12. Europska matematička olimpijada za djevojke, 2023. g.

Ove godine održana je 12. po redu Europska matematička olimpijada za djevojke u malom primorskom mjestu Portorožu u Sloveniji. Ovo je bio četvrti nastup Hrvatske, a ukupno je sudjelovalo 55 država, od čega 38 u službenoj europskoj konkurenciji. Hrvatski tim činile su *Barbara Kelava* (3. r.), Prva gimnazija Varaždin, *Stella Čolo* (4. r.), Gimnazija Franje Petrića, Zadar, *Marija Dora Marodi* (3. r.), Gimnazija Josipa Slavenskog, Čakovec i *Lara Semeš* (3. r.), XV. gimnazija, Zagreb zajedno s voditeljima *Ivanom Novakom* i *Lucijom Relić*.

Mathe Misho ponosan je s četiri nove medalje.

U Portorož smo stigli 13. travnja i po dolasku se smjestili u vrlo ugodno mjesto odmah uz more. Upoznali smo se s timovima nekih drugih zemalja i *Ninom Marčeta*, studenticom novinarstva u Ljubljani, koja je bila voditeljica i odgovorna za naš tim za trajanje cijelog natjecanja. Dan nakon toga proveli smo s njom u razgledavanju Portoroža kroz organizirani lov na blago i međusobno se družeći dok su voditelji prevodili tekstove zadataka. Predvečer je bila ceremonija otvaranja uz zanimljiv glazbeni program, a nakon toga nam je prišla predsjednica Republike Slovenije i srdačno poželjela sreću na natjecanju koje je bilo pred nama.

Sljedeća dva dana ujutro smo imale testove, a poslijepodne smo se družile. Nakon razmjenjivanja dojmova zaključile smo da smo generalno zadovoljne s napisanim, ali je pred nama bilo napeto iščekivanje rezultata sljedeći dan. Dok su voditelji timova proveli cijeli dan koordinirajući bodovanje naših rješenja s povjerenstvom, mi smo bile na zanimljivom izletu u Ljubljani s Ninom. Upoznale smo grad kroz vođenu turu, uživale u mirnoj vožnji brodom po Ljubljanici i doživjele predivan pogled s ljubljanskog dvorca. Navečer smo doznale rezultate našeg tima. Pojedinačno smo osvojile zlato (Stella), srebro (Marija Dora) i dvije bronce (Barbara i Lara) čime smo se kao država smjestile na 8. – 10. mjesto u konkurenciji europskih država i 11. – 14. mjesto u ukupnoj konkurenciji. To je dosad najbolji rezultat hrvatske ekipe na ovome natjecanju.

Sljedeći dan, zajedno s našom voditeljicom, posjetile smo Postojnsku jamu gdje smo imali rijetku priliku vidjeti uživo čovječju ribicu i provozali se vlakom po golemoj jami. Nakon toga slijedila je svečana ceremonija zatvaranja s podjelom medalja i oproštajna večera.

Ujutro smo se pozdravili s Ninom i krenuli kući s medaljama i lijepim uspomenama s još jednog natjecanja kojeg ćemo se sigurno još dugo prisjećati.

Iduće godine 13. EGMO će se održavati u Tskaltitudo u Gruziji.

Stella Čolo

Zadatci

Prvi dan, subota, 15. travnja 2023.

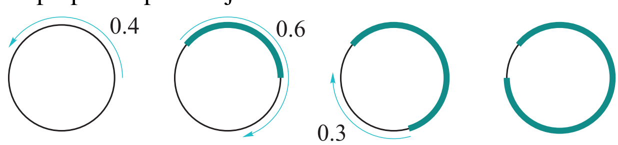
Zadatak 1. Dano je $n \geq 3$ pozitivnih realnih brojeva $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Za svaki $1 \leq i \leq n$ definiramo $b_1 = \dfrac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$ (ovdje pretpostavljamo da je $a_0 = a_n$ i $a_{n+1} = a_1$). Pretpostavimo da za sve brojeve i, j iz skupa $\{1, 2, \cdots, n\}$ vrijedi $a_i \leq a_j$ ako i samo ako je $b_i \leq b_j$. Dokaži da je $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Zadatak 2. Dan je šiljatokutan trokut ABC. Neka je D točka na opisanoj kružnici tog trokuta tako da je $\overline{AD}$ promjer te kružnice. Pretpostavimo da točke K i L leže redom na dužinama $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$, te da su DK i DL tangente na kružnicu opisanu trokutu AKL. Dokaži da pravac KL prolazi kroz ortocentar trokuta ABC. *Ortocentar trokuta je točka u kojoj se sijeku njegove visine.*

Zadatak 3. Neka je k prirodan broj. Lexi ima rječnik D koji se sastoji od riječi. Svaka riječ sastavljena je od k slova, od kojih je svako slovo A ili B. Lexi želi u svako polje $k \times k$ ploče upisati ili slovo A ili slovo B tako da je svaki stupac jednak nekoj riječi iz D kad ga pročitamo odozgo prema dolje te je svaki redak jednak nekoj riječi iz D kad ga pročitamo slijeva nadesno. Koji je najmanji prirodan broj m takav da ako D sadrži barem m različitih riječi, onda Lexi može popuniti svoju ploču na opisani način, bez obzira na to koje riječi se nalaze u D?

Drugi dan, nedjelja, 16. travnja 2023.

Zadatak 4. Puž imena Turbo sjedi u parku na kružnici opsega 1. Za dani beskonačni-niz pozitivnih realnih brojeva $c_1, c_2, c_3, \ldots$, Turbo puže po kružnici tako da za svaki i, u i-tom koraku propuže udaljenost c_i oko kružnice, pri čemu u svakom koraku bira koće li puzati u smjeru kazaljke na satu ili u smjeru suprotnom od kazaljke na satu. Na primjer, ako je niz $c_1, c_2, c_3, \ldots$ jednak 0.4, 0.6, 0.3,…, onda Turbo može započeti svoje puzanje na način kao na slici. Odredi najveći realan broj $C > 0$ sa sljedećim svojstvom: za svaki niz pozitivnih realnih brojeva $c_1, c_2, c_3, \ldots$ takav da je $c_i < C$ za svaki i, Turbo može (nakon što prouči niz) svojim izborima osigurati da postoji točka na kružnici na koju nikad neće stati niti prepuzati preko nje.



Zadatak 5. Dan je prirodan broj $s \geq 2$. Za svaki prirodan broj k, definiramo njegov *twist* k' na sljedeći način: ako je $k = as + b$, gdje su a, b nenegativni cijeli brojevi takvi da je $b < s$, onda je $k' = bs + a$. Za prirodan broj n, promotrimo beskonačan niz $d_1, d_2, \ldots$ gdje je $d_1 = n$ i d_{i+1} je twist od d_i za svaki prirodan broj i. Dokaži da ovaj niz sadrži broj 1 ako i samo ako n daje ostatak 1 ili s pri dijeljenju s brojem $s^2 - 1$.

Zadatak 6. Neka je ABC trokut s opisanom kružnicom Ω. Neka su S_b i S_c redom polovišta lukova $\overset{\frown}{AC}$ i $\overset{\frown}{AB}$ koji ne sadrže treći vrh trokuta. Neka je N_a polovište luka BAC (odnosno luka BC koji sadrži točku A). Neka je I središte upisane kružnice trokuta ABC. Neka je ω_b kružnica koja je tangentna na AB i iznutra tangentna na Ω u točki S_b, i neka je ω_c kružnica koja je tangentna na AC i iznutra tangentna na Ω u točki S_c. Dokaži da se pravac IN_a i pravac koji prolazi kroz točke presjeka kružnica ω_b i ω_c sijeku na Ω. *Upisana kružnica trokuta je kružnica koja je tangentna na sve tri njegove stranice.*

Ivan Novak