Rješenje nagradnog natječaja br. 242

Neka je $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ niz strogo rastućih pozitivnih cijelih brojeva. Dokaži da za svaki prirodan broj n vrijedi

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 \geq \frac{2n+1}{3}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Rješenje. Dokaz ćemo provesti metodom matematičke indukcije. Za $n = 1$, $a_1^2 \geq \frac{2 \cdot 1 + 1}{3} a_1$ odakle je $a_1 \geq 1$. Iz induktivne pretpostavke dobivamo

$$a_{n+1}^2 \geq \frac{2}{3}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) + \frac{2n+3}{3} a_{n+1}.$$

Dobivamo ekvivalentnu nejednakost

$$3a_{n+1}^2 - (2n+3)a_{n+1} \geq 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n).$$

Zbroj brojeva $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ nije veći od zbroja brojeva od 1 do a_n, tj.

$$2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \leq 2(1 + 2 + \ldots + a_n) = a_n(a_n + 1) \leq (a_{n+1} - 1)a_{n+1}.$$

Dovoljno je pokazati jednostavniju nejednakost

$$3a_{n+1}^2 - (2n+3)a_{n+1} \geq (a_{n+1} - 1)a_{n+1},$$

koja je ekvivalentna s $a_{n+1} \geq n + 1$, a to vrijedi jer je niz strogo rastući. Stoga vrijedi i dana nejednakost.

Knjigom Darko Veljan, *Kombinatorna i diskretna matematika*, Algoritam, Zagreb, 2021., nagrađen je učenik:

Marko Dodig (4), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb.

Riješili zadatke iz br. 3/291

a) Iz matematike: *Marko Dodig* (4), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, 3903–3916.

b) Iz fizike: *Gregor Klarić* (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb, 514–517; *Ivona Kučiš* (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb, 514–517; *Marija Miloš* (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb, 514–517; *Marko Dodig* (4), Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb, 1805, 1807, 1808, 1811.

Nagradni natječaj br. 244

Definiran je niz $(a_n)_{n \geq 0}$ s $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$ i

$$a_{n+4} = 2a_{n+3} + a_{n+2} - 2a_{n+1} - a_n, \quad n \geq 0.$$

Dokaži da n dijeli a_n za svaki $n \geq 1$.

SVIM SURADNICIMA

U Matematičko-fizičkom listu objavljuju se članci iz matematike, fizike i informatike, s malim prilogom iz astronomije, zadatci i rješenja, prikazi natjecanja i ljetnih škola iz matematike i fizike, zanimljivosti u obliku članaka i zadataka od učenika, profesora i ostalih matematičara i fizičara, novosti iz znanosti, prilozi o državnoj maturi i nagradni natječaj.

Prilozi trebaju biti napisani računalom (Word, Tex, Latex) ili pisaćim strojem.

Slike trebaju biti jasno nacrtane na posebnom papiru i pogodne za presnimavanje ili pošaljite slike crtane računalom (eps, jpg, png i sl.).

Članci neka ne budu dulji od osam stranica, a ako je to potrebno neka budu napisani u nastavcima.

Pozivaju se učenici da pošalju članak o nekoj zanimljivoj temi, originalne zadatke s rješenjima ili prikaze nekih manifestacija (ljetne škole, susreti učenika, rad školske grupe).

Kako se rukopisi ne vraćaju, sačuvajte original, a pošaljite kopiju na papiru formata A-4.

Svi rukopisi podliježu recenziji redakcije ili neke stručne osobe za određeno područje.

Prilozi se šalju na adresu ovog časopisa koja je na početku lista.

RJEŠAVATELJIMA ZADATAKA

Svako rješenje neka bude napisano na **posebnom** papiru i to samo na **jednoj** strani papira. Uz svako rješenje na vrhu papira treba potpuno ispisati tekst zadatka. Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačiti razred, školu i mjesto. **Rješenja se mogu slati i e-poštom na adresu glavnog urednika:** `zeljko.hanjs@math.hr`

Matematičko-fizički list na Facebooku

Možete pronaći MFL i na Facebooku na stranici

`https://www.facebook.com/MatFizL`

Uz razno-razne podatke o MFL-u moći ćete naći i nove zadatke za rješavanje.