

## NEKE PARADIGME ZA USPJEŠNU NASTAVU I USMJERAVANJE UČENJA U MATEMATICI

Vladimir Kadum

Visoka učiteljska škola u Puli

Primljeno, 20. prosinca 2004.

U radu autor daje neke načine, pravila i primjere koji mogu pridonijeti uspješnosti nastave i usmjeravanju učenja u matematici.

*Ključne riječi:* matematika, nastava matematike, uspješna nastava, usmjeravanje učenja, kontrolirano učenje, trajnost znanja, prijenos znanja

### 1. Uvod

Svi učenici ne mogu usvajati nastavne sadržaje na isti način, istim tempom i brzinom, istom lakoćom i potpunosti. Zato učitelj ima dvostruki zadatak: (1) postaviti odgovarajuće ciljeve u odnosu na sadržaje koje učenici trebaju usvojiti i (2) planirati takve aktivnosti koje će pridonijeti da učenici steknu takva iskustva koja će ih voditi postizanju postavljenih ciljeva. Da bi se ovo postiglo, učitelj mora shvatiti postavljene matematičke ciljeve kao i načine kako učenici usvajaju matematičke sadržaje. On mora imati na umu da u učenju postoje određene etape i razdoblja, kao i stupnjevi te da početno razumijevanje i ovladavanje matematičkim vještinama može dovesti do neželjenih posljedica ako se ne rabe, obnavljaju ili ne primjenjuju. Zato učitelj mora pažljivo razmotriti postupke i prilagoditi ih za postizavanje optimalne učinkovitosti u osposobljavanju učenika da dostignu željene ciljeve.

Problem nastave matematike jest problem unaprjeđivanja učenja. Učenici su ti koji uče, pa problem nastave matematike postaje problem usmjeravanja njihovih aktivnosti u takvim pravcima kako bi se postiglo odgovarajuće učenje. Onaj učitelj koji razmišlja o načinima na koje učenici uče matematičke sadržaje postići će bolje rezultate negoli onaj koji to ne čini.

Učenje je aktivan proces. Ono se postiže raznovrsnim aktivnostima i prilazi mu se raznovrsnim putovima: čitanjem, slušanjem, postavljanjem

pitanja, radom na tiskanom materijalu, pisanjem, crtanjem, uspoređivanjem, analiziranjem, sintetiziranjem, računanjem itd. Sve su ove aktivnosti sadržane u razmišljanju. One moraju biti tako planirane da onoga koji uči vode razumijevanju i ovladavanju sadržajima na razini koja odgovara njegovim intelektualnim sposobnostima i stupnju školovanja.

Da bi nastava bila uspješna, potrebno je da se nastavni sadržaji odaberu i sistematiziraju tako da odgovaraju uzrastu i intelektualnom razvoju učenika. Oni moraju biti predstavljeni na razumljiv i zanimljiv način. Stečene vještine i pojmovi te usvojena znanja, jednom razvijeni, moraju se održavati i njegovati ponavljanjem i vježbanjem i ne smije se dozvoliti da zbog nekorištenja padnu u zaborav.

Kako učenici ne uče istom lakoćom i istim tempom, potrebno je dužnu pažnju posvetiti njihovim individualnim razlikama. Želimo li da nastava bude maksimalno učinkovita, ona se mora odvijati sa smišljenom namjerom osiguravanja maksimalnoga prijenosa znanja. Pritom odnos matematike prema drugim područjima učenja mora biti jasno uočljiv i istaknut.

Matematika je nastavni predmet koji je – kao ni jedan drugi predmet – kumulativan i neprekidno se proširuje kako u teoriji, tako i u primjeni. Učitelj matematike suočava se s tri osnovna problema:

1. pomaganje učenicima da razviju razumijevanja i ovladaju novim pojmovima, postupcima, odnosima i vještinama
2. pomaganje da očuvaju jednom usvojene vještine i znanja
3. pomaganje radi osiguravanja maksimalnoga prijenosa znanja na svoju okolinu.

Ova tri stupnja nastave trebaju biti u najvećoj mogućoj mjeri implicirana u jedinstveni nastavni program. Međutim, njihove su implikacije u biti različite i dopunjujuće. Usvajanje novih nastavnih sadržaja mora se temeljiti na već usvojenim znanjima i vještinama i u tom smislu služiti kao sredstvo za održavanje već postignutoga znanja. No, takovo održavanje znanja ovisi o usvajanju novih sadržaja i tako ga valja promatrati.

## **2. Nastava s ciljem razvijanja razumijevanja – nastava za razvoj**

Najvažniji problem nastave matematike je usvajanje novih sadržaja. Radi se o onoj etapi u kojoj se od učitelja zahtijevaju najviše vještine i umijeća. Očituje se u sljedećem: objasniti i razjasniti, izazvati nedoumicu (problemska nastava), voditi k otkrivanju (otkrivajuća nastava), razvijati razumijevanje. Da bi odgovorio ovim zahtjevima učitelj mora razmotriti

logičke veze i odnose koji su sadržani u nastavnoj jedinici. Jednako tako, mora uočiti veze i odnose novih pojmova koji se pred učenike postavljaju prema njegovoj iskustvenoj osnovi. Pored toga, učitelj mora biti u stanju predvidjeti moguće teškoće i probleme, te ustanoviti i razjasniti stvarne teškoće kada se pojave u nastavnome procesu.

Uspješna nastava zahtijeva racionalnost u trošenju vremena i pritom se interes i motivacija stalno potiču i održavaju. Pri obradi novih nastavnih sadržaja polazi se obično od pretpostavke da su učeniku nastavni sadržaji koje mora usvojiti potpuno nepoznati. Međutim, to nije uvijek tako. U nekim slučajevima oni vladaju pojmovima i postupcima za koje se pretpostavlja da su im novi, nepoznati. U takvim situacijama oni postaju nemirni i nestrpljivi, pažnja im luta, atmosfera u razredu postaje nepovoljna za uspješno učenje.

Prije nego li se pristupi realizaciji usvajanja novih nastavnih sadržaja, poželjno je da učitelj inicijalnim ispitom utvrdi inventar znanja, tj. predznanje učenika u odnosu na nove sadržaje. Izvršivši prethodno ispitivanje, učitelj će biti u situaciji da smišljeno nastavi s izgrađivanjem potrebne osnove i da uspješno izloži nove nastavne sadržaje.

Pri prijelazu na novu nastavnu cjelinu, važno je učenicima dati pregled nastavnih tema i jedinica koje su njezine sastavnice kako bi mogli sagledati glavne ideje, probleme i postupke u njoj, njihov međuodnos i odnos prema nastavnoj cjelini te da se ukaže na odnos prema ranije učenim nastavnim sadržajima. Ovo ima za cilj: (1) dati značenje i važnost općim idejama nastavne cjeline i njenim sastavnicama (nastavnim temama i jedinicama), i (2) dati motive za sustavno učenje koje mora biti glavni dio rada pri usvajanju sadržaja nove nastavne cjeline. Učitelji matematike najčešće ne uočavaju važnost davanja ovakvoga pregleda kao sastavnoga dijela odgojno-obrazovnog procesa. Uglavnom se novi sadržaji po formi i obliku daju onako kako su izloženi u udžbeniku, bez nastojanja da se oni povežu kao cjelina.

Učitelj će pregled dati u obliku dobro organiziranoga izlaganja koje ne smije trajati dugo. Tijekom davanja ovoga pregleda učenici su u ulozi slušača. Ovo naravno ne znači da je postavljanje pitanja i komentara s njihove strane zabranjeno, ali treba ustrajati da svoja pitanja i komentare odlože za kraj izlaganja kada treba povesti širu i djelotvornu raspravu. To iz razloga da se ne prekida kontinuitet misli, što je od posebne važnosti za ovu etapu nastave. Davanje pregleda pruža velike mogućnosti poticanja učenika na radoznalost, interes i motiviranost, što kod učenika razvija vještinu dobra slušatelja. Pregledu prethodi kratak tekst zbog efikasnosti izlaganja i eventualne potrebe novoga razjašnjavanja nekih pitanja prije nego li se pristupi izlaganju sadržaja nove nastave cjeline.

Za izvođenje nastave matematike monološka je metoda, kakva se obično koristi u nastavi, nedovoljna. Najčešća je pogreška učitelja što preširoko koriste metodu izlaganja ili suvislog razmatranja danog pitanja, i zatim nastavljaju s izlaganjem i pritom pretpostavljaju da su učenici izlaganje u cijelosti slijedili i razumjeli. Međutim, ta pretpostavka najčešće nije opravdana, jer su učenici rijetko u situaciji da na primjeran i neposredan način usvoje jednostrano razmatranje novoga sadržaja od strane učitelja. Prije ili kasnije javit će se teškoće, i ukoliko se odmah ne otklone, ti će sadržaji ostati nejasni i rezultat će poteškoćama pri usvajanju i razumijevanju nastavnih sadržaja koji se temelje na njima ili se makar djelomično koriste u nekim novim situacijama.

Ovo, naravno, ne znači da monološku metodu valja izbjegavati. U mnogim je situacijama izlaganje korisno i apsolutno neophodno. To se primjerice odnosi na objašnjavanje značenja novih naziva, pojmova i simbola. Metoda izlaganja u nastavi matematike treba biti na korist objašnjavanja i ilustriranja, i pritom ju ne treba produžavati više nego li je potrebno. Osim toga, izlaganje ne smije biti jednosmjerno; ono treba biti protkano učiteljevim pitanjima koja će potaknuti učenikova pitanja. To dovodi do tješnije suradnje i kada do toga dođe, u tom trenutku, metoda izlaganja prerasta u viši stupanj rada – metodu razgovora.

Naravno da nije lako potaknuti učenike da postavljaju pitanja. Teškoće koje nastaju u njima samima nisu dovoljno određene da bi oni bili u stanju iskazati ih riječima. Kako su učenici vrlo osjetljivi na mogućnost da u očima drugih učenika ispadnu spori u razumijevanju i shvaćanju ili iskazivanju svojih razmišljanja, radije, da ne dođu u neprilike, ne koriste te mogućnosti i prelaze preko njih. Zato učenici vrlo često dozvoljavaju da činjenice koje nisu razumjeli ili koje nisu shvatili prođu nerazjašnjene. To može kasnije imati za posljedicu niz teškoća i pri usvajanju matematičkih sadržaja. Stoga učenike valja aktivno uključivati u proces stjecanja znanja i hrabriti ih da postavljaju pitanja svaki put kada nisu u stanju jasno pratiti izlaganje sadržaja.

Pa i onda kada se u tome uspije ne može se očekivati da će učenici iznijeti sva pitanja koja tijekom izlaganja, razmatranja ili objašnjavanja novih sadržaja zahtijevaju posebnu pozornost. Zato učitelj mora naslušivati ta pitanja i biti uvijek spretno uočiti ih kada se pojave. Ovo se vrlo često može uočiti iz izraza učenikova lica, kada lice, iako nije postavljeno nikakvo pitanje, poprimi upitan izraz. Prilika je sada učitelju da prikladnim pitanjima provjeri u kojoj su mjeri učenici razumjeli izlagane sadržaje. Jednako tako, prije prijelaza na druge aktivnosti, po završetku izlaganja bilo kojeg novog sadržaja, učitelj mora provjeriti jesu li učenici

razumjeli izlagano. Postavljanje nekoliko općenitih pitanja s namjerom zaokruživanja izloženih sadržaja, potpuno je neadekvatno. Uz takva pitanja vrlo često nastaje muk, a to nije nikakvo jamstvo da su učenici pratili tijek izlaganja, mada se to najčešće tako tumači.

Međutim, kada se učenici s dobro odabranim pitanjima navedu da sami otkrivaju činjenice i odnose među njima, uspjeh je očigledan. Ovo ga čini aktivnim sudionikom odgojno–obrazovnoga procesa i omogućava buđenje njegova interesa. Učenik postaje aktivan primatelj informacija.

Kao što ne postoji jedinstvena metoda učenja novih pojmova, tako ne postoji ni jedinstvena metoda nastave koja bi odgovarala svim situacijama. U tome može najbolje pomoći **nastava za razvoj**. Postupak koji s uspjehom primjenjuje jedan učitelj može se pokazati neuspješnim kad ga primjeni drugi ili čak isti učitelj, ali u drugim okolnostima ili nekom drugom razrednom odjelu. Mnogo ovisi o ličnosti učitelja, njegovom zanosu, taktu, strpljenju, odnosu s učenicima, kao i o njegovoj sposobnosti da intuitivno osjeti postupak koji će najbolje i svrhovito poslužiti da se iskoristi trenutačna psihološka situacija u učionici ili da ga prilagodi tako da najjače pridonese u pravcu postavljenoga cilja. U nastavi za razvoj najuspješniji će biti onaj učitelj koji vlada *različitim* metodama i postupcima i koji ih upotrebljava tako da se u danoj situaciji najpovoljnije međusobno dopunjuju.

Zbog preopširnosti nastavnog programa i ne baš kvalitetnih udžbenika, ali i nedovoljne metodičke obučenosti učitelja, jedna od pogrešaka koju oni čine je ta što pokušavaju u danom razdoblju obuhvatiti mnogo sadržaja ili danu količinu sadržaja prijeći u suviše kratkom vremenu. Rezultat takvog odnosa je površno ili nikakvo učenje. U nastavi za razvoj, pri obradi novih sadržaja učitelj treba izbjegavati suviše brzo formiranje pojmova. Naime, formiranje novih pojmova i postupaka vezanih uz njih spor je proces i on uvijek zahtjeva određenu diskusiju. Kad god je moguće učenike usmjeriti prema istraživačkim aktivnostima tako da budu vođeni prikladnim pitanjima te sami otkrivaju, to treba činiti. Ponekad je neopходно da učitelj dade direktnu informaciju. Tada ona treba biti kratka i jasna, i treba na odgovarajući način provjeriti njen učinak. Novim znanjima, kako se razvijaju, treba dati stalnost, jasnoću i zanimljivost pomoću primjerenih ilustracija i primjena.

Nastava za razvoj nije samo stvar učitelja. Da bi bila uspješna, ona zahtjeva neprekidno međudjelovanje najboljih nastojanja učitelja i učenika. Cilj je da se kod učenika razvije široka osnova matematičkog shvaćanja i razumijevanja te da se razvija interes za matematiku kako bi stekli što bolji uvid u njenu prirodu i svrhovitost te povećali svoju sposobnost da

u tom području samostalno misle i djeluju. Učitelj mora planirati i voditi svoju aktivnost u smjeru tih ciljeva. Mora nastojati da osigura najveći mogući stupanj suradnje učenika. Mora biti taktičan i osjećajan, pomagati kada je potrebno, ohrabrivati, usmjeravati, voditi, provjeravati i uvijek iznova poticati učenike da napregnu sve svoje snage. Na taj se način može očekivati da će nastava za razvoj dati vrlo dobre rezultate, kako pri usvajanju nastavnih sadržaja, tako i u izgrađivanju dodatnoga razumijevanja matematičkih sadržaja i njenih doprinosa u razvijanju i povećavanju sposobnosti samostalnoga matematičkoga mišljenja i zaključivanja te poticanja za daljnje izučavanje matematike.

### 3. Nastava za asimilaciju – kontrolirano učenje

Nedostatak razvojnog rada koji prethodi razdoblju samostalnog učenja razlog je mnogim teškoćama s kojima se učenici susreću u matematici. Stoga oni neće biti u stanju napredovati samostalno u smjeru asimiliranja pojmova, postupaka i odnosa o kojima nisu stekli ni osnovno razumijevanje. (Ovdje asimilaciju razumijevamo kao proces kojim se novi sadržaji, pojmovi i vještine prilagođavaju i pridružuju starijim, prije usvojenim znanjima i vještinama.) Prikladna nastava za razvoj apsolutni je preduvjet za uspješnu asimilaciju učenja matematičkih sadržaja. Učitelju koji nije osigurao da njegov razvojni rad bude u razumnoj mjeri uspješan učenici će bespomoćno lutati u mraku tražeći svjetlost u stvarima o kojima su stekli tek nedovoljno razumijevanje. Prije nego li učenici pristupe samostalnom učenju novih sadržaja, od velike je važnosti poduzimanje mjera da se provjeri njihovo razumijevanje ideja koje je učitelj pokušao razviti kod njih kao prethodnu osnovu za njihov rad u razdoblju asimilacije. Otkrijui li se sadržaji koji zahtijevaju daljnji razvojni rad, takve sadržaje valja razjasniti ponavljanjem nastave, ali sada drugačijim pristupom, drugačijom metodom rada.

Konačno usvajanje pojmova neće se postići bez mnogobrojnih i kvalitetnih ilustracija i postupaka bez stalne primjene, široke prakse, ni bilo čega od svega ovoga bez dugotrajnoga i ustrajnoga intelektualnoga napora samih učenika. Svrha je nastave za razvoj da učenicima dade osnovu za razumijevanje i motive na kojima će dalje graditi. Međutim, ne može se smatrati da je proces ovladavanja tim korakom završen. To je tek početak iza kojega slijedi razdoblje tijekom kojega će se učenici posvetiti zadatku asimilacije i utvrđivanju ideja i postupaka koji su izneseni u nastavi za razvoj.

Asimilacija može ići različitim putovima, mada je onaj glavni individualno, kontrolirano učenje.

Razdoblje asimilacije ne mora biti neprekinuti niz nastavnih sati posvećenih u cjelini učenju i oslobođenih svega drugoga. U razvojnoj etapi glavni je cilj da se postigne početno *razumijevanje* novoga gradiva. U etapi asimilacije cilj je postizavanje potpunijega i dubljega uvida, veće poznavanje i veća spretnost. Jednostavno, da se postigne stvarno vladanje nastavnim sadržajem i ugodan osjećaj lakoće i bliskosti u odnosu na gradivo. Ciljevi, naravno, povlače metode i aktivnosti kojima se oni mogu najbolje dostići.

U etapi asimilacije uloga učitelja postaje bitno drugačija, on postaje manje uočljiv. Učenici i njihova aktivnost u središtu su pozornosti, dominirajući su činitelji. Učitelj se ovdje javlja kao šaptač i redatelj koji djeluje iza zastora. Povremeno će se javljati potreba za nekom općom raspravom u cilju motiviranja i raščišćavanja onih sadržaja koji predstavljaju stalan izvor teškoća. Te diskusije trebaju, najvećim dijelom, pratiti usmjerenno učenje koje predstavlja osnovni vid aktivnosti u ovom razdoblju rada.

U procesu asimilacije kroz kontrolirano učenje učenici su glavni sudionici. Učiteljeva je zadaća da vodi i usmjerava njihov rad, da ih potiče, ohrabruje, da im pomaže u savladavanju teških i složenijih sadržaja, da ocjenjuje njihovo napredovanje i da ih različitim načinima pridobije na ulaganje najvećih napora za trajno i funkcionalno usvajanje sadržaja koje uče.

Učitelj mora biti u dodiru s radom svakog pojedinog učenika, što zahtjeva nadzor i brzo uočavanje teškoća i potreba pojedinih učenika. Mora biti vješt u otkrivanju ključnih teškoća i biti sposoban pomoći učenicima da te teškoće otklone. On, jednako tako, mora biti sposoban razlikovati učenike koji stvarno nailaze na teškoće od onih koji jednostavno nisu skloni samostalnome učenju.

Učitelji griješe kada i na najmanji znak teškoće odmah priskaču u pomoć učenicima i tako oni odrade posao umjesto njih. Učitelj mora pustiti učenike da se pokušaju sami othrvati s problemskim zadatkom. No, kada procijeni da je pomoć stvarno potrebna, tada u pružanju pomoći ne smije biti škrt. Ali i tada doprinos učenika prevladavanju teškoće mora biti maksimalan. Pritom ne smije dozvoliti da svoj razgovor s jednim učenikom završi na brzinu, bez jasno utvrđenih ciljeva pomoći, a sve to zbog nestrpljenja drugih učenika kojima je pomoć također potrebna (Kadum, 1988).

#### **4. Nastava za postizanje trajnosti znanja**

Razvoj i asimilacija u odgojno-obrazovnom procesu osnova su usvajanja novoga gradiva. Bez obzira u kojoj su mjeri u početku sadržaji usvo-

jeni, oni se – ukoliko se ne održavaju primjenama i praksom – lako zaboravljaju. Ovo posebno vrijedi za matematičke vještine i odnose. Vještine se moraju usavršavati i održavati sustavnim vježbanjem, a pojmovi se moraju obnavljati i primjenjivati. Nastavu koja ima za cilj da to postigne možemo zvati *nastava za postizavanje trajnosti znanja*. Mada u općem slučaju ne obuhvaća nove sadržaje, važnost takve nastave kao sredstva za utvrđivanje i održavanje usvojenoga može se usporediti s važnošću razvoja i asimilacije u nastavi kao sredstvo za *stjecanje* novoga znanja.

Njezini su putovi vježbanje, obnavljanje i održavanje.

**Vježbanje** obuhvaća sve situacije koje uključuju ponavljanja iskustava i otuda razmatranje vježbanja dodiruje sve vidove nastave koji pridonose postizavanju trajnosti znanja.

Vježbanje mora biti prihvaćeno kao važno sredstvo za svladavanje matematičkih vještina, baš kao što se snažan naglasak na pojmovima i značenjima mora smatrati važnim za razumijevanje. Oboje je potrebno i ni jedno nije samo za sebe dovoljno. Matematičke operacije, da bi bile od koristi, potrebno je izvoditi korektno, brzo i s lakoćom. Neke od njih treba dovesti i na razinu automatizacije. Postizanje lakoće u takvim operacijama može se osigurati samo sustavnom i stalnom praksom, tj. vježbanjem.

Da bi nastava bila korisna, razumijevanje mora biti u sprezi s lakoćom operiranja. Ne treba vježbati postupke koje učenici prethodno nisu razumjeli. Vježbanje u takvim okolnostima bez značenja je i motiva. Ono može, istina, donijeti privremenu lakoću operiranja, ali je ona bezvrijedna ako nije praćena razumijevanjem. Ako nedostaju razumijevanje i motiv, vježbanje postaje samo mukotrpan i nedovoljno učinkovit rad.

Uspješnost vježbanja ovisi o motiviranosti. Uočavaju li učenici važnost i zanimljivost onoga na čemu rade, radit će s oduševljenjem i usmjerenom pažnjom, i njihov će rad biti uspješniji.

Vježbanje se treba odvijati tako da učenici rade brzinom i tempom koji njima odgovara i na razinama koje su u skladu s njihovim sposobnostima i mogućnostima. Postojanje individualnih razlika unutar jedne grupe jasno kazuje da pojedinci neće raditi istom brzinom i tempom i na istoj razini zahtjeva. Za vježbanje treba osigurati dovoljno didaktičkoga materijala kako bi svi učenici bili korisno i racionalno zaposleni tijekom cijeloga nastavnoga sata. Mora se osigurati i dovoljno raznolikoga didaktičkoga materijala koji će pružiti korisnu i poticajnu priliku učenicima različitoga znanja i sposobnosti.

Razdoblja vježbanja u pravilu trebaju biti kratka. Pažnja učenika nije velika i dugački sati neprekidnoga vježbanja postaju zamorni i neučinko-



viti. To znači da duže razdoblje vježbanja, ukoliko je potrebno, treba rasporediti u niz kratkih intervala između kojih razmak treba postajati sve duži kako vrijeme odmiče. Ovo načelo raspoređenoga učenja, nasuprot ideji neposrednoga kompletnoga ovladavanja, važno je i sve više se uočava u strukturi udžbenika i nastavnoga sadržaja.

Da bi vježbanje bilo uspješno, ono mora biti organizirano na osobit način. Pod ovim se razumijeva da mora biti usmjereno na određene vještine ili na određene detalje operacija. Učenici moraju shvatiti bit odnosa bilo kojega detalja prema cjelini čiji su dio. Kad je željeni stupanj vještine dostignut, detalje treba postupno reintegrirati u ukupni proces ili sustav vještina. Pritom valja inzistirati na točnosti, dok su brzina i tempo rada privremeno drugostupanjske važnosti. Zato je važno da se *blisko* kontrolira početni rad učenika. Insistiranje na *ispravnim postupcima* ne znači da je ono previše naglašeno.

Malo koje stvari mogu učenika potaknuti na jaču zainteresiranost za vlastiti rad ili da s većim zanosom i intenzitetom prilazi radu nego što je to zadovoljstvo neposredne spoznaje je li mu rad ispravan ili ne. Poželjno je da se primjenjuju testovi znanja ili provjere da bi učenici utvrdili ispravnost svojega rada. Provjeravanje rada na takav način predstavlja obrazovnu vježbu koja je isto toliko vrijedna kao i sam rad. Takva matematička provjeravanja mogu se, povezano s vježbanjem, koristiti isto kao i u slučaju rada na problemskim zadacima.

Polazeći od uvjerenja da će učenici odgovore zlorabiti, učitelj im nerado daje odgovore na problemske zadatke i/ili sadržaje koji su predviđeni za rad kod kuće. To što *odmah* zna jesu li mu odgovori, tj. rješenja točna ili ne, za učenika je to, u stvari, određeni poticaj. Ako mu je rješenje točno, on osjeti neposredno zadovoljstvo; ako nije, to ga potiče da provjeri i ispravi svoj rad prije nego li mu pažnja prijeđe na druge obveze. Zato treba dati odgovore na odabrane problemske zadatke i vježbe. Od učenika treba zahtijevati da sve rezultate provjeravaju pažljivo. Kada su odgovori dani, dovoljna je provjera samo njihova slaganja. To znači da isti zadatak mora riješiti na drugačiji način, nekom drugom metodom i pritom se rezultati moraju slagati. U vezi s time ističemo stav engleskoga matematičara W. W. Sawyera koji kaže da je bolje isti zadatak riješiti na tri–četiri različita načina nego tri–četiri zadatka riješiti na isti način.

Raznolikost iskustva glavni je cilj vježbanja i vrijeme tome ne smije biti zapreka.

Učenici moraju biti svjesni da je vježbanje samo jedan dio matematičkoga treninga kojim se stječu određene vještine i sposobnosti i da bi bez njega rad na daljnjem razvijanju razumijevanja, prosudbe i uopća-

vanja bio otežan. Učenik koji ne vlada dovoljno matematičkim vještinama teško će svoju pažnju moći usmjeriti iskazivanju i analizi matematičkih poučaka i problemskih zadataka.

**Obnavljanje** se ponekad poistovjećuje s vježbanjem jer oboje karakterizira ponavljanje i jer oboje imaju za cilj utvrđivanje reakcija, pojmova i odnosa.

Vježbanje ima za cilj uglavnom automatizaciju relativno detaljnih postupaka i reakciju na njih. Obnavljanje, pak, ima za cilj utvrđivanje i pamćenje detalja ali i njihovo smišljeno organiziranje u međusobno povezanu cjelinu važnih pojmova i činjenica, da bi odnosi raznih dijelova jednih prema drugim i prema cjelini bili jasno shvaćeni.

Pri obnavljanju sadržaja treba postići dvije glavne zadaće: (1) uvjeriti se da učenici pamte osnovne crte onoga što su već naučili, i (2) navesti ih da, kao s vrha brda, bace pogled na putove kojima su išli, omogućujući im time stjecanje mnogo širih pogleda nego što su ga imali idući tim putovima (Reeve, 1954).

Obnavljanje obično obuhvaća manje ili više opsežne dijelove gradiva. Jedna od njegovih funkcija jest da se gradivo sigurnije i učinkovitije upamti što se postiže smišljenim procesom organizacije, sređivanjem i povezivanjem dijelova sadržaja jednih s drugima dajući novi pogled na gradivo koje se obnavlja. Ono ističe mišljenje i značenje, a ne formiranje navika. Iako vježbanje i obnavljanje imaju zajedničkih crta, među njima postoje i razlike. Svako od njih ima svoju odgovarajuću funkciju i svakom od njih pripada velika važnost za učenje matematike.

Obnavljanje može biti usputno i kao takvo integrirano s nekom drugom vrstom rada, ili može biti usmjeravajuće pa predstavlja temeljan vid i cilj danog zadatka. Obje ove vrste obnavljanja neophodne su za uspješnu nastavu. Usputno obnavljanje je naročito korisno pri postupnom izgrađivanju i razjašnjavanju pojmova ponavljanim vraćanjem na njih i ponovnom uporabom u situacijama čiji su oni sastavi dio.

Usmjeravajuće obnavljanje dopunjuje opisano usputno obnavljanje. Uloga usmjeravajućega obnavljanja jest pomoći učeniku da više ili manje opsežne dijelove gradiva organizira u smislu njihove međusobne logične povezanosti, da mu pomogne u klasificiranju njihovih važnih ideja i da mu da osjećaj jedinstva cjeline koje inače može nedostajati.

U pripremi za satove obnavljanja od učenika treba tražiti da sumiraju glavne ideje koje su razmotrene i da načini shemu na osnovi koje će moći izložiti kratku, ali suvislu i sustavnu diskusiju obnavljenih sadržaja. Priprema takve sheme zahtijevat će od učenika da obnovi predmetne

sadržaje u najcjelovitijem smislu riječi. To povezivanje ideja pomoći će mu da sadržaje upamti, razumije i uvidi njihove odnose.

**Održavanje** je prikladan naziv za planiranje programa vježbanja i obnavljanja. Osnovni zahtjev koji se postavlja jednom zadovoljavajućem programu održavanja jest da spriječi zaboravljanje činjenica, pojmova i odnosa te slabljenje vještina. Da bi se to postiglo, program mora osigurati sustavnu primjenu važnih sadržaja iz nastavnoga programa i odgovarajuću i neophodnu praksu u svezi s tim sadržajima. Zato planiranje mora biti temeljeno na sljedećim načelima:

- (1) Obuhvaćeno gradivo mora biti odabrano s obzirom na relativne vrijednosti. Program ne smije biti nagomilan trivijalnim činjenicama. Njime moraju biti obuhvaćene samo važne vještine, pojmovi, odnosi, postupci i problemske situacije.
- (2) U skladu s utvrđenim načelima vježbanja i obnavljanja, pojedini dijelovi u programu moraju biti raspoređeni tako da primjena ne bude locirana ni na jednom od njih, već se mora odvijati u rastućim intervalima i u padajućim količinama.
- (3) Program održavanja mora biti dijagnostički, po mogućnosti autodiagnostički, tako da svaki učenik može uvidjeti vlastite slabosti. Zato valja osigurati određena didaktičko–metodička sredstva pomoću kojih će svaki učenik moći neprekidno pratiti i proučavati svoja postignuća.
- (4) Osigurati treba i dopunski materijal za eventualno ponovljeni rad vezan uz elemente obuhvaćene programom održavanja. Uporaba ovoga dopunskoga materijala bit će uspješna ako je povezan s dijagnozom. Na taj će način učenik biti u mogućnosti odrediti koje elemente mora više vježbati i primjenjivati u radu i na taj će način svoj ponovljeni rad obavljati uz minimalna usmjeravanja.
- (5) Sustavi vježbi u programu održavanja moraju biti stupnjevani uniformnim bodovanjem ili tablicama vrijednosti tako da svaki učenik može odrediti svoj opći uspjeh i napredak. Ovo je od posebne važnosti za poticanje i razvijanje interesa za održavanje vještina i postupaka, jer početni je interes izazvan novinom iščeznuo (Butler i Wren, 1960).

Mnogim učiteljima nedostaje iskustvo ali i vrijeme za pripremu materijala za rad na održavanju. Pripremljeni materijali koji su znanstveno planirani i programirani i koji podliježu određenim standardima imaju najmanje ove tri karakteristike: (1) štede vrijeme i napor i time pridonose većoj efikasnosti nastave; (2) snažno motiviraju dostignuća, jer stalno potiču učenike da proučavaju vlastiti rad; i (3) najbolje su sredstvo protiv zaboravljanja i slabljenja vještina i razumijevanja.

## 5. Nastava za prijenos

Kako se matematika najvećim dijelom bavi rasuđivanjem, smatralo se da matematika samim time jača *logičku sposobnost* i da ta sposobnost onda nužno djeluje na veću učinkovitost. Međutim, rezultati istraživanja W. Jamesa, E. L. Thorndikea, H. Woodwortha i drugih, doveli su u pitanje njenu vrijednost kao teorije učenja, i ona je kao takva napuštena.

Ovo, naravno, ne znači da učenje matematike nema nikakva utjecaja na učenje onih sadržaja koji su izvan sadržaja koji se neposredno uče. Naprotiv, rezultati istraživanja ukazuju da učinci koje u čovjeku izaziva učenje matematike materijalno utječu na njegove reakcije u situacijama različitim od onih u kojima su ti učinci nastali.

Termin *prijenos* obično se rabi da se označi djelovanje u drugoj ili novoj situaciji, određenih struktura koje su naučene u nekoj ranijoj situaciji.

Kada se govori o načinu na koji se prijenos vrši i okolnostima koje ga uvjetuju, ističemo da ne postoji suglasnost o tome kako se prijenos zapravo vrši. Za postizavanje prijenosnih vrijednosti bilo kojega sadržaja važno je da se oni prenose s tim ciljem na umu. Da bi se osigurao maksimalan prijenos u smislu primjene nekoga integralnoga znanja (načelo cjelovitosti) na sve zadatke koji obuhvaćaju isto načelo, nastava se matematike mora izvoditi tako da demonstracijske vježbe, tj. rješavanje (problemskih) zadataka, služe kao primjeri primjenjivanja toga načela.

Nastava matematike ili usmjeravanje učenja sadržaja matematike na takav način pridonosi postizavanju prijenosne vrijednosti. Zato se takav vid nastave matematike nameće kao obveza.

Poželjno je da se nastava onih elemenata koje će većina ljudi *koristiti* izvodi tako da se oni *mogu* koristiti kada god to okolnosti zahtijevaju. Među njih ubrajamo:

- osnovne kombinacije, vještine, operacije i aritmetičke pojmove
- zakone i formule koje se rabe pri mjerenju i izračunavanju određenih veličina vezanih uz razne geometrijske likove, tijela i oblike
- interpretaciju uobičajenih statističkih podataka
- konstrukciju i interpretaciju elementarnih grafova te sposobnost čitanja podataka s grafičkoga prikaza
- osnovno značenje formula i mogućnost njenih primjena.

Dakle, radi se o svim onim razumijevanjima i sposobnostima, osim formalne algebre, koje obično obuhvaća elementarna matematika.

Ovi su sadržaji specifični i potrebni gotovo svakome. Kako se oni ne mogu izravno učiti za svaku situaciju u kojoj bi mogli imati primjenu,

važno je istaknuti općenitost njihove primjene kako se učenici ne bi osjetili bespomoćni u okolnostima koje zahtijevaju primjenu tih sadržaja u novim situacijama.

Poželjni sadržaji prijenosa su i osnovni pojmovi i formule te vještine elementarne algebre. Ovoj skupini sadržaja treba pridružiti i poznavanje i poimanje određenih važnih činjenica i odnosa iz geometrije ravnine (planimetrija) i geometrije prostora (stereometrija). Naravno, svaka pretpostavka predstavlja jednu vezu u neposrednom lancu razvoja i u tom smislu sama svijest o njenoj vezi s prethodnim i narednim djelovanjem razvoja predstavlja vrlo važna poopćenja koja imaju široku primjenu ne samo u području demonstracijske geometrije, već i u drugim matematičkim disciplinama, kao i drugim područjima učenja. Takva važna poopćenja koja se odnose, primjerice, na Pitagorin poučak, zbroj kutova u trokutu, proporcionalnost stranica (strana) sličnih geometrijskih likova (tijela) i različite formule za površinu slučajevi su koji tu spadaju.

Navedeni sadržaji prijenosa mogu se grupirati u dvije osnovne skupine: (1) one koje treba znati i razumjeti i (2) one koje treba znati izvoditi.

Naredni sadržaji prijenosa širi su i apstraktniji. Radi se o funkcijama, dokazivanju, simbolima, operacijama, aproksimacijama te formuliranju i rješavanju problemskih zadataka.

Učenje matematike ima za cilj razvijanje svijesti o prirodi ovih sadržaja i njihovoj primjenljivosti u posebnim situacijama. Cilj je da se naglasi važnost razvijanja ovih širokih i apstraktnih pojmova u svrhu ostvarivanja njihovih prijenosnih mogućnosti.

Postoje i treći sadržaji prijenosa koji su dobili primjereno mjesto u radovima o matematičkom obrazovanju, ali znatno manje u samoj nastavi. Riječ je o stjecanju matematičkoga načina mišljenja, stjecanju mentalnih navika koje će matematičko obrazovanje činiti učinkovitijim u životu pojedinca.

Ovako široka interpretacija mogućih prijenosa vrijednosti učenja matematike obuhvaća vrijednosti kao što su:

- svijest o preciznosti i inzistiranje na preciznosti, što uključuje preciznu uporabu jezika i jasnoću te preciznost u iskazivanju definicija i tvrdnji
- lakoća i samopouzdanje u korištenju osnovnih vještina
- pouzdanje u samoga sebe i preuzimanje odgovornosti za informacije, postupke, i rezultate
- upornost pri suočavanju s teškoćama

- sposobnost razlikovanja jednostavne tvrdnje od zaključka
- navika provjeravanja postojanosti zaključka s poznatim ili danim uvjetima
- sposobnost razlikovanja razumnog argumenta od argumenta koji to nije i točnih od netočnih zaključaka
- sposobnost izgrađivanja postojanoga argumenta, poopćavanjem odnosa i primjenjivanja poopćenja, eliminiranja emocionalnih i predrasudnih činitelja iz argumenta
- svijest o prirodi aksiomatskog rasuđivanja, arbitrarnoj prirodi hipoteza i definicija te neizbježnoj ali uvjetnoj prirodi zaključka (Butler i Wren, 1960).

Sposobnost poopćavanja značenja, odnosa te procesa i primjenjivanje takvih poopćenja na nove situacije najvjerodostojnija je i najvitalnija vrsta prijenosa. To je ono što implicira izraz *funkcionalna* matematika. Ovaj proces prijenosa u osnovi je svake vrste funkcionalnog obrazovanja. Impliciran je u svakoj primjeni i interpretaciji bilo kojega pojma ili situacije. Naime, ispravna interpretacija osnova je svake racionalne primjene na problem geometrije ili drugu matematičku teoriju.

Suvremene teorije učenja ističu da je prijenos moguć, ali nije ni automatski ni neizbježan u svojim poželjnim formama. U tom procesu značenju pripada najvažnija uloga pa teorije poopćenja i uobličavanja znanja predstavljaju putove kojima se odvija pozitivan prijenos viših umnih funkcija. Teorija poopćavanja prihvaća važnost identičnih ili sličnih objekata koji su bili osnova jedne od ranijih teorija prijenosa. Ona, u biti, tvrdi da znanje i/ili postupak koji treba prenijeti ili razumno primijeniti na neku posebnu situaciju, ta situacija mora sadržavati objekte analogne onima koji se nalaze u danom znanju i/ili postupku. To, međutim, nije dovoljno. Te sličnosti moraju postojati, ali prije samoga značajnoga pozitivnoga prijenosa, *učenik ih mora uočiti*. Ta je sposobnost uočavanja sličnih objekata ono što čini prijenos značajnim i na višim razinama i karakterizira svako funkcionalno mišljenje te ga odvaja od jednostavne sposobnosti poistovjećivanja.

Problem nastave za prijenos svodi se na problem osposobljavanja učenika da uočavaju sličnosti između novih situacija i onih koje su već upoznali te da formiraju i razvijaju naviku uočavanja tih sličnosti.

Tipičan primjer nedostatka prijenosa nailazimo u nesposobnosti da se usvojena znanja i operacije algebre primjene. Tako, primjerice, učenik koji bez teškoća zna faktorizirati izraz  $a^2 - b^2$ , ponekad ne uspijeva uočiti da su izrazi  $x^2 - 9$  ili  $a^2 - 2ab + b^2 - 4$  istoga oblika i zato nije u stanju faktorizirati ih, tj. zapisati u obliku umnoška.

Sličnu poteškoću nailazimo i kod problemskih zadataka. Teškoća gotovo nikada nije u rješavanju jednadžbe do koje dovodi dani problemski zadatak, već u prevođenju zadanog problemskog zadatka u simbolički zapis. Do ovoga dolazimo najčešće zbog neuočavanja važnih sličnosti, apstraktnih ili poopćenih simbola, formula i jednadžbi formalizirane algebre s konkretnim i specifičnim uvjetima i odnosima danim u problemskom zadatku.

U nekim slučajevima sličnost i poistovjećivanje raznih situacija su jednostavne i lako uočljive. U takvim slučajevima prijenos je siguran. Međutim, u mnogim slučajevima sličnosti su skrivene drugim, lakše uočljivijim elementima. U takvim je slučajevima potrebna brižljiva analiza da se te sličnosti uoče. Učenici tu analizu neće moći izvoditi ako nisu sustavno osposobljavani za to. Učenicima mora biti naglašena važnost i značaj *navike* takvoga prilaza problemskomu zadatku. Oni trebaju formirati naviku svjesnoga otpočinjanja s traženjem objekata i odnosa u danom problemskom zadatku koji su slični odgovarajućim objektima i odnosima u drugim situacijama s kojima su se već susretali, kada god takve sličnosti nisu vidljive u samome početku. Ukoliko se takav postupak odgovorno slijedi, prijenos matematičkih znanja, odnosa i postupaka bit će olakšan i taj bitno matematički način mišljenja postat će stvarni funkcionalni pri nositelj učinkovitoga racionalnoga mišljenja uopće.

## Literatura

1. Butler, Ch. H. – Wren, F. L. (1960), *The Teaching of secondary Mathematics*. New York: The McGraw – Hill Book Company, Inc.
2. Glasser, W. (1999), *Nastavnik u kvalitetnoj školi*. Zagreb: Educa.
3. Glasser, W. (2001), *Svaki učenik može uspjeti*. Zagreb: Alinea.
4. Greene, B. (1996), *Nove paradigme za stvaranje kvalitetnih škola*. Zagreb: Alinea.
5. Gossen, D. – Anderson, J. (1996), *Stvaranje uvjeta za kvalitetne škole*. Zagreb: Alinea.
6. Kadum, V. (2004), *Učenje rješavanjem problemskih zadataka u nastavi (matematike)*. (u pripremi)
7. Kadum, V. (1988), *Vođenje učenika u rješavanju matematičkih zadataka*. U zborniku: Radovi Pedagoškog fakulteta u Rijeci OOUR znanstveno-nastavne djelatnosti u Puli, broj 8.
8. Polya, G. (1966), *Kako ću riješiti matematički zadatak*. Zagreb: Školska knjiga.
9. Polya, G. (1962), *Mathematical discovery*. New York – London: John WiWiley & sons, Inc.

10. Reeve, W. D. (1954), *Mathematics for the Secondary School*. New York: Henry Holt and Company, Inc.
11. Smolec, I. (2002), *Praksa i filozofija učenja*. Zagreb: Školske novine.

## SOME PARADIGMS FOR THE SUCCESSFUL TEACHING AND ORIENTING THE LEARNING OF MATHEMATICS

Vladimir Kadum

*This paper provides certain manners, rules and examples that can contribute to the success of both teaching mathematics and orienting the learning of mathematics.*

**Key words:** mathematics, teaching mathematics, successful teaching, learning process orientation, controlled learning, knowledge permanency, imparting knowledge