I(n+1)$ što smo i tvrdili. Ovime je zadatak riješen.

Marko Dodig (4), Zagreb

Drugo rješenje.

$$\begin{aligned}A &= \frac{3n^5 + 5n^3 + 7n}{15} \\ &= \frac{(3n^4 + 5n^2 + 7)n}{15}.\end{aligned}$$

Dovoljno je pokazati da je

$1^\circ \quad (3n^4 + 5n^2 + 7)n \ \vdots \ 3$

$2^\circ \quad (3n^4 + 5n^2 + 7)n \ \vdots \ 5$

$1^\circ \quad (5n^2 + 7)n \ \vdots \ 3$

Za $n = 3k$, $k \in \mathbb{N}$ tvrdnja vrijedi.

Za $n = 3k \pm 1$, $k \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}5n^2 + 7 &= 5(3k \pm 1)^2 + 7 \\ &= 5(9k^2 \pm 6k + 1) + 7 \\ &= 3(15k^2 \pm 10k + 4) \ \vdots \ 3.\end{aligned}$$

$2^\circ \quad (3n^4 + 7)n \ \vdots \ 5$

Za $n = 5k$, $k \in \mathbb{N}$ tvrdnja vrijedi.

Za $n = 5k \pm 1$ i $n = 5k \pm 2$, $k \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}3n^4 + 7 &= 3(5k \pm 1)^4 + 7 \\ &= 3 \cdot 625k^4 \pm 3 \cdot 4 \cdot 125k^3 \\ &\quad + 3 \cdot 6 \cdot 25k^2 \pm 3 \cdot 4 \cdot 5k + 3 + 7 \\ &= 5k_1 \ \vdots \ 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3n^4 + 7 &= 3(5k \pm 2)^4 + 7 \\ &= 3 \cdot 625k^4 \pm 3 \cdot 4 \cdot 125 \cdot 2k^3 \\ &\quad + 3 \cdot 6 \cdot 25k^2 \cdot 4 \pm 3 \cdot 4 \cdot 5k \cdot 8 \\ &\quad + 3 \cdot 16 + 7 \\ &= 5k_2 \ \vdots \ 5.\end{aligned}$$

Ur.

3905. *Riješi sustav linearnih jednadžbi*

$$\begin{aligned}x + y + z &= a \\ x + \varepsilon y + \varepsilon^2 z &= b \\ x + \varepsilon^2 y + \varepsilon z &= c,\end{aligned}$$

gdje je $\varepsilon = \sqrt[3]{1} \neq 1$.

Prvo rješenje. Najprije uočimo da iz

$$\varepsilon^3 - 1 = 0 \implies (\varepsilon - 1)(\varepsilon^2 + \varepsilon + 1) = 0,$$

a zbog uvjeta u zadatku je

$$\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0.$$

Sada zbrajanjem sve tri jednadžbe danog sustava dobivamo

$$\begin{aligned} &3x + (1 + \varepsilon + \varepsilon^2)y + (1 + \varepsilon^2 + \varepsilon)z \\ &\quad = a + b + c \\ &\quad \implies x = \frac{a+b+c}{3}. \end{aligned}$$

Ako sada drugu jednadžbu sustava pomnožimo s ε^2, a treću s ε dobivamo sustav

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ \varepsilon^2 x + y + \varepsilon z &= \varepsilon^2 b \\ \varepsilon x + y + \varepsilon^2 z &= \varepsilon c. \end{aligned}$$

Zbrajanjem ovih jednadžbi slijedi

$$y = \frac{a + \varepsilon^2 b + \varepsilon c}{3}.$$

Na koncu, ako drugu jednadžbu polaznog sustava pomnožimo s ε, a treću s ε^2 i potom ih zbrojimo slijedi i treća nepoznanica

$$z = \frac{a + \varepsilon b + \varepsilon^2 c}{3}.$$

Marko Dodig (4), Zagreb

Drugo rješenje. Determinanta sustava je

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix} = 3(\varepsilon^2 - \varepsilon).$$

Tada je

$$\begin{aligned} x &= \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ c & \varepsilon^2 & \varepsilon \end{vmatrix}}{3(\varepsilon^2 - \varepsilon)} \\ &= \frac{(a+b+c)(\varepsilon^2 - \varepsilon)}{3(\varepsilon^2 - \varepsilon)} \\ &= \frac{a+b+c}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & b & \varepsilon^2 \\ 1 & c & \varepsilon \end{vmatrix}}{3(\varepsilon^2 - \varepsilon)} \\ &= \frac{(a(\varepsilon^2 - \varepsilon) + b(\varepsilon - 1)\varepsilon^2 + c(1 - \varepsilon^2)\varepsilon^3)}{3(\varepsilon^2 - \varepsilon)} \\ &= \frac{a(\varepsilon^2 - \varepsilon) + b\varepsilon^2(\varepsilon^2 - \varepsilon) + c\varepsilon(\varepsilon^2 - \varepsilon)}{3(\varepsilon^2 - \varepsilon)} \\ &= \frac{a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & \varepsilon & b \\ 1 & \varepsilon^2 & c \end{vmatrix}}{3(\varepsilon^2 - \varepsilon)} = \ldots \\ &= \frac{a + b\varepsilon + c\varepsilon^2}{3}. \end{aligned}$$

Ur.

3906. *Odredi sva rješenja jednadžbe*

$$xy(x^2 + y^2) = 2z^4.$$

Rješenje. Množenjem s 8 dobivamo

$$8xy(x^2 + y^2) = 16z^4$$

ili

$$(x+y)^4 - (x-y)^4 = (2z)^4$$

tj.

$$(x-y)^4 + (2z)^4 = (x+y)^4.$$

Ovo je Fermatova jednadžba za $n = 4$ i njezino rješenje je $x - y = 0$ ili $2z = 0$.

Za $x - y = 0$ imamo $x = y$ i $z = \pm x$. Dakle, rješenja su $x = y = m$, $z = \pm m$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

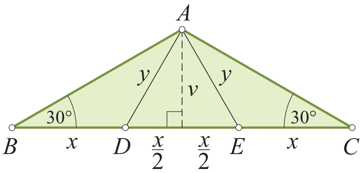
Ako je $z = 0$ tada je $(x-y)^4 = (x+y)^4$ i $x = 0$ ili $y = 0$. Rješenja su $x = 0$, $y = m$, $z = 0$ i $x = m$, $y = 0$, $z = 0$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

Marko Dodig (4), Zagreb

3907. *Trokut ABC je jednakokračan s vršnim kutom $\measuredangle CAB = 120^\circ$. Ako točke D i E dijele bazu $\overline{BC}$ na tri jednaka dijela, dokaži da je trokut ADE jednakostraničan.*

Rješenje. Uz oznake kao na slici vrijedi:

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{v}{x + \frac{x}{2}} \implies v = \frac{\sqrt{3}}{2}x.$$



Prema Pitagorinu poučku je

$$y = \sqrt{v^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^2} = x.$$

Ovim je tvrdnja zadatka dokazana.

Marko Dodig (4), Zagreb

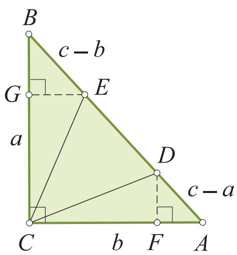
3908. *Kut u vrhu C trokuta ABC je pravi. Točke D i E su na hipotenuzi tako da je $|BC| = |BD|$ i $|AC| = |AE|$. Dokaži*

$$|DE| = |DF| + |EG|,$$

gdje su $\overline{DF}$ i $\overline{EG}$ redom visine trokuta CAD i BCE.

Rješenje. Sa slike vidimo da vrijedi

$$|DE| = a + b - c.$$



Sada imamo:

$$\begin{aligned} P_{\triangle BCE} + P_{\triangle ACE} &= P_{\triangle ABC} \\ \frac{|EG| \cdot a}{2} + \frac{b^2 \sin\alpha}{2} &= \frac{ab}{2} \\ |EG| \cdot a + b^2 \cdot \frac{a}{c} &= ab \\ |EG| &= b - \frac{b^2}{c}. \end{aligned} \qquad (1)$$

Analogno je:

$$\begin{aligned} P_{\triangle ACD} + P_{\triangle BCD} &= P_{\triangle ABC} \\ \frac{|DF| \cdot b}{2} + \frac{a^2 \sin\beta}{2} &= \frac{ab}{2} \\ |DF| \cdot b + a^2 \cdot \frac{b}{c} &= ab \\ |DF| &= a - \frac{a^2}{c}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Iz (1) i (2) slijedi

$$\begin{aligned} |DF| + |EG| &= a + b - \frac{a^2 + b^2}{c} \\ &= a + b - \frac{c^2}{c} \\ &= a + b - c = |DE|, \end{aligned}$$

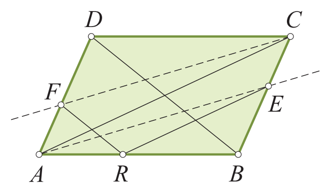
što se i tvrdilo.

Marko Dodig (4), Zagreb

3909. *Dan je paralelogram $ABCD$. Iz točaka A i C povučeni su paralelni pravci AE i CF koji sijeku $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ u E i F. Kroz točku E prolazi paralela s AC koja siječe stranicu $\overline{AB}$ u R. Dokaži $FR \parallel BD$.*

Prvo rješenje. Iz uvjeta zadatka je

$$\frac{|AF|}{|FD|} = \frac{|CE|}{|EB|}.$$



Kako je $ER \| AC$, po Talesovu poučku o proporcionalnosti imamo

$$\frac{|CE|}{|EB|} = \frac{|AR|}{|BR|}.$$

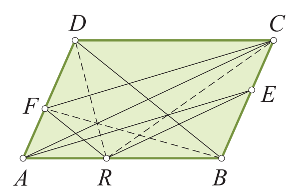
Iz dvije dobivene jednakosti slijedi

$$\frac{|AF|}{|FD|} = \frac{|AR|}{|BR|}. \qquad (1)$$

Obrat Talesovog poučka o proporcionalnosti kaže: *Ako dva pravca na krakovima kuta odsijecaju proporcionalne dužine onda su ti pravci usporedni.* Koristeći ovu tvrdnju iz (1) slijedi $FR \| BD$.

Marko Dodig (4), Zagreb

Drugo rješenje. Imamo $P_{ABF} = P_{ACF}$ (jednake baze i visine).



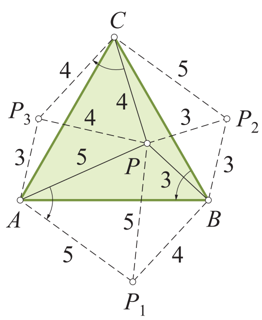
Kako je $AE \| CF$, $AECF$ je paralelogram, pa je $P_{ACF} = P_{AEC}$, tj. $P_{ABF} = P_{AEC}$. Kako je $P_{AEC} = P_{ARC}$ (jer je $AR \| CD$) vrijedi $P_{ABF} = P_{ARD}$. Oduzimanjem površine zajedničkog trokuta P_{ARF} dobivamo $P_{FRB} = P_{FRD}$, a kako ovi imaju zajedničku stranicu $\overline{FR}$ slijedi $FR \| BD$.

Ur.

3910. *Unutar jednakostraničnog trokuta ABC postoji točka P takva da je $|AP| = 5$, $|BP| = 3$, $|CP| = 4$. Odredi duljinu stranice trokuta.*

Prvo rješenje. Zarotirajmo dužine $\overline{AP}$, $\overline{PB}$ i $\overline{PC}$ za 60° prema vanjštini trokuta ABC, kao na slici. Tako se dobiju točke P_1, P_2, P_3 i očito vrijedi $\triangle AP_1B \cong \triangle APC$, $\triangle BP_2C \cong \triangle APB$ i $\triangle CP_3A \cong \triangle BPC$. Znači, površina šesterokuta $AP_1BP_2CP_3$ dvostruko je veća od površine trokuta ABC. Taj šesterokut se sastoji od tri jednakostranična trokuta i još tri sukladna raznostranična trokuta stranica 3, 4 i 5. Tako je:

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= \frac{1}{2} \cdot P_{AP_1BP_2CP_3} \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{4}(3^2+4^2+5^2) + 3\sqrt{6 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}\right] \\ &= \frac{25}{4}\sqrt{3} + 9. \end{aligned}$$



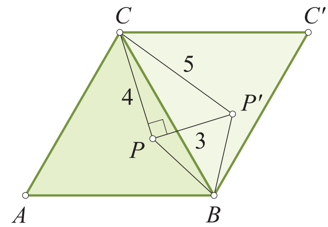
Sada, iz formule za površinu jednakostraničnog trokuta, slijedi

$$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{25}{4}\sqrt{3} + 9$$

$$a = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}} \approx 6.766.$$

Marko Dodig (4), Zagreb

Drugo rješenje. Rotirajmo trokut oko točke B za kut od 60°.



Točka P se preslika u P'.

$$|CP'| = |AP| = 5.$$

Tada je

$$|PP'| = |BP| = 3.$$

Kako je

$$|CP'|^2 = 5^2 = 4^2 + 3^2 = |CP|^2 + |PP'|^2,$$

trokut CPP' je pravokutan i $\measuredangle CPP' = 90^\circ$. Kut $\measuredangle P'PB = 60^\circ$, pa je $\measuredangle CPB = 150^\circ$. Iz kosinusovog poučka za $\triangle BCP$ imamo

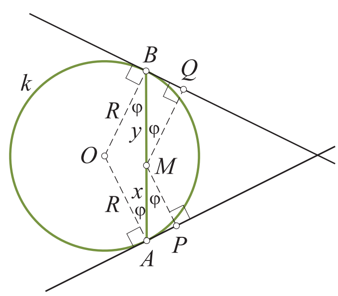
$$\begin{aligned} |BC|^2 &= |BP|^2 + |CP|^2 - 2|BP||CP| \cos \measuredangle CPB \\ &= 3^2 + 4^2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 25 + 12\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Dakle, $|BC| = \sqrt{25 + 12\sqrt{3}}$.

Ur.

3911. *Kroz točku M unutar kružnice k povučena je tetiva $\overline{AB}$. Iz točke M povučene su okomice MP i MQ na tangente kroz točke A i B. Dokaži da $\dfrac{1}{|PM|} + \dfrac{1}{|QM|}$ ne ovisi o izboru tetive $\overline{AB}$.*

Rješenje. Uz oznake kao na našoj slici, neka je $|AM| = x$, $|BM| = y$. Tada je $|PM| = x\cos\varphi$ i $|QM| = y\cos\varphi$.



Koristeći kosinusov poučak na trokut OAB imamo

$$\begin{aligned}(x+y)^2 &= R^2+R^2-2\cdot R\cdot R\cdot\cos(180^\circ-2\varphi)\\ &= 2R^2+2R^2\cos 2\varphi\\ &= 4R^2\cos^2\varphi\\ x+y &= 2R\cos\varphi.\end{aligned}$$

Sada računamo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{|PM|}+\frac{1}{|QM|} &= \frac{1}{x\cos\varphi}+\frac{1}{y\cos\varphi}\\ &= \frac{1}{\cos\varphi}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\\ &= \frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{x+y}{xy}\\ &= \frac{1}{\cos\varphi}\cdot\frac{2R\cos\varphi}{xy}\\ &= \frac{2R}{xy}=\frac{2R}{R^2-|OM|^2},\end{aligned}$$

gdje smo koristili potenciju unutarnje točke M obzirom na kružnicu k. Vidimo da dobiveni izraz ovisi samo o polumjeru dane kružnice k i udaljenosti fiksne točke M od njenog središta O. Time smo dokazali tvrdnju zadatka, tj. vrijednost zadanog izraza ne ovisi o izboru tetive $\overline{AB}$.

Marko Dodig (4), Zagreb

3912. *Za funkciju $f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ vrijedi*

$$f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=3x.$$

Nađi sva rješenja jednadžbe $f(x)=f(-x)$.

Rješenje. Ako u danu funkcijsku jednadžbu uvedemo supstituciju $x\longrightarrow\frac{1}{x}$ dobivamo jednadžbu

$$f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{3}{x}.$$

Tako imamo sustav jednadžbi:

$$\left.\begin{aligned}f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)&=3x\\ f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)&=\frac{3}{x}.\end{aligned}\right\}$$

Množenjem druge jednadžbe sustava s -2 i zbrajanjem ovih jednadžbi slijedi rješenje

$$f(x)=\frac{2}{x}-x.$$

Sada još riješimo jednadžbu

$$\begin{aligned}f(x)&=f(-x)\\ \frac{2}{x}-x&=-\frac{2}{x}+x.\end{aligned}$$

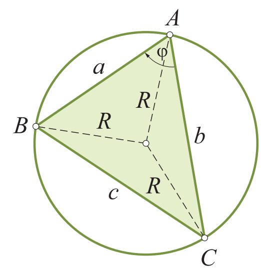
Kako je $x\neq 0$ cijelu jednadžbu pomnožimo s x pa je $x^2=2\implies x_{1,2}=\pm\sqrt{2}$.

Marko Dodig (4), Zagreb

3913. *Duljine tetiva $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ kružnice su redom a i b. Odredi polumjer kružnice ako je površina trokuta ABC jednaka P.*

Rješenje. Iz formule za površinu trokuta

$$P=\frac{1}{2}ab\sin\varphi\implies\sin\varphi=\frac{2P}{ab}.$$



Koristeći kosinusov poučak za $\varphi\leqslant 90^\circ$ je

$$\begin{aligned}c^2&=a^2+b^2-2ab\cos\varphi\\ c&=\sqrt{a^2+b^2-2ab\sqrt{1-\sin^2\varphi}}\\ &=\sqrt{a^2+b^2-2ab\sqrt{1-\frac{4P^2}{a^2b^2}}}\\ &=\sqrt{a^2+b^2-2\sqrt{a^2b^2-4P^2}}.\end{aligned}$$

Na kraju, iz formule $R=\dfrac{abc}{4P}$ slijedi polumjer tražene kružnice

$$R=\frac{ab}{4P}\sqrt{a^2+b^2-2\sqrt{a^2b^2-4P^2}}.$$

Za $\sphericalangle CAB>90^\circ$ je

$$R=\frac{ab}{4P}\sqrt{a^2+b^2+2\sqrt{a^2b^2-4P^2}}.$$

Marko Dodig (4), Zagreb

3914. *Odredi sumu*

$$\frac{\operatorname{tg}1}{\cos 2}+\frac{\operatorname{tg}2}{\cos 2^2}+\ldots+\frac{\operatorname{tg}2^n}{\cos 2^{n+1}}.$$

Rješenje. Općenito, transformirajmo trigonometrijski izraz:

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\cos 2\alpha} &= \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}\\ &= \frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\\ &= \frac{2\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha\cdot(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\\ &= \frac{2\cdot\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-\operatorname{tg}\alpha\\ &= \operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha.\end{aligned}$$

Koristeći dobiveni izraz računamo danu sumu:

$$\begin{aligned}S &= \frac{\operatorname{tg}1}{\cos 2}+\frac{\operatorname{tg}2}{\cos 2^2}+\ldots+\frac{\operatorname{tg}2^n}{\cos 2^{n+1}}\\ &= \operatorname{tg}2-\operatorname{tg}1+\operatorname{tg}4-\operatorname{tg}2+\ldots\\ &\quad+\operatorname{tg}2^{n+1}-\operatorname{tg}2^n\\ &= \operatorname{tg}2^{n+1}-\operatorname{tg}1.\end{aligned}$$

Marko Dodig (4), Zagreb

3915. *Ako su a, b, c pozitivni brojevi takvi da je $a+b+c=1$, dokaži*

$$\frac{a^7+b^7}{a^5+b^5}+\frac{b^7+c^7}{b^5+c^5}+\frac{c^7+a^7}{c^5+a^5}\geq\frac{1}{3}.$$

Rješenje. Najprije ćemo dokazati da vrijedi nejednakost:

$$\frac{a^7+b^7}{a^5+b^5}\geq\frac{a^2+b^2}{2}.$$

Vidimo da je ova nejednakost redom ekvivalentna s

$$\begin{aligned}&2(a^7+b^7)\geq(a^2+b^2)(a^5+b^5)\\ &a^7+b^7-a^5b^2-a^2b^5\geq 0\\ &a^5\cdot(a^2-b^2)-b^5\cdot(a^2-b^2)\geq 0\\ &(a^2-b^2)\cdot(a^5-b^5)\geq 0\\ &(a+b)\cdot(a-b)^2\\ &\qquad\cdot(a^4+a^3b+a^2b^2+ab^3+b^4)\geq 0,\end{aligned}$$

a posljednja nejednakost očito vrijedi za pozitivne realne brojeve.

Na isti način vrijede nejednakosti:

$$\frac{b^7+c^7}{b^5+c^5}\geq\frac{b^2+c^2}{2}$$

i

$$\frac{c^7+a^7}{c^5+a^5}\geq\frac{c^2+a^2}{2}.$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti imamo:

$$\begin{aligned}&\frac{a^7+b^7}{a^5+b^5}+\frac{b^7+c^7}{b^5+c^5}+\frac{c^7+a^7}{c^5+a^5}\\ &\geq a^2+b^2+c^2.\end{aligned}\tag{1}$$

Sada koristimo dobro poznatu nejednakost:

$$\begin{aligned}a^2+b^2+c^2&\geq ab+bc+ac\ /\ \cdot 2\\ 2(a^2+b^2+c^2)&\geq 2ab+2bc+2ac\\ 3(a^2+b^2+c^2)&\geq(a+b+c)^2\\ a^2+b^2+c^2&\geq\frac{(a+b+c)^2}{3}.\end{aligned}$$

Iz nejednakosti (1), koristeći uvjet zadatka, slijedi tražena nejednakost

$$\frac{a^7+b^7}{a^5+b^5}+\frac{b^7+c^7}{b^5+c^5}+\frac{c^7+a^7}{c^5+a^5}\geq\frac{1}{3}.$$

Jednakost se postiže ako i samo ako je $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Marko Dodig (4), Zagreb

3916. *Dokaži da postoje cijeli brojevi a, b, c, od kojih je barem jedan različit od nule, a koji su svi manji od 10^6, takvi da vrijedi*

$$|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|<10^{-11}.$$

Rješenje. Neka je S skup svih realnih brojeva oblika $r+s\sqrt{2}+t\sqrt{3}$, pri čemu su $r,s,t\in\{0,1,\ldots,10^6-1\}$. Takvih brojeva imamo $(10^6)^3=10^{18}$. Neka je $p=(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot 10^6$. Tada bilo koji $x\in S$ leži u intervalu $[0,p\rangle$. Podijelimo taj interval na $10^{18}-1$ jednakih dijelova duljine

$$\left[(k-1)\cdot\frac{p}{10^{18}-1},k\cdot\frac{p}{10^{18}-1}\right\rangle,$$

$k=1,2,\ldots,10^{18}-1$. Prema Dirichletovom pravilu, barem dva elementa iz skupa S, recimo $r_1+s_1\sqrt{2}+t_1\sqrt{3}$ i $r_2+s_2\sqrt{2}+t_2\sqrt{3}$, leže u istom intervalu, i njihova razlika je manja od $\frac{p}{10^{18}-1}$. Označimo sada $a=r_1-r_2$, $b=$

s_1-s_2 i $c=t_1-t_2$. Dakle, vrijedi

$$|a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}|<\frac{p}{10^{18}-1}<10^{-11},$$

jer je:

$$\frac{p}{10^{18}-1}<10^{-11}$$
$$\iff p<10^7-10^{-11}$$
$$\iff (1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\cdot 10^6<10^7-10^{-11}$$
$$\iff 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}<10-10^{-17}$$

što očito vrijedi. Ovime smo dokazali tvrdnju zadatka.

Marko Dodig (4), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 514. *Ivan je za svoju malu sestru napravio klackalicu na kojoj se može sama ljuljati tako da on može učiti fiziku. Napravio ju je od daske dugačke 4 m, široke 25 cm i debele 4 cm. Oslonac je postavio na četvrtini duljine daske. Izračunao je da će se sestrica moći ljuljati sjedeći na kraju kraćeg kraja daske dok joj masa ne bude veća od 25 kg. Kolika je gustoća daske?*

Rješenje.

$a=4$ m

$b=25$ cm $=0.25$ m

$c=4$ cm $=0.04$ m

$k_d=0.25a=1$ m

$\underline{m_{\max}=25\text{ kg}}$

$\rho=?$

$$F_dk_d+F_1k_1=F_2k_2$$
$$m_dgk_d+m_1gk_1=m_2gk_2$$
$$m_dk_d+m_1k_1=m_2k_2$$
$$m_dk_d+V_1\rho k_1=V_2\rho k_2$$
$$m_dk_d=V_2\rho k_2-V_1\rho k_1$$
$$=\rho(V_2k_2-V_1k_1)$$
$$\rho=\frac{m_dk_d}{V_2k_2-V_1k_1}$$
$$V=abc$$
$$=4\text{ m}\cdot 0.25\text{ m}\cdot 0.04\text{ m}=0.04\text{ m}^3$$
$$V_1=0.25\text{ V}=0.01\text{ m}^3$$
$$V_2=0.75\text{ V}=0.03\text{ m}^3$$
$$k_1=0.125a=0.5\text{ m}$$
$$k_2=0.375a=1.5\text{ m}$$
$$\rho=\frac{25\text{ kg}\cdot 1\text{ m}}{0.03\text{ m}^3\cdot 1.5\text{ m}-0.01\text{ m}^3\cdot 0.5\text{ m}}$$
$$=625\text{ kg/m}^3.$$

Marija Miloš (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 515. *Učenik je želio odrediti specifični toplinski kapacitet metala od kojeg je napravljeno kuhinjsko posuđe. Zagrijavao je 3 litre vode u loncu mase 600 g dok nije zakuhala, a zatim je na istoj ploči električnog štednjaka zagrijao 500 g ulja u tavi mase pola kg do temperature $200\,^\circ C$. Početne temperature vode, ulja, tave i lonca su iznosile $20\,^\circ C$. Utvrdio je da je zagrijavanje vode trajalo 4.6 puta dulje nego zagrijavanje ulja. Tava i lonac su od istog materijala. Koliki je specifični toplinski kapacitet posuđa? Specifični toplinski kapacitet vode je $4200\ J/kgK$, a ulja $2000\ J/kgK$.*

Rješenje.

$V_v=3$ l

$m_v=3$ kg

$m_l=600$ g $=0.6$ kg

$m_u=500$ g $=0.5$ kg

$m_t=0.5$ kg

$t_1=20\,^\circ$C

$t_2=100\,^\circ$C

$t_3=200\,^\circ$C

$t_v=4.6t_u$

$c_v=4200$ J/kgK

$\underline{c_u=2000\text{ J/kgK}}$

$c_s=?$

$$Q_v+Q_l=4.6\cdot(Q_u+Q_t)$$
$$m_vc_v\Delta T_1+m_lc_s\Delta T_1$$
$$=4.6(m_uc_u\Delta T_2+m_tc_s\Delta T_2)$$
$$\Delta T_1=80\text{ K}$$
$$\Delta T_2=180\text{ K}$$

$$m_v c_v \Delta T_1 - 4.6 m_u c_u \Delta T_2$$
$$= 4.6 m_t c_s \Delta T_2 - m_l c_s \Delta T_1$$
$$= c_s (4.6 \cdot m_t \Delta T_2 - m_l \Delta T_1)$$
$$c_s = \frac{m_v c_v \Delta T_1 - 4.6 \cdot m_u c_u \Delta T_2}{4.6 \cdot m_t \Delta T_2 - m_l \Delta T_1}$$
$$= \Big[3 \text{ kg} \cdot 4200 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 80 \text{ K} - 4.6 \cdot 0.5 \text{ kg} \cdot 2000 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} \cdot 180 \text{ K}\Big]$$
$$: (4.6 \cdot 0.5 \text{ kg} \cdot 180 \text{ K} - 0.6 \text{ kg} \cdot 80 \text{ K})$$
$$= 491.8 \frac{\text{J}}{\text{kgK}}.$$

Ivona Kučiš (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 516. *Vozač vozi automobil mase 1.5 t stalnom brzinom 54 km/h. Kad vozač makne nogu s papučice gasa automobil za 10 s uspori na 36 km/h. Koliko je iznosila sila motora dok je vozač pritiskao papučicu gasa?*

Rješenje.

$m = 1.5 \text{ t} = 1500 \text{ kg}$

$v_1 = 54 \text{ km/h} = 15 \text{ m/s}$

$v_2 = 36 \text{ km/h} = 10 \text{ m/s}$

$\underline{t = 10 \text{ s}}$

$F_m = ?$

$F_m = -F_{tr} = am$

$a = \dfrac{\Delta v}{t}$

$\Delta v = v_2 - v_1 = -5 \text{ m/s}$

$a = \dfrac{-5 \text{ m/s}}{10 \text{ s}} = -0.5 \text{ m/s}^2$

$F_m = -(-0.5 \text{ m/s}^2 \cdot 1500 \text{ kg}) = 750 \text{ N}.$

Gregor Klarić (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 517. *Posuda s vodom je postavljena na vagu koja pokazuje masu od 2.2 kg. Kad se u vodu uroni tijelo mase 1.8 kg obješeno na konac zanemarive mase vaga pokazuje 2.8 kg. Kolika je gustoća uronjenog tijela? Gustoća vode je 1000 kg/m³.*

Rješenje.

$m_1 = 2.2 \text{ kg}$

$m = 1.8 \text{ kg}$

$m_2 = 2.8 \text{ kg}$

$\underline{\rho_v = 1000 \text{ kg/m}^3}$

$\rho = ?$

$G = mg = 1.8 \text{ kg} \cdot 10 \dfrac{\text{N}}{\text{kg}} = 18 \text{ N}$

$G' = \Delta m g$

$\Delta m = m_1 + m - m_2 = 1.2 \text{ kg}$

$G' = 1.2 \text{ kg} \cdot 10 \dfrac{\text{N}}{\text{kg}} = 12 \text{ N} = F_u$

$F_u = \rho_v g V$

$V = \dfrac{F_u}{\rho_v g} = \dfrac{12 \text{ N}}{1000 \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 10 \dfrac{\text{N}}{\text{kg}}} = 0.0012 \text{ m}^3$

$\rho = \dfrac{m}{V} = \dfrac{1.8 \text{ kg}}{0.0012 \text{ m}^3} = 1500 \dfrac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$

Marija Miloš (8),
OŠ Mate Lovraka, Zagreb

1805. *Asteroid Vesta jednom obiđe Sunce za 3.629 godina. Odredi kojom se prosječnom brzinom giba oko Sunca.*

Rješenje. Koristimo treći Keplerov zakon,

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2},$$

gdje je $T = 114\,444\,144$ period izražen u sekundama, $G = 6.674 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ gravitacijska konstanta i $M_S = 1.989 \cdot 10^{30}$ kg masa Sunca.

$$r = \sqrt[3]{\frac{6.674 \cdot 10^{-11} \cdot 1.989 \cdot 10^{30} \cdot 114\,444\,144^2}{4\pi^2}}$$
$$= 3.53142 \cdot 10^{11} \text{ m}.$$

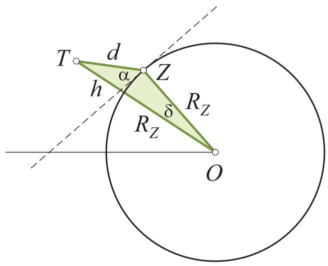
Prosječnu brzinu dobijemo iz formule

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 19\,388 \text{ m/s}.$$

Marko Dodig (4),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

1806. *Kineska orbitalna stanica Tiangong kruži oko Zemlje na visini 386 km iznad površine. Inklinacija putanje (kut ravnine ekvatora i ravnine putanje) je 41.5°. Koliko se satelit* *najviše popne na nebu iznad Zagreba? Geografska širina Zagreba je* 45.8°. *Koliko je tada satelit udaljen od Zagreba? Uzmimo da je Zemlja kugla radijusa 6371 km.*

Rješenje. Označimo s $R_Z = 6371$ km radijus Zemlje, $h = 386$ km visinu satelita, d najmanja udaljenost satelita od Zagreba, α maksimalan kut nad horizontom i $\delta = 45.8^\circ - 41.5^\circ = 4.3^\circ$. Satelit će se popeti najviše na nebu kada je na istom meridijanu kao i Zagreb i u najsjevernijoj točki putanje.



Tada u trokutu OZT, gdje je O središte Zemlje, Z položaj Zagreba i T položaj Tiangonga imamo stranice $OZ = R_Z$, $ZT = d$ i $TO = R_z + h$. Nasuprotni kutovi iznose $90^\circ - \delta - \alpha$, δ i $90^\circ + \alpha$. Iz kosinusovog poučka je

$$\begin{aligned} d^2 &= R_Z^2 + (R_Z + h)^2 - 2R_Z(R_Z + h)\cos(\delta) \\ &= 6371^2 + 6757^2 - 2 \cdot 6371 \cdot 6757 \cos(4.3^\circ) \\ d &= 625.58 \text{ km}. \end{aligned}$$

Iz poučka o sinusima je

$$\frac{\sin(90^\circ + \alpha)}{R_Z + h} = \frac{\sin\delta}{d},$$
$$\alpha = 35^\circ 55'.$$

Usporedba s podacima na

`www.heavens-above.com`

potvrđuje točnost unutar 2 km i 1 stupnja.

Ur.

1807. *Homogeni štap duljine 50 cm učvršćen je tako da može slobodno njihati oko točke na štapu udaljene 10 cm od kraja štapa. Na suprotni kraj štapa učvršćena je kuglica malih dimenzija, mase jednake polovici mase štapa. Odredi period dobivenog fizičkog njihala.*

Rješenje. Period malih njihaja T odredit ćemo iz formule

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd}},$$

gdje je I moment tromosti oko osi rotacije, $M = 2m$ ukupna masa, a d udaljenost težišta od osi rotacije. Udaljenost težišta od kuglice, x je određena izrazom

$$\left(\frac{m}{2} + m\right)x = m(0.5 - x)$$
$$x = 0.2 \text{ m}.$$

Iz dimenzija štapa vidimo da je i $d = 0.2$ m. Za moment tromosti vrijedi

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ &= \frac{1}{12}ml^2 + m(d - 0.05)^2 + m(d + x)^2 \\ &= \frac{0.5^2 m}{12} + 0.15^2 m + 0.4^2 m = \frac{2.44m}{12}. \end{aligned}$$

Na koncu je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2.44m/12}{2m \cdot g \cdot 0.2}} = 2\pi\sqrt{\frac{3.05}{6g}} = 1.43 \text{ s}.$$

Marko Dodig (4), Zagreb

1808. *Tijelo mase 1 kg nalazi se na kosini nagiba* 30°, *koja se može slobodno gibati u horizontalnom smjeru. Koeficijent trenja tijela i kosine je 0.3. Kojom najmanjom i najvećom horizontalnom akceleracijom možemo ubrzavati kosinu, a da tijelo miruje u odnosu na nju?*

Rješenje. Ako kosinu ubrzavamo akceleracijom a ulijevo, u sustavu kosine na tijelo djeluju sile mg prema dolje i ma prema desno. Komponente duž kosine su $F_1 = mg\sin\alpha$ i $F_2 = ma\cos\alpha$. Komponente okomite na kosinu uzrokuju trenje: $F_{tr} = \mu mg\cos\alpha + \mu ma\sin\alpha$. Minimalna akceleracija za koju tijelo miruje na kosini je ona za koju su sile u ravnoteži, uz trenje prema gore: $F_1 = F_2 + F_{tr}$, a maksimalna uz trenje prema dolje: $F_1 + F_{tr} = F_2$.

Iz prvog uvjeta dobivamo:

$$mg\sin\alpha > \mu mg\cos\alpha + \mu ma_1\sin\alpha + ma_1\cos\alpha,$$
$$g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) > a_1(\mu\sin\alpha + \cos\alpha),$$
$$a_1 < g\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha} = 2.32 \text{ m/s}^2.$$

Ako je akceleracija dovoljno velika, tijelo će se gibati prema gore, što mijenja predznak sila trenja,

$$ma_2\cos\alpha > mg\sin\alpha + \mu mg\cos\alpha + \mu ma_2\sin\alpha,$$

$$a_2(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) > g(\sin\alpha + \mu\cos\alpha),$$

$$a_2 > g\frac{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha} = 10.41\ \mathrm{m/s^2}.$$

Marko Dodig (4), Zagreb

1809. *Paralelni snop svijetlosti dolazi slijeva nadesno na sustav dvije sabirne leće jednake jakosti, međusobno udaljene 30 cm. Snop konvergira 20 cm desno od druge leće. Kolika je žarišna daljina obiju leća? postoji li više rješenja? Nacrtaj.*

Rješenje. Leće jednake jakosti imaju istu žarišnu daljinu koju označimo s f. Paraleni snop će nakon prolaska kroz prvu leću konvergirati prema njenom žarištu, na udaljenosti f od prve leće. Tako nastala slika je predmet za drugu leću. Ako s a i b označimo udaljenosti predmeta i slike druge leće, imamo $a = -f + 30$ cm, $b = 20$ cm. Uvrstimo li to u jednadžbu leće dobivamo:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$$

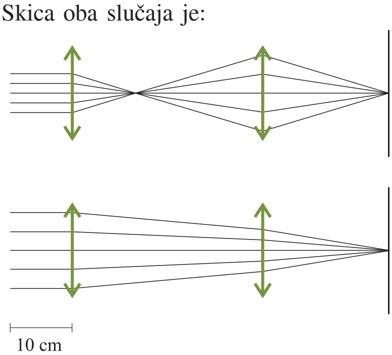
$$\frac{1}{-f+30} + \frac{1}{20} = \frac{1}{f}.$$

Odatle je (uz f u cm):

$$\frac{1}{f} - 0.05 = \frac{1}{-f+30}.$$

Dva rješenja jednađbe su $f_1 = 10$ cm i $f_2 = 60$ cm.

Skica oba slučaja je:



Ur.

1810. *Odredi specifični toplinski kapacitet 40 %-tne volumne otopine alkohola u vodi. Specifični toplinski kapaciteti su 4190 J/kgK za vodu i 2500 J/kgK za alkohol. Gustoća vode je 1000 kg/m^3, a alkohola 790 kg/m^3.*

Rješenje. Razmotrimo jednu litru otopine. S obzirom na volumne udjele, u njoj je 0.4 litre alkohola i 0.6 litara vode. Umnožak s gustoćom svake tekućine daje masu od 316 grama alkohola i 600 grama vode. Toplinski kapacitet litre smjese je

$$C = m_a c_a + m_v c_v = 790 + 2514$$
$$= 3304\ \mathrm{J/K}.$$

Specifični kapacitet dobijemo dijeljenjem s masom, koja iznosi $m = m_a + m_v = 0.916$ kg. Rezultat je

$$c = 3607\ \mathrm{J/kgK}.$$

Ur.

1811. *Drveni blok mase $M = 4$ kg leži na horizontalnoj podlozi, vezan oprugom konstante $k = 1000$ N/m za vertikalni zid. U centar bloka udara metak mase $m = 10$ g. Metak dolazi horizontalno, u smjeru opruge i zaustavlja se u drvetu. Odredi brzinu metka prije sudara, ako je maksimalno sabijanje opruge poslije sudara jednako $\Delta l = 30$ cm. Trenje zanemariti.*

Rješenje. Nakon sudara se kinetička energija pretvorila u elastičnu potencijalnu i vrijedi:

$$E_k = E_p$$

$$\frac{(M+m)v_1^2}{2} = \frac{kx^2}{2}$$

$$v_1^2 = \frac{kx^2}{M+m}$$

gdje je v_1 brzina sustava (drveni blok i metak) i $x = \Delta l = 0.3$ m. Iz očuvanja količine gibanja imamo:

$$p_m + p_M = p$$

$$mv + M \cdot 0 = (M+m)v_1$$

$$10^{-4}v^2 = (M+m)^2 v_1^2 = (M+m)kx^2$$

$$v^2 = 3\,609\,000$$

$$v = 1900\ \mathrm{m/s}.$$

Marko Dodig (4), Zagreb