64. Državno natjecanje iz matematike, Hrvatska, 24. – 26. travnja 2023. g.

Školsko natjecanje iz matematike ove školske godine održano je 26. siječnja, a Županijsko natjecanje iz matematike 1. ožujka. Samo Državno natjecanje iz matematike ove je godine održano 25. travnja u Poreču, za učenike srednjih škola, A varijante i B varijante. Zadatke je priredilo posebno podpovjerenstvo za A varijantu i B varijantu Državnog povjerenstva za matematička natjecanja.

Sudionici ovogodišnjeg Državnog natjecanja bili su smješteni u hotelu Delfin. Sudjelovalo je 266 učenika osnovnih i srednjih škola, te oko 150 mentora. Na otvaranju su sudionike pozdravili predstavnica Istarske županije Doriana Šumberac-Jelić, gradonačelnik Poreča Loris Peršurić i viši savjetnik Vesko Nikolaus ispred Agencije za odgoj i obrazovanje. Domaćini natjecanja su bili Srednja škola Mate Balote i Osnovna škola Poreč. Za vrijeme natjecanja, mentori su imali seminar kojeg su održali Ivan Miošić, Ilko Brnetić, Ana Ostojić i Sanja Stilinović. U slobodno vrijeme su učenici i mentori mogli posjetiti Eufrazijevu baziliku u pratnji vodiča. Na zatvaranju smo se s velikom tugom prisjetili Martina Filipčića, učenika 1. razreda, koji je preminuo deset dana prije natjecanja.

Za srednje je škole podijeljeno 5 prvih, 8 drugih, 8 trećih nagrada i 21 pohvala za A varijantu, te 6 prvih, 6 drugih, 11 trećih nagrada i 16 pohvala za B varijantu.

Nagrade i pohvale učenika srednjih škola

A varijanta

I. razred

Fabijan Cikač, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Maša Dobrić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Kristijan Šimovič*, XV. gimnazija, Zagreb, *Mare Zrno Agoli*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Emil Missoni*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Tomislav Vlajčević*, XV. gimnazija, Zagreb, *Zvonimir Stjepan Jalšovec*, V. gimnazija, Zagreb, *Mila Maretić*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Ivan Roguljić*, III. gimnazija, Split, *Jakov Mirošević*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala).

II. razred

Lana Milani, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka, *Val Karan*, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Karlo Ahel*, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka, *Luka Duplančić*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Emanuel Bajamić*, III. gimnazija, Split, *Jurica Špoljar*, XV. gimnazija, Zagreb, *Ratko Karačić*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Marko Hrenić*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Borna Čizmarević*, Gimnazija Andrije Mohorovičića, Rijeka, *Karla Pogelšek*, XV. gimnazija, Zagreb, *Dario Vuksan*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala).

III. razred

Lara Semeš, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *David Lang*, XV. gimnazija, Zagreb, *Adrian Grbac Lacković*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Viktor Katić*, III. gimnazija Osijek, Osijek, *Lucija Pongrac*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Petra Grubišić*, Gimnazija Antuna Vrančića, Šibenik, *Tin Salopek*, XV. gimnazija, Zagreb, *Lara Berket*, III. gimnazija, Split, *Mihovil Petrić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Petar Jukić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Ema Kolmanić*, XV. gimnazija, Zagreb (pohvala).

IV. razred

Namik Agić, XV. gimnazija, Zagreb (I. nagrada); *Stella Čolo*, Gimnazija Franje Petrića, Zadar (II. nagrada); *Emanuel Tukač*, Prva gimnazija Varaždin, Varaždin, *Borna Banjanin*, XV. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Lovre Pazinović*, III. gimnazija, Split, *Simeon Stefanović*, Srednja škola za elektrotehniku i računarstvo, Rijeka, *Janko Bušelić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Ivan Janjić*, XV. gimnazija, Zagreb, *Dan Erceg*, III. gimnazija, Split (pohvala).

B varijanta

I. razred

Luka Ozvačić, Srednja škola Ivan Švear Ivanić-grad, Ivanić-Grad (I. nagrada); *Ana Karla Vodanović*, XV. gimnazija, Zagreb (II. nagrada); *Marko Glučina*, Srednja škola Andrije Kačića Miočića, Makarska, *Viktorija Pribanić*, IX. gimnazija, Zagreb (III. nagrada); *Lana Perić*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Dominik Belavić*, Srednja škola Ivan Švear Ivanić-Grad, Ivanić-Grad, *Toni Mišura*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Blaž Hrastić*, Elektrostrojarska škola, Varaždin (pohvala).

II. razred

Mihael Miloslavić, Biskupijska klasična gimnazija Ruđera Boškovića s pravom javnosti, Dubrovnik (I. nagrada); *Petar Marić*, Srednja škola Dugo Selo, Dugo Selo, *Matija Ljutić*, Prirodoslovna i grafička škola Rijeka, Rijeka (II. nagrada); *Matej Tomić*, Srednja škola Ban Josip Jelačić, Zaprešić, *Lorena Kaiser*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Borna Bašić*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb (III. nagrada); *Stefano Stocco*, Talijanska srednja škola Dante Alighieri – Scuola media superiore italiana Dante Alighieri, Pola, Pula, *Zvonko Andrijević*, IX. gimnazija, Zagreb (pohvala).

III. razred

Matija Krivec, Gimnazija Sesvete, Sesvete, *Bernard Pribanić*, I. tehnička škola Tesla, Zagreb (I. nagrada); *Danijel Pilaj*, Gimnazija Josipa Slavenskog Čakovec, Čakovec (II. nagrada); *Ante Šola*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb, *Matej Ban*, Srednja škola Hrvatski kralj Zvonimir, Krk, *Borna Mandžuka*, Srednja škola "Vladimir Gortan", Scuola media superiore "Vladimir Gortan", Buje (III. nagrada); *Vilim Novotny*, Elektrostrojarska škola, Varaždin, *Karlo Levanić*, Graditeljska, prirodoslovna i rudarska škola, Varaždin, *Nediljko Marjanović*, V. gimnazija Vladimira Nazora, Split, *Vice Kunjašić*, Gimnazija Pula, Pula, *Luka Klancir*, Srednja škola Zlatar, Zlatar, *Ema Pisanski*, Prirodoslovna škola Vladimra Preloga, Zagreb (pohvala).

IV. razred

Lucija Stipetić, Gimnazija i strukovna škola Bernardina Frankopana, Ogulin, *Vito Anić*, Gimnazija Nova Gradiška, Nova Gradiška (I. nagrada); *Ela Benić*, Gimnazija Dubrovnik, Dubrovnik, *Tin Jovanović*, Graditeljska tehnička škola, Zagreb (II. nagrada); *Tara Turk*, Prirodoslovna škola Vladimira Preloga, Zagreb, *Dea Gubijan*, Srednja škola Vrbovec, Vrbovec, *Jan Volenec*, Tehnička škola Ruđera Boškovića, Zagreb (III. nagrada); *Kristijan Bilanović*, Srednja škola Vrbovec, Vrbovec, *Ivan Marko Konovski*, Prirodoslovna škola

Vladimira Preloga, Zagreb, *Marin Stanić*, II. gimnazija, Zagreb, *David Vorano*, Srednja škola Mate Blažine Labin, Labin (pohvala).

Zadatci s Državnog natjecanja – A varijanta

I. razred

1. Odredi sve trojke (p, q, r) prostih brojeva za koje vrijedi $pq + r = 1 + rp + qr$.
2. Odredi najmanju vrijednost koju može poprimiti izraz
$$a^2 + b^2 + |ab - 1| + |ab - 4|$$
za neke realne brojeve a i b.
3. Dan je trokut ABC u kojem je $\sphericalangle BAC = 45°$, $|AB| = 4$, $|AC| = 3\sqrt{2}$. Neka su $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ visine tog trokuta. Okomica na $\overline{AB}$ kroz točku E siječe dužinu $\overline{AD}$ u točki P. Odredi $|EP|$.
4. Za realne brojeve a, b i c vrijedi
$$abc = -1, \qquad a + b + c = 4 \qquad \text{i}$$
$$\frac{a}{a^2 - 3a - 1} + \frac{b}{b^2 - 3b - 1} + \frac{c}{c^2 - 3c - 1} = \frac{4}{9}.$$
Dokaži da je $a^2 + b^2 + c^2 = \dfrac{33}{2}$.
5. Neka je n prirodni broj. Dana su dva jednaka kompleta od po n kartica s oznakama od 1 do n. Na stol su nekim redom slijeva nadesno posložene sve kartice prvog kompleta, a u nastavku istim redom sve kartice drugog kompleta. Kažemo da je takav poredak kartica *dobar* ako je moguće odabrati i ukloniti nekih n kartica tako da preostane n kartica s brojevima od 1 do n poredanih u rastućem poretku slijeva nadesno. Koliko ima dobrih rasporeda kartica?

II. razred

1. Odredi polumjer osnovke stošca čija je izvodnica duljine 1, tako da razlika površina njegovog plašta i njegove osnovke bude maksimalna. Dokaži da je jedno od rješenja broj -1.
2. Odredi, ako postoje, racionalne brojeve a i b tako da jedno rješenje kvadratne jednadžbe $x^2 + ax + b = 0$ bude $\sqrt{3 + \sqrt{8}}$.
3. Manda je, za odabrani prirodni broj $n > 3$, izradila sve stranice i sve dijagonale pravilnog n-terokuta od tankog pruća. Zatim je Ivan tih $\frac{1}{2}n(n-1)$ štapova podijelio u grupe po tri štapa tako da se od svake grupe može napraviti trokut. Za koje je brojeve n to moguće?
4. Simetrala kuta $\sphericalangle ACB$ siječe stranicu $\overline{AB}$ trokuta ABC u točki K, a opisanu kružnicu u točki L (L je različito od C). Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC, a S središte opisane kružnice trokuta IKB. Neka je P sjecište pravca SL i stranice $\overline{AB}$. Dokaži da je pravac SK tangenta kružnice opisane trokutu KLP.
5. Postoji li skup od 100 prirodnih brojeva takav da za svaka četiri elementa tog skupa njihov umnožak dijeli zbroj njihovih četvrtih potencija?

III. razred

1. Koliko ima prirodnih brojeva n za koje postoji trokut sa stranicama duljina 3, $\log_2 n$ i $\log_4 n$?
2. Označimo s $\tau(n)$ broj prirodnih djelitelja broja n. Prirodni brojevi a i b zadovoljavaju jednakost $a + \tau(a) = b^2 + 2$. Dokaži da je broj $a + b$ paran.
3. Dan je trokut ABC. Neka je točka D nožište visine iz vrha A, a točka E sjecište simetrale kuta $\sphericalangle CBA$ s nasuprotnom stranicom. Ako je $\sphericalangle BEA = 45°$, odredi $\sphericalangle EDC$.
4. Odredi najmanji prirodan broj n za koji postoje realni brojevi $x_1, \ldots, x_n \in [1, 4]$ koji zadovoljavaju nejednakosti:
$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq \frac{7}{3}n,$$
$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n} \geq \frac{2}{3}n.$$
5. Na ploči dimenzija 3×2023 koja je na početku prazna igra se igra za dva igrača koji naizmjence vuku poteze. U pojedinom potezu igrač odabire dva prazna polja koja se nalaze u istom retku ili istom stupcu te stavlja po jedan žeton na ta polja. Gubi igrač koji ne može odigrati dopušteni potez. Ako Kristina igra prva, a Ana druga, koja od njih može osigurati svoju pobjedu?

IV. razred

1. Za realni broj $c \neq 0$ i prirodni broj n, neka je a_k koeficijent uz x^k u izrazu $(1+cx)^n$, a b_k koeficijent uz x^k u izrazu $(1+2cx)^n$. Poznato je da su a_1, a_3 i a_4 uzastopni članovi geometrijskog niza, te da su b_1, $2b_2$ i $2b_3$ uzastopni članovi aritmetičkog niza. Odredi brojeve c i n.
2. Neka je S skup svih prirodnih brojeva manjih od 1000 čije su sve znamenke u dekadskom zapisu parne. Neka je ω kompleksni broj takav da je $\omega^2 + \omega + 1 = 0$. Izračunaj zbroj $\sum\limits_{k \in S} \omega^k$ tj. zbroj vrijednosti ω^k za sve k iz skupa S.
3. Postoje li međusobno različiti pozitivni realni brojevi $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2023}$ takvi da se od

   jednog kvadrata stranice duljine a_1,
   tri kvadrata stranica duljine $a_3, \ldots$,
   k kvadrata stranice duljine $a_k, \ldots$,
   $\vdots$
   2023 kvadrata stranica duljine a_{2023}

   može sastaviti kvadrat?
4. Dan je šiljastokutan trokut ABC u kojem je $|AC| < |BC|$. Njegove visine $\overline{AD}$ i $\overline{BE}$ sijeku se u ortocentru H. Dužine $\overline{DE}$ i $\overline{CH}$ sijeku se u točki I, a pravci DE i AB u točki X. Neka je H_1 ortocentar trokuta XAC, a H_2 ortocentar trokuta XIC. Ako je $|AH_1| = |IH_2|$, dokaži da je $|AI| = |DH_2|$.
5. Odredi sve funkcije $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ takve da za sve $a, b \in \mathbb{N}$ za koje je $f(a) \neq b$ vrijedi $f(a) - b \mid f(a)^2 + 2b + 1 - f(b)^2$.

Zadatci s Državnog natjecanja – B varijanta

I. razred

1. Odredite sve realne brojeve $p \neq 2$ takve da za rješenja sustava jednadžbi

$$\begin{cases} x + py = 3 \\ px + 4y = 6 \end{cases}$$

vrijedi $y - x < p$.

2. Riješite jednadžbu $||x - 2023| + 2022x| = |2022 - |2023 - x||$.

3. Vrhovima kvadrata $ABCD$, Matko je pridružio različite prirodne brojeve manje od 16 tako da pri odabiru bilo koja tri vrha kvadrata, aritmetička sredina njima pridruženih brojeva bude cijeli broj. Na koliko je različitih načina Matko mogao numerirati vrhove kvadrata?

4. Kut $\sphericalangle CBA$ trokuta ABC je dvostruko veći od kuta $\sphericalangle BAC$. Ako je $|BC| : |AB| = 4 : 5$ i $|AC| = 18$, odredite opseg i površinu trokuta ABC.

5. Odredite sva cjelobrojna rješenja jednadžbe $(mn - 3)^2 = m^2 + n^2 - 4mn$.

II. razred

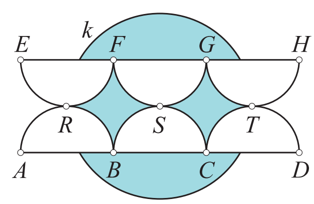
1. Izračunajte koliko je

$$\left(\frac{6 + 4\sqrt{2}}{\sqrt{2} + \sqrt{6 + 4\sqrt{2}}} + \frac{6 - 4\sqrt{2}}{\sqrt{2} - \sqrt{6 - 4\sqrt{2}}} \right)^2 .$$

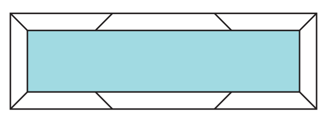
2. Odredite $a \in \mathbb{R}$ tako da rješenja jednadžbe $a(x^2 - 1) + 4x = 5$ budu različiti realni brojevi veći od 1.

3. Dvije jednake posude od po 30 litara sadrže ukupno 30 litara svježe cijeđenoga soka od naranđe. U prvu posudu dolijemo vode do vrha, a zatim dobivenom mješavinom soka i vode napunimo drugu posudu do vrha. Potom u prvu posudu prelijemo 12 litara nove mješavine soka i vode iz druge posude. Sada je u drugoj posudi 2 litre svježe cijeđenoga soka manje nego u prvoj posudi. Koliko je soka bilo u pojedinoj posudi na početku?

4. Dužine $\overline{AD}$ i $\overline{EH}$, duljine 12, podijeljene su točkama B i C, odnosno F i G, na tri jednaka dijela. Nad svakime od tih dijelova konstruirani su polukrugovi koji se međusobno dodiruju u točkama R, S i T kao što je prikazano na slici. Kružnica k sa središtem u točki S polumjera je duljine 4. Kolika je vjerojatnost da slučajno odabrana točka unutar kružnice k neće biti unutar polukrugova, već u osjenčanom dijelu?



5. Na slici je prikazana pravokutna slika s okvirom. Osjenčani dio predstavlja sliku, a okvir je sastavljen od osam sukladnih trapeza. Duljine osnovica tih trapeza prirodni su brojevi, a iznos površine svakoga pojedinog trapeza prost je broj. Ako je površina slike manja od 200 kvadratnih jedinica, kolika je najveća moguća površina slike?



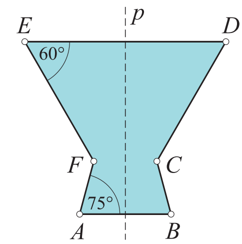
III. razred

1. Zadan je trokut ABC. Na pravcu $2x + y + 10 = 0$ leži stranica $\overline{BC}$ toga trokuta, na pravcu $2x - y - 2 = 0$ stranica $\overline{AC}$ i na pravcu $2x - 7y + 10 = 0$ leži težišnica iz vrha A. Odredite koordinate vrhova trokuta ABC.

2. Odredite šiljasti kut α ako je $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{(1 + \operatorname{tg} 1^\circ)(1 + \operatorname{tg} 2^\circ) - 2}{(1 - \operatorname{tg} 1^\circ)(1 - \operatorname{tg} 2^\circ) - 2}$.

3. Odredite sve troznamenkaste prirodne brojeve $\overline{abc}$ za koje je $a + b + c = a \log_b c$.

4. Glinena posuda za cvijeće visine 4 dm ima oblik geometrijskoga tijela koje nastaje rotacijom geometrijskog lika sa slike oko njegove osi simetrije, pravca p. Pri tome je sjecište pravaca AF i BC u polovištu dužine $\overline{ED}$, a pravaca EF i CD u polovištu dužine $\overline{AB}$. Koliko iznosi volumen posude (zanemarite debljinu stjenke)?



5. Neka je f realna funkcija sa sljedećim svojstvima:
   - $\mathcal{D}_f = [-4, \infty\rangle$,
   - $f(0) \cdot f(1) < 0$,
   - funkcija f strogo je padajuća na čitavoj domeni i ima jednu nultočku.

   Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi nejednakost $f(a^{2x} + 2a^x - 7) < f(a^x - 5)$, pri čemu je a nultočka zadane funkcije f.

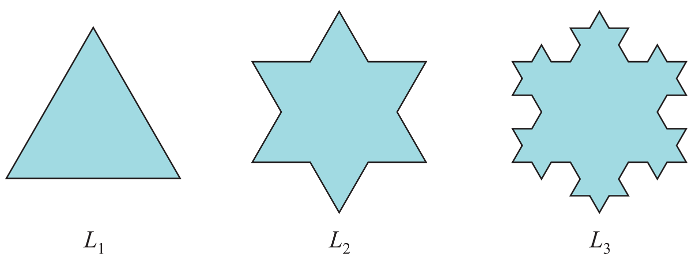
IV. razred

1. U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbu $(x + 5)^5 = x^5 + 5^5$.

2. Odredite prirodnu domenu funkcije $f(x) = \sqrt{\log_{x^2-4}(x^2 - 4x + 3)}$.

3. Odredite sve polinome P s realnim koeficijentima za koje je jednakost
$$x \cdot P(x-1) = (x - 2023) \cdot P(x)$$
ispunjena za sve realne brojeve x.

4. Zadani su geometrijski likovi L_1, L_2, $L_3, \ldots$. Lik L_1 jednakostranični je trokut površine 1. Svaki sljedeći lik nastaje tako da se svaka od stranica prethodnog lika podijeli na tri jednaka dijela i iznad srednjeg dijela konstruira novi jednakostranični trokut. Nakon konstrukcije jednakostraničnog trokuta briše se srednji dio iznad kojeg je napravljena konstrukcija (vidi sliku). Odredite površinu n-tog lika L_n konstruiranog na opisani način.



5. Težištem jednakostraničnog trokuta stranice a prolazi proizvoljni pravac. Dokažite da je zbroj kvadrata udaljenosti vrhova trokuta do tog pravca konstantan, to jest ne ovisi o izboru pravca.

Matko Ljulj