Primljen / Received: 20.12.2021.
Ispravljen / Corrected: 16.8.2022.
Prihvaćen / Accepted: 18.8.2022.
Dostupno online / Available online: 10.10.2023.

Dinamičko ponašanje prednapetih betonskih greda s obzirom na pokretna opterećenja

Autori:

[1]Prof.dr.sc. Xuansheng Cheng
chengxuansheng@gmail.com
Autor za korespondenciju

[2]Mr.sc. Guangyu Dong
donggylut@sina.com

[1]Mr.sc. Xianglei Wang
1241576537@qq.com

[1]Mr.sc. Liang Ma
1197920722@qq.com

[2]Mr.sc. Guoliang Li
1340523276@qq.com

[1] Tehnološko sveučilište Lanzhou, Kina
Zapadni centar za istraživanje ublažavanja rizika od prirodnih katastrofa u građevinarstvu Ministarstva obrazovanja
[2] Tehnološko sveučilište Lanzhou, Kina
Glavni laboratorij za prevenciju i ublažavanje katastrofa u građevinarstvu provincije Gansu

Izvorni znanstveni rad

Xuansheng Cheng, Guangyu Dong, Xianglei Wang, Liang Ma, Guoliang Li

Dinamičko ponašanje prednapetih betonskih greda s obzirom na pokretna opterećenja

U ovom se radu ispituje pravilo dinamičkog odziva prednapetih betonskih greda s metalnim i plastičnim valovitim cijevima različitih vrijednosti kompaktnosti injekcijske smjese kanala na pokretna konstantna koncentrirana opterećenja i pokretna jednostavna harmonijska opterećenja. Prednapete betonske grede s metalnim i plastičnim valovitim cijevima analizirane su metodom konačnih elemenata u slučajevima bez pukotina. Rezultati pokazuju da kompaktnost injekcijske smjese kanala i materijal za oblikovanje utječu na karakteristike prirodnih vibracija prednapetih betonskih greda. Pod istom kompaktnošću injekcijske smjese kanala, prednapete betonske grede s metalnim valovitim cijevima pokazuju veće frekvencije u usporedbi s onima koja imaju plastiče valovite cijevi. Dinamički progib prednapetih betonskih greda u sredini raspona smanjuje se s povećanjem kompaktnosti injekcijske smjese kanala, što je neovisno o materijalu za oblikovanje. Razlike u brzini i ubrzanju srednjeg raspona uzrokovane pokretnim opterećenjem između prednapetih betonskih greda metalnih i plastičnih valovitih cijevi su male. To pokazuje da materijal koji stvara pore ima mali učinak na brzinu čvora u sredini raspona i reakciju ubrzanja prednapetih betonskih greda.

Ključne riječi:
prednapeta betonska greda, valovite cijevi, kompaktnost injekcijske smjese, nelinearna analiza, pokretno opterećenje, dinamički odziv

Original research paper

Xuansheng Cheng, Guangyu Dong, Xianglei Wang, Liang Ma, Guoliang Li

Dynamic behaviour of prestressed concrete beams considering moving loads

Herein, the dynamic response rule of prestressed concrete beams with metal and plastic corrugated pipes with different duct grouting compactness values under moving constant concentrated loads and moving simple harmonic loads is studied. Prestressed concrete beams with metal and plastic corrugated pipes are analysed using the finite element method for the case of non-cracking. The results indicate that duct grouting compactness and forming material affect the natural vibration characteristics of prestressed concrete beams. Under identical duct grouting compactness, prestressed concrete beams with metal corrugated pipes exhibit higher frequencies compared with those with plastic corrugated pipes. The mid-span dynamic deflection of the prestressed concrete beams decreases with an increase in duct grouting compactness, which is independent of the forming material. The differences in the midspan speed and acceleration caused by the moving loads between the corrugated duct prestressed concrete beams made of metal and those made of plastic are small; this indicates that the pore-forming material has little effect on the midspan node speed and acceleration response of prestressed concrete beams.

Key words:
prestressed concrete beam, corrugated pipes, grouting compactness, nonlinear analysis, moving load, dynamic response

1. Uvod

Zahvaljujući kontinuiranom razvoju socijalne ekonomije i sve gušćoj raspodjeli urbanog stanovništva, trodimenzionalni promet postao je glavni smjer razvoja urbanog prometa. Prednapete betonske proste grede imaju široku primjenu u izgradnji srednjih i malih mostova zbog svoje jednostavne konstrukcije i praktične gradnje te su pomoću njih izgrađeni brojni prednapeti betonski mostovi. S povećanjem količine prometa, stalnim poboljšanjem standarda vezanih uz opterećenja uzrokovana vozilima i problemima kvalitete koji se neizbježno javljaju u gradnji prednapetih betonskih mostova, a koji utječu na ukupnu učinkovitost mostova, dinamički odziv prednapetih betonskih grednih mostova opsežno je proučavan.

Nekoliko se znanstvenika posvetilo proučavanju mehaničkih svojstava prostih greda od prednapetog betona. U brojnim teorijskim i eksperimentalnim istraživanjima dinamičkog odziva prednapetih betonskih greda postignuti su značajni rezultati. Li [1] je proučavao prisilne vibracije visećih mostova pod opterećenjem željezničkih vozila te vibracije lučnih mostova pod opterećenjem vozila. Zhang i sur. [2, 3] ispitivali su utjecaj neravnina trase, uspostavili model analize osovinskog sustava metodom modalne sinteze te analizirali cjelokupni proces prolaska brzih vlakova mostom. Yang i sur. [4] primijenili su dinamički izraz međudjelovanja kotač-konstrukcija prometnice-most izveden iz Hertzovog modela kontakta elastičnih tijela za utvrđivanje jednadžbe snage sustava i ispitivali dinamički odziv međudjelovanja kotač-konstrukcija prometnice-most. Hutton i sur. [5, 6] primijenili su metodu konačnih traka i tehnologiju modalne analize u brojnim terenskim ispitivanjima kako bi ispitali dinamički odziv jednostavno poduprtog grednog mosta pod djelovanjem dvoosnog opterećenja vozilima. Yang i Yin [7] predložili su metodu konačnih elemenata za učinkovito rješavanje međudjelovanja vozila i mosta. Li i sur. [8] proveli su ispitivanje opterećenja na mostu autoceste na Floridi i analizirali dinamički odziv mosta pod djelovanjem opterećenja vozila pomoću pojednostavljenog modela konačnih elemenata vozila i mosta. Li i sur. [9] ispitivali su parametre kao što su brzina kretanja opterećenja, težina grede i krutost kako bi analizirali odziv na vertikalne vibracije prednapete betonske proste grede pod djelovanjem proizvoljnih pokretnih opterećenja. Shen i sur. [10] proučavali su pravilo varijacije koeficijenta utjecaja grede, dinamičkog momenta savijanja i dinamičke posmične sile s brzinom kretanja opterećenja pod različitim kombinacijama opterećenja. Gao i Xu [11] upotrijebili su metodu konačnih elemenata za analizu dinamičkog odziva prostih greda od prednapetog betona na istodobna statička i sinusna opterećenja. Yang [12] kao predmet istraživanja upotrebljava gradsku prostu gredu od prednapetog betona malog raspona i ispituje utjecaj brzine kretanja opterećenja i neravnina površine mosta na dinamički odziv grede pomoću analize konačnih elemenata (FEA). Beskou [13] primijenili su metodu konačnih elemenata u vremenskoj domeni za numeričku simulaciju dinamičkog odziva fleksibilnog kolnika na vozilo u trodimenzionalnim uvjetima. Xu i sur. [14] otkrili su da su mjere za smanjenje vibracija imale bolji učinak smanjenja vibracija na željezničkim mostovima s prugom za teške terete. Atutis i sur. [15] analizirali su utjecaj progiba i širine pukotina prednapete betonske grede pod cikličkim opterećenjem nakon pojačanja prednapete grede polimerom ojačanim bazaltnim vlaknima. Shi i sur. [16] analizirali su fenomen rezonancije vozila i mosta dvoosovinskih vlakova koji prolaze preko prednapetih mostova jednakog raspona kako bi proučili zakon utjecaja rezonancije vozila na sustav vozila i mosta u uvjetima različitih brzina vozila i različitih raspona mostova.

Ukratko, u ispitivanju naknadno prednapetih betonskih konstrukcija dobiveni su brojni rezultati istraživanja. Međutim, većina istraživanja usmjerena je na nevezane i vezane prednapete betonske konstrukcije. Malo se istraživača [17, 18] bavilo razlikom u učinku između često primjenjivanih metalnih i plastičnih valovitih cijevi prednapetih betonskih konstrukcija u smislu nosivosti i uporabivosti i nije provedeno sustavno usporedno eksperimentalno istraživanje na njima. Osim toga, organizirana su i istraživanja [19-21] o učinku materijala koji stvara pore i kompaktnosti injekcijske smjese kanala na svojstva naknadno prednapetih betonskih konstrukcija. Međutim, u stvarnoj konstrukciji s naknadnim prednapinjanjem, nedostatak brtvljenja oko cijevi dovodi do curenja smjese za injektiranje, a injektiranje pod tlakom ne ispunjava razne zahtjeve i omjer vode i cementa, što uzrokuje skupljanje. Kao posljedica toga, većina injekcijskih smjesa kanala ne može zadovoljiti stvarne zahtjeve, što izravno utječe na sveukupnu učinkovitost mosta. Na nekim mostovima dolazi do pukotina i prekomjernog savijanja nakon 3 do 6 godina korištenja [22-25]. Kako bi se izbjegao taj problem, globalno su donesene relevantne tehničke specifikacije za injektiranje cijevi koje navode tehničke zahtjeve vezane za sirovinu materijala za injektiranje i sredstva za injektiranje za naknadno prednapeti betonski kanal, indeks učinkovitosti materijala za injektiranje pomiješanog s materijalom za injektiranje kanala i tehnologiju injektiranja te prihvatljive standarde kvalitete injektiranja. Dvije najčešće upotrebljavane specifikacije su europska specifikacija pod nazivom "Injektiranje prednapetih kabela" (BS EN 445/446/447:2007) [26] i američka specifikacija Instituta za naknadno prednapinjanje (engl. *Post-tensioning institute* - PTI) "Specifikacija za injektiranje naknadno prednapetih konstrukcija" (PTI M55.1) [27]. Ministarstvo željeznica Kine također je izradilo tehničke specifikacije pod nazivom "Tehničke specifikacije smjese za injektiranje kabela na naknadno prednapetom betonskom željezničkom nosaču" (TB/T 3192-2008) [28]. Kompaktnost injekcijske smjese kanala izravno je povezana s trajnošću, pouzdanošću i sigurnošću prednapete betonske konstrukcije. Stoga smo u ovom radu upotrijebili metodu konačnih elemenata za određivanje modela konačnih elemenata pod djelovanjem jednolikih pokretnih konstantnih opterećenja i jednolikih pokretnih harmonijskih opterećenja. Zatim su, na temelju numeričke analize i usporedbe, proučena

pravila utjecaja materijala koji stvara pore i kompaktnosti injekcijske smjese kanala na dinamički odziv prednapetih betonskih greda u uvjetima bez pukotina, čime su u okviru rada pružene preporuke za projektiranje, procjenu nosivosti i armiranje prednapetih betonskih konstrukcija, povećavajući time pouzdanost prednapetih betonskih konstrukcija.

2. Metodologija

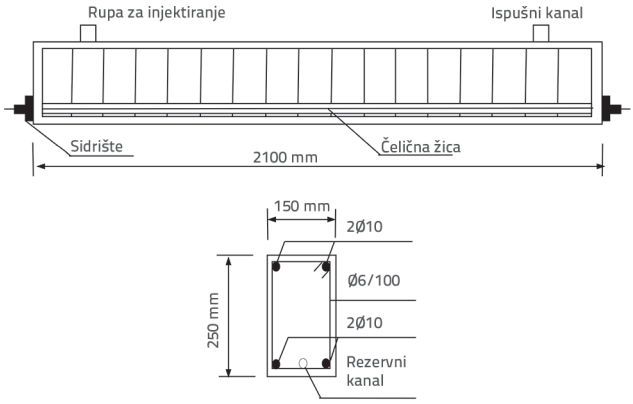
U ovom je radu izrađen model konačnih elemenata pod djelovanjem jednolikih pokretnih konstantnih i harmonijskih opterećenja kako bi se istražio dinamički odziv prednapetih betonskih greda. Najprije su izrađeni uzorci osam naknadno prednapetih betonskih prostih greda prema kompaktnosti injekcijske smjese (potpuno injektiranje, jednotrećinsko injektiranje, dvotrećinsko injektiranje i bez injektiranja) i vrsti valovitih cijevi (metalne valovite cijevi i plastične valovite cijevi). Zatim su prednapete betonske grede podvrgnute simetričnom opterećenju na tri jednake točke. Eksperimenti su izvedeni kako bi se kvantificirala vrijednost jednoliko pokretnih konstantnih opterećenja i jednoliko pokretnih harmonijskih opterećenja u FEA. Zatim su provedena ispitivanja karakteristika materijala kako bi se identificirali materijalni parametri prednapetih betonskih greda za modeliranje FEA. Na kraju je, prema parametrima ispitivanja svojstava materijala, izrađen model konačnih elemenata greda te je provedena dinamička analiza pod pokretnim opterećenjem. U ovom je radu postupak modeliranja FEA bio sljedeći:

- priprema uzoraka prednapete betonske grede za eksperiment
- kvantificiranje vrijednosti pokretnih opterećenja eksperimentima opterećenja prednapetih betonskih greda
- određivanje parametara materijala prednapetih betonskih greda pomoću ispitivanja svojstava materijala
- modeliranje metodom konačnih elemenata.

2.1. Priprema uzoraka prednapetih betonskih greda

Prednapete betonske grede obrađuju se metodom naknadnog napinjanja i imaju široku primjenu u gradnji mostova. Najprije se provodi ugradnja betona, a valovita cijev postavljena je na predviđeno mjesto. Kada čvrstoća betona dosegne zadanu vrijednost, slijed istezanja čeličnih žica se izvodi u serijama i fazama. Pogreška u duljini istezanja nije prelazila 6 % teoretske vrijednosti. Volumen injekcijske smjese primijenjen je za kontrolu kompaktnosti injekcijske smjese kako bi se postigle različite vrijednosti kompaktnosti smjese za injektiranje kanala.

U ovom je istraživanju primijenjeno osam naknadno prednapetih betonskih prostih greda. Prema kompaktnosti injekcijske smjese, metalna valovita cijev može se podijeliti na potpunu poroznost injekcijske smjese (PCB1-1), jednu trećinu poroznosti smjese (PCB1-2), dvije trećine poroznosti smjese (PCB1-3) i bez poroznosti smjese (PCB1-4), a plastična valovita cijev može se podijeliti na potpunu poroznost injekcijske smjese (PCB2-1), jednu trećinu poroznosti smjese (PCB2-2), dvije trećine poroznosti smjese (PCB2-3) i bez poroznosti smjese (PCB2-4). Dimenzije poprečnog presjeka su 150 × 250 mm, duljina grede je 2100 mm, a osni raspon 1800 mm. Prema ispitivanjima svojstava materijala, tlačna čvrstoća betona iznosila je 40,3 MPa. Za glavnu uzdužnu armaturu primijenjene su čelične šipke kvalitete HRB335 promjera 10 mm, za spone su primijenjene čelične šipke kvalitete HPB300 promjera 6 mm, a za prednapetu armaturu primijenjene su pocinčane čelične žice 1×7-2 nazivnog promjera od 6 mm. Sila naknadnog prednapinjanja prednapete betonske grede iznosila je 21 kN. Promjer naknadno prednapetog rezervnog kanala bio je 20 mm, što je činilo 0,84 % površine poprečnog presjeka grede. Dimenzije i armatura greda prikazani su na slici 1.



Slika 1. Dijagram dimenzija i armature ispitnih greda

2.2. Eksperiment opterećenja uzoraka prednapetih betonskih greda

Eksperimentalni podaci za opterećenja pri pojavi pukotina i slomu prednapetih betonskih greda pod simetričnim opterećenjem u tri jednake točke prikazani su u tablici 1. Pokretno opterećenje primijenjeno na prednapetu betonsku prostu gredu može se pojednostaviti pomoću dvije metode [29-31]:

- pokretno opterećenje je pojednostavljeno na jednolično pokretno konstantno koncentrirano opterećenje, masa pokretnog opterećenja je zanemarena, a poteškoće u rješavanju diferencijalne jednadžbe varijabilnog koeficijenta su izbjegnute
- uzimajući u obzir neravnine prednapete betonske grede, pokretno opterećenje je pojednostavljeno na jednoliko pokretnih harmonijskih opterećenja.

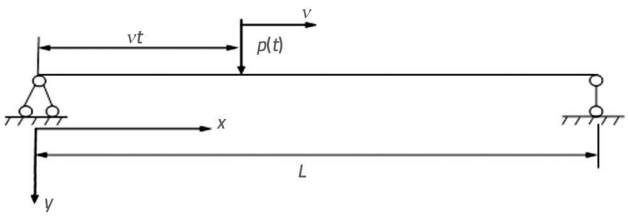
Za ispitivanje dinamičkog odziva prednapetih betonskih greda bez pojave pukotina, odabrane su vrijednosti pokretnog opterećenja na temelju podataka o opterećenju pri pojavi pukotina navedenih u tablici 1.

Minimalno opterećenje pri pojavi pukotina u tablici 1. iznosilo je 28,7 kN, a opterećenje bez pojave pukotina 20 kN. Stoga

Tablica 1. Izmjereni rezultati savijanja ispitne grede

Broj ispitne grede	Metalna valovita cijev				Plastična valovita cijev			
	PCB1-1	PCB1-2	PCB1-3	PCB1-4	PCB2-1	PCB2-2	PCB2-3	PCB2-4
Opterećenje pri pojavi pukotina P_{cr} [kN]	31,6	36,8	42,5	45,5	28,7	31,3	35,5	43,1
Pomak pri pojavi pukotina f_{cr} [mm]	1,61	1,92	2,15	2,35	1,41	1,52	1,84	2,06
Kritično opterećenje P_u [kN]	79,1	86,8	93,2	103,7	77,3	81,8	87,2	96,3
Granični pomak f_u [mm]	20,38	22,03	24,46	27,20	18,01	19,82	21,21	24,96

je pokretno konstantno koncentrirano opterećenje "P" bilo 20 kN; brzina kretanja tereta "v" bila je 0,3, 0,5 i 0,7 m/s; frekvencija pokretnog harmonijskog opterećenja "w" bila je 1,0 Hz; amplituda opterećenja bila je 0,3 P = 6 kN prema [30, 31], a pokretno harmonijsko opterećenje bilo je P(t) = Pcos(ωt) = 6cos(1,0t). Model pokretnog opterećenja prikazan je na slici 2.



Slika 2. Model pokretnog opterećenja

2.3. Ispitivanja karakteristika materijala

Parametri materijala naknadno prednapetih betonskih greda dobiveni su na temelju ispitivanja karakteristika materijala. Parametri čvrstoće betona greda dobiveni su ispitivanjem betonskih kocki na tlak (150 × 150 × 150 mm). Tijekom izlijevanja prednapetih betonskih greda određene su dvije skupine uzoraka. Svaka skupina uzoraka sadržavala je tri betonske kocke za ispitivanje. Uvjeti njegovanja bili su identični onima za prednapete betonske grede, a vrijeme njegovanja iznosilo je 28 dana. Neprednapete šipke svakog uzorka bile su jednake, a dvije neprednapete šipke različitih specifikacija u istoj seriji bile su rezervirane za ispitivanje mehaničkih svojstava, kao što je granica popuštanja. Mehanički parametri prednapetih čeličnih žica te metalnih i plastičnih valovitih cijevi imali su standardne vrijednosti, a ne one utvrđene ispitivanjem. Parametri materijala navedeni su u tablici 2. Ti su parametri primijenjeni za modeliranje i analizu.

2.4. Modeliranje FEA

2.4.1. Vrsta konačnih elemenata i konstitutivni model

Za beton je primijenjen konačni element Solid 65, a upotrebljava se u tlačnom kapacitetu koji je puno veći od vlačnog kapaciteta nejednolikih materijala. Za običnu čeličnu šipku i prednapetu armaturu primijenjen je konačni element Link 8 koji ima funkcije plastičnosti, puzanja, rotacije, velike deformacije i naprezanja. Za valovite cijevi primijenjen je konačni element Shell 181 koji predstavlja ljusku s četiri čvora prikladan za simulaciju tanke ljuske i slojevitih struktura. Učinak vezivanja između prednapete armature i okolnog betona simuliran je pomoću konačnog elementa Combin14.

Za beton je primijenjen Hongnestadov konstitutivni model. Za neprednapetu i prednapetu armaturu upotrjebljen je bilinearni konstitutivni model. Za materijale koji tvore pore metalnih valovitih cijevi i plastičnih valovitih cijevi primijenjen je konstitutivni model idealnog elastoplastičnog plastičnog materijala.

Tablica 2. Parametri naknadno prednapete betonske grede

	Granica popuštanja [MPa]	Modul elastičnosti [MPa]	Poissonov omjer	Gustoća [kN/m³]
Beton	40,3 (jednoosna tlačna čvrstoća)	$3,21 \times 10^4$	0,2	25
	3,1 (jednoosna vlačna čvrstoća)			
Šipke HRB335	335	$2,0 \times 10^5$	0,3	78,5
Šipke HPB300	300	$2,1 \times 10^5$	0,3	
Prednapeta čelična žica	1270	$2,05 \times 10^5$	0,3	77,8
Metalna valovita cijev	235	$2,05 \times 10^5$	0,3	78,5
Plastična valovita cijev	40	20	0,3	9,5

2.4.2. Simulacija sile prianjanja između prednapete armature i betona

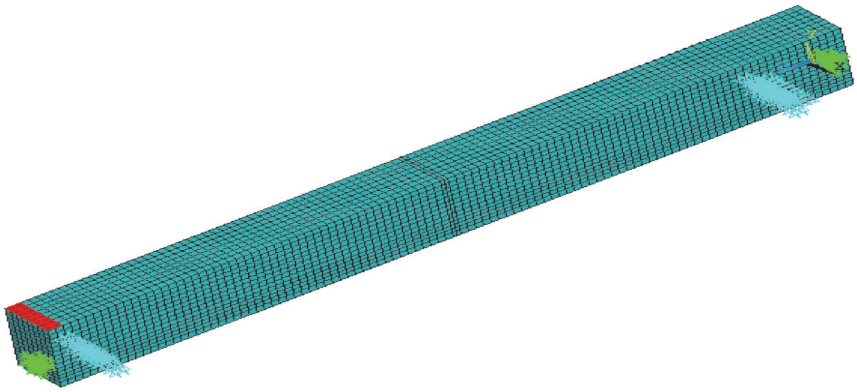
U procesu modeliranja simuliran je učinak prianjanja između prednapete armature i betona prilagođavanjem koeficijenta elastičnosti konačnog elementa Combin 14 te je simuliran utjecaj kvalitete injektiranja na grede. Model kompaktnosti injekcijske smjese za kanale bio je nevezan (bez poroznosti injekcijske smjese), s elastičnom konstantom od 10^8 (jednotrećinske poroznosti injekcijske smjese), konstantom elastičnosti od 10^{12} (dvotrećinske poroznosti injekcijske smjese) i vezivanjem (puna poroznost injekcijske smjese).

2.4.3. Granični uvjeti i primjena prednapianjanja

Zglobni rubni uvjeti primijenjeni su na dva kraja prednapete betonske grede, točnije, na lijevom kraju spriječene su translacije u smjerovima X, Y i Z, a na desnom kraju spriječene su translacije u smjerovima Y i Z, kako bi se simuliralo jednostavno poduprto stanje grede. U FEA, simulacija prednapinjanja primjenjuje metodu stvarne čvrstoće armature kojom se beton i prednapeta armatura dijele u različite konačne elemente i uzima se u obzir zajedničko djelovanje betona i prednapete armature. U ovom je radu primjena prednapinjanja izvedena metodom početnog napinjanja, odnosno same prednapete šipke imale su određenu početnu deformaciju.

2.4.4. Opis modela

Računalni program ANSYS primijenjen je za analizu metodom konačnih elemenata. Betonski elementi i čelične šipke modelirani su pomoću modela razdvajanja i metode spajanja čvorova, a mreža je podijeljena. Zapravo su betonski elementi i čelične šipke modelirani i spojeni zasebno. Greda je podijeljena na 106 presjeka po duljini, a za cijeli model primijenjeno je ukupno 11448 betonskih konačnih elemenata. U proračunu modela konačnih elemenata uzeta je u obzir vlastita težina prednapete betonske grede, prednapinjanje i opterećenje na gornji dio grede. Tip analize modela bio je strukturni, a tip analize strukture bio je promjenjivi. Model analize konačnih elemenata prikazan je na slici 3.



Slika 3. Model konačnih elemenata

2.5. Teorija izračuna vlastite frekvencije i načina vibracije

Metodom konačnih elemenata analizirane su dinamičke karakteristike jednostavno poduprtih prednapetih betonskih greda. U konačnici, ovaj problem rješava generalizirani problem vlastitih vrijednosti.

$$(K-\omega^2 M)\phi = 0 \tag{1}$$

pri čemu je **K** matrica krutosti, **M** je matrica mase, ω je vlastita frekvencija i ϕ je oblik vibracije.
Ako izraz (1) ima rješenje različito od nule, tada je

$$|K-\omega^2 M| = 0 \tag{2}$$

Izraz (2) predstavlja karakterističnu jednadžbu za konstrukciju. Metoda iteracije u potprostoru primijenjena je za određivanje oblika vibracija i vlastite frekvencije konstrukcije.

2.6. Teorija izračuna dinamičkog odziva FEA

Prednapeta betonska prosta greda diskretizirana je u skup konačnih elemenata, odabrani su odgovarajući oblici pomaka za svaki element te je izračunana kinetička energija i energija naprezanja svakog elementa i cijele konstrukcije. Zatim je jednadžba vibracije proste grede u generaliziranim koordinatama izvedena iz Hamiltonovog principa kada pokretno opterećenje prolazi jednoliko. Na kraju je primijenjena metoda izravne integracije ili metoda superpozicije modova. U ovom radu *newmark-beta* postupna integracijska metoda primijenjena je za diskretizaciju jednadžbe gibanja u vremenskoj domeni i njezinu transformaciju u drugu shemu za vrijeme. Metoda izravne integracije primijenjena je za postupno rješavanje jednadžbe gibanja u vremenskoj domeni.
Za proste prednapete betonske grede diskretizirana je samo prostorna domena. Stoga se interpolacija pomaka u elementu može izraziti na sljedeći način.

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{u}_e \tag{3}$$

pri čemu je **u** vektor pomaka bilo koje točke u jedinici, **N** je matrica funkcije oblika, a $\mathbf{u}_e$ je vektor pomaka čvora.
Komponente naprezanja svakog elementa dobivene su izrazom (3):

$$\varepsilon = \Delta\mathbf{u} = \Delta\mathbf{N}\mathbf{u}_e = \mathbf{B}\mathbf{u}_e \tag{4}$$

pri čemu je Δ matrica diferencijalnog operatora, a **B** je matrica jediničnih deformacija.

Prema izrazu (4), komponente naprezanja svakog elementa dobivaju se na sljedeći način.

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon = \mathbf{DBu}_e \tag{5}$$

pri čemu je **D** elastična matrica.
Deformacije i kinetičke energije elementa dobivene kombinacijom izraza (4) i (5) mogu se izraziti kao

$$\mathbf{V}_e = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T\boldsymbol{\sigma}dv = \frac{1}{2}\int_V \mathbf{u}_e^T\mathbf{B}^T\mathbf{DBu}_e dv = \frac{1}{2}\mathbf{u}_e^T\left(\int_V \mathbf{B}^T\mathbf{DB}dv\right)\mathbf{u}_e = \frac{1}{2}\mathbf{u}_e^T\mathbf{K}_e\mathbf{u}_e \tag{6}$$

$$\mathbf{T}_e = \frac{1}{2}\int_V \rho\dot{\mathbf{u}}^T\dot{\mathbf{u}}dv = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{u}}_e^T\left(\int_V \rho\mathbf{N}^T\mathbf{N}dv\right)\dot{\mathbf{u}}_e = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{u}}_e^T\mathbf{m}_e\dot{\mathbf{u}}_e \tag{7}$$

pri čemu je $\boldsymbol{K_e}$ matrica krutosti elementa, a $\boldsymbol{m_e}$ je matrica uniformne mase elementa.
Ako je volumna sila $\boldsymbol{q_e}$, ekvivalentna čvorna sila $\boldsymbol{R_e}$ može se dobiti primjenom principa virtualnog rada, koji se može izraziti kao

$$\mathrm{R}_e = \int_V \mathrm{N}^T\mathrm{q}_e dv \tag{8}$$

Ako je $\mathbf{q_e}$ sila viskoznog prigušenja, tada se sila viskoznog prigušenja i ekvivalentna čvorna sila iskazuju kako slijedi.

$$\mathbf{q}_{ef} = -\upsilon\dot{\mathbf{u}} = -\upsilon\mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}_e \tag{9}$$

$$\mathbf{R}_{ef} = -\int_V \upsilon\mathbf{N}^T\mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}_e dv = -\left(\int_V \upsilon\mathbf{N}^T\mathbf{N}dv\right)\dot{\mathbf{u}}_e = -\mathbf{C}_e\dot{\mathbf{u}}_e \tag{10}$$

pri čemu je ν koeficijent prigušenja, a $\boldsymbol{C_e}$ je matrica prigušenja.
Kombinacija izraza (6) do (10) transformira pomak čvora i vektor sile čvora u lokalnom koordinatnom sustavu u globalni koordinatni sustav pomoću matrice transformacije koordinata. Ukupna energija deformacije, ukupna kinetička energija i virtualni rad konstrukcije mogu se dobiti i izraziti kao zbroj ukupne energije deformacije, ukupne kinetičke energije i virtualnog rada, kako slijedi.

$$\mathbf{V} = \sum_{\mathbf{e}} \mathbf{V}_{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}\sum_e \mathbf{u}_e^T\mathbf{K}_e\mathbf{u}_e = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\left(\sum_e \mathbf{K}_e\right)\mathbf{u} = \frac{1}{2}\mathbf{u}^T\mathbf{Ku} \tag{11}$$

$$\mathbf{T} = \sum_{\mathbf{e}} \mathbf{T}_{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}\sum_e \dot{\mathbf{u}}_e^T m_e\dot{\mathbf{u}}_e = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{u}}^T\left(\sum_e m_e\right)\dot{\mathbf{u}} = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{u}}^T\mathbf{M}\dot{\mathbf{u}} \tag{12}$$

$$\delta\mathbf{W} = \sum_e \delta\mathbf{u}_e^T\left(\mathbf{R}_e + \mathbf{R}_{ef}\right) = \delta\mathbf{u}^T\left(\sum_e \mathbf{R}_e + \sum_e \mathbf{R}_{ef}\right) = \delta\mathbf{u}^T\left(\mathbf{R} + \mathbf{R}_f\right) \tag{13}$$

pri čemu je $\boldsymbol{V}$ ukupna energija deformacije, $\boldsymbol{T}$ je ukupna kinetička energija, δW je zbroj virtualnog rada vanjske sile i sile prigušenja, $\boldsymbol{K}$ je matrica krutosti konstrukcije, a $\boldsymbol{M}$ je matrica masa konstrukcije.
Iz izraza (10) dobivamo:

$$\mathbf{R}_f = \sum_e \mathbf{R}_{ef} = -\sum_e \mathbf{C}_e\dot{\mathbf{u}}_e = -\left(\sum_e \mathbf{C}_e\right)\dot{\mathbf{u}} = -\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} \tag{14}$$

pri čemu je **C** matrica prigušenja konstrukcije.

Zamjenom izraza (14) u izrazu (13), dobivamo:

$$\delta\mathbf{W} = \delta\mathbf{u}^{\mathbf{T}}(\mathbf{R}-\mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}) \tag{15}$$

Hamiltonov varijacijski princip daje:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial\dot{\mathbf{u}}_i} + \frac{\partial\mathbf{V}}{\partial\mathbf{u}_{\mathbf{i}}} = \mathbf{R}_i \quad \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n} \tag{16}$$

Zamjenom izraza (11), (12) i (15) u izrazu (16), jednadžba vibracija konstrukcije može se izraziti u globalnom koordinatnom sustavu, kako slijedi

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{Ku} = \mathbf{R} \tag{17}$$

Matrica prigušenja **C** u izrazu (17) obično se može dobiti pomoću linearne kombinacije matrica krutosti i mase, koja se može izračunati pomoću izraza (18):

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M}+\beta\mathbf{K} \tag{18}$$

pri čemu je α koeficijent prigušenja mase, a β je koeficijent prigušenja krutosti koji se može izraziti omjerom prigušenja bilo koja dva moda i odgovarajućih vlastitih frekvencija:

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{2\left(\xi_i\omega_j - \xi_j\omega_i\right)\omega_i\omega_j}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \\ \beta = \dfrac{2\left(\xi_j\omega_j - \xi_i\omega_i\right)}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \end{cases} \tag{19}$$

pri čemu je ω_i vlastita frekvencija prvog moda, ω_j je vlastita frekvencija drugog moda, a ξ_i i ξ_j su modalni omjeri prigušenja odziva koji se mogu odrediti eksperimentom ili iskustvom i općenito variraju u rasponu od 0 do 0,05 (s 0,05 za betonske konstrukcije).
Za rješenje izraza (17) može se primijeniti *newmark-beta* postupna integracijska metoda kako bi se dobilo

$$\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}_t + \Delta t\dot{\mathbf{u}}_t + \left[\left(\frac{1}{2} - \chi\right)\ddot{\mathbf{u}}_t + \chi\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\right]\Delta t^2 \tag{20}$$

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{u}}_t + \left[(1-\gamma)\ddot{\mathbf{u}}_t + \gamma\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}\right]\Delta t \tag{21}$$

U $\gamma \geq (1/2)$ i $\chi \geq (1/4)((1/2)+\gamma)^2$ integralna metoda je bezuvjetno stabilna integralna jednadžba. Primijenili smo $\gamma = (1/2)$ i $\chi = (1/4)$ te ih pretvorili u metodu prosječne akceleracije. Iz izraza (20) i (21) dobivamo:

$$\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{\gamma}{\chi\Delta t}\left(\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t\right) + \left(1 - \frac{\gamma}{\chi}\right)\mathbf{b}_t + \left(1 - \frac{\gamma}{2\chi}\right)\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_t \tag{22}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\chi\Delta t^2}\left(\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t\right) - \frac{1}{\chi\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_t - \left(\frac{1}{2} - \chi\right)\ddot{\mathbf{u}}_t \tag{23}$$

Pri $t + \Delta t$,

diferencijalna jednadžba vibracija je

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{R}_{t+\Delta t} \tag{24}$$

Zamjenom izraza (22) i izraza (23) u izrazu (24), dobivamo

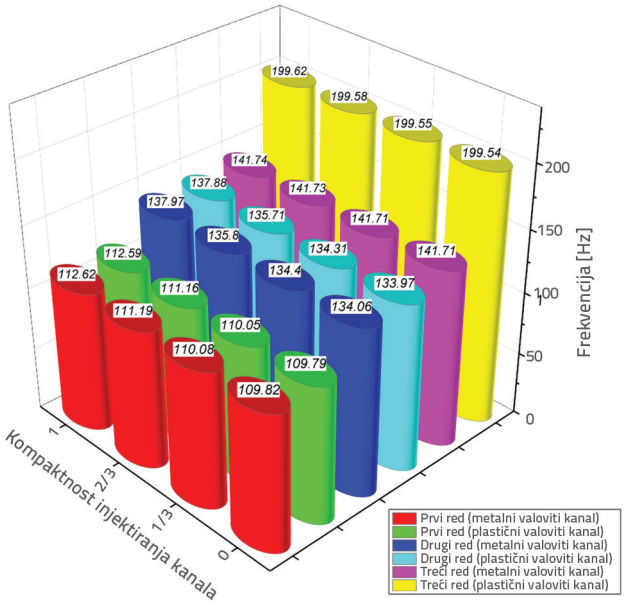
$$\begin{aligned}&\mathbf{K}\mathbf{u}_{t+\Delta t} + \frac{1}{\alpha\Delta t^2}\mathbf{u}_{t+\Delta t}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\chi\Delta t}\mathbf{u}_{t+\Delta t}\mathbf{C} = \mathbf{R}_{t+\Delta t}\\ &+\mathbf{M}\left[\frac{1}{\chi\Delta t^2}\mathbf{u}_t + \frac{1}{\chi\Delta t}\dot{\mathbf{u}}_t + \left(\frac{1}{2\chi}-1\right)\ddot{\mathbf{u}}_t\right]\\ &+\mathbf{C}\left[\frac{\gamma}{\chi\Delta t}\mathbf{u}_t + \left(\frac{\gamma}{\chi}-1\right)\dot{\mathbf{u}}_t + \left(\frac{\gamma}{2\chi}-1\right)\Delta t\ddot{\mathbf{u}}_t\right]\end{aligned} \tag{25}$$

Izraz (25) se može primijeniti za rješavanje $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$, a izrazi (22) i (23) mogu se primijeniti za rješavanje $\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$ i $\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t}$.

3. Analiza rezultata

3.1. Frekvencijska analiza prednapetih betonskih greda

U vibracijskoj modalnoj analizi naknadno prednapete betonske proste grede postoje brojni modovi vibracije. Međutim, karakteristike vibracija konstrukcije određene su modovima nižeg reda. Stoga su za prednapete betonske grede od rebrastih metalnih i plastičnih cijevi analizirani i izračunani modovi i frekvencije prva tri moda vibracija prednapetih betonskih greda s različitim vrijednostima kompaktnosti injekcijske smjese kanala. Slika 4. prikazuje frekvencije prva tri moda za dvije različite prednapete betonske grede pod različitim vrijednostima kompaktnosti injekcijske smjese za kanale.



Slika 4. Krivulja kompaktnosti i frekvencije injekcijske smjese

Kao što je prikazano na slici 4., kada je kompaktnost injekcijske smjese kanala bila ista, prednapete betonske grede s metalnim valovitim cijevima imale su veću frekvenciju nego grede s plastičnim valovitim cijevima. Materijali koji ispunjavaju pore slabo su utjecali na frekvencije prvog i drugog moda, ali su značajno utjecali na frekvenciju trećeg moda, što pokazuje da materijal koji ispunjava pore ima mali učinak na oblik nižeg moda prednapete betonske grede i ima značajan učinak na više modove.

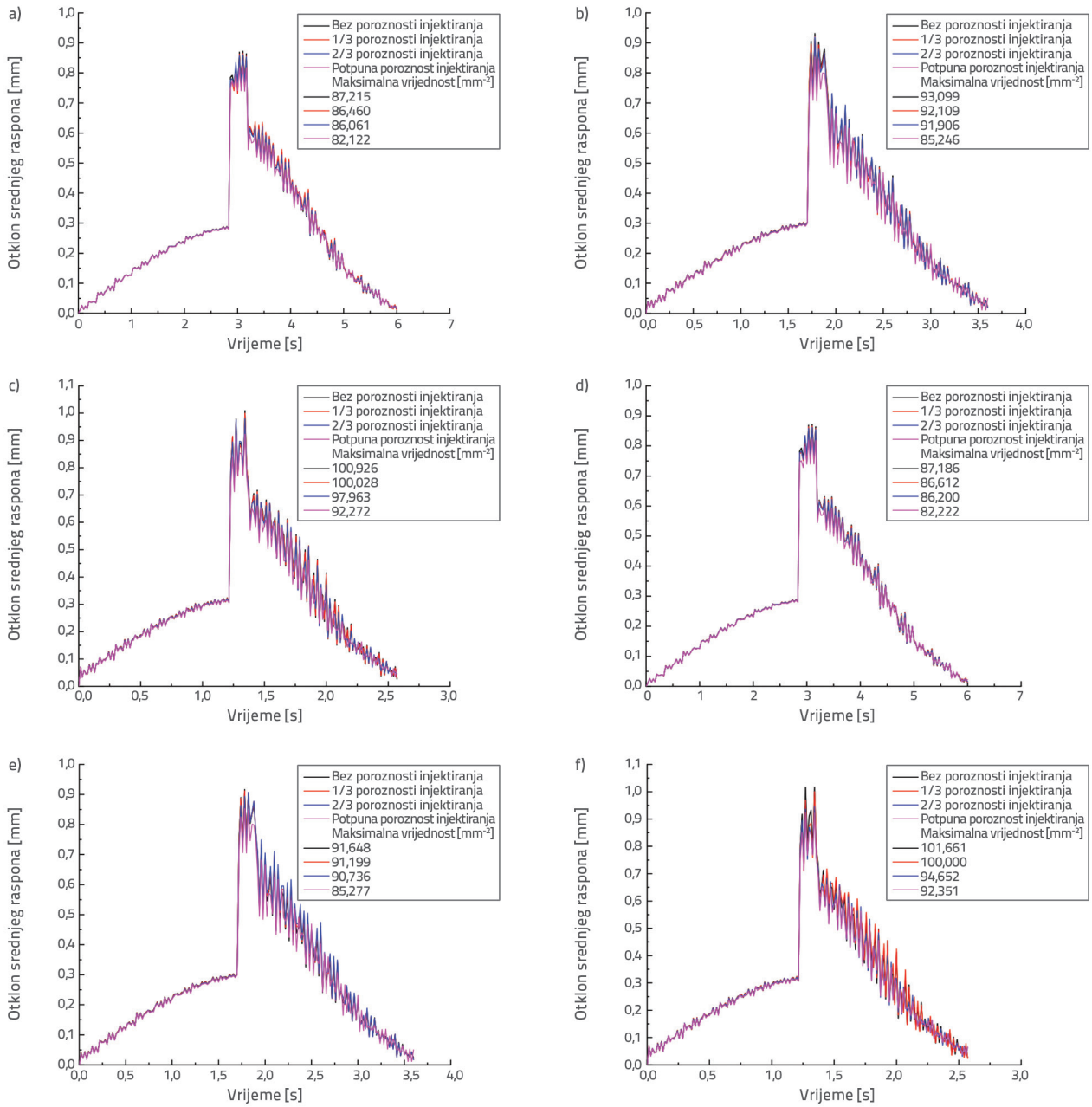
3.2. Vertikalni dinamički odziv prednapetih greda pod pokretnim konstantnim koncentriranim opterećenjem

Pokretno konstantno koncentrirano opterećenje (P = 20 kN) djelovalo je na gornji dio grede, a za proučavanje dinamičkog progiba i pravila odziva brzine u sredini raspona i ubrzanja prednapete betonske grede s različitim vrijednostima kompaktnosti injekcijske smjese metalnih i plastičnih valovitih cijevi bez pukotina, brzina gibanja opterećenja bila je 0,3, 0,5 i 0,7 m/s.

3.2.1. Dinamička krivulja progiba

Na slici 5. prikazana je usporedba dinamičkog progiba prednapetih betonskih greda s rebrastim cijevima pri konstantnom opterećenju tijekom različitih brzina. Najveći dinamički progibi svake grede prikazani su na slici 5.

Na slici 5. vidljivo je da je vršna vrijednost dinamičkog progiba proste grede u naknadno prednapetom betonu pokazala određeni odnos s brzinom pomicanja opterećenja i kompaktnošću injekcijske smjese kanala. Kada je pokretno konstantno opterećenje različitim brzinama prelazilo preko proste grede od prednapetog betona, najveći progib prednapete betonske grede zabilježen je blizu položaja sredine raspona grede. Pod djelovanjem konstantnog koncentriranog opterećenja, s povećanjem brzine kretanja opterećenja, povećavala se i vršna vrijednost odziva dinamičkog progiba središnjeg čvora grede. Pri istoj brzini kretanja opterećenja, potpunije injektiranje otvora grede od naknadno prednapetog betona odgovaralo je manjem dinamičkom progibu raspona grede. Vršna vrijednost dinamičkog progiba bez poroznosti injektiranja bila je najmanje 6 % manja od pune poroznosti injektiranja. Međutim, vršna vrijednost dinamičkog progiba nije se znatno razlikovala kada injektiranje nije bilo gusto. Pod uvjetom iste kompaktnosti injekcijske smjese kanala, dinamičke vrijednosti progiba u oba slučaja nisu pokazivale jasno pravilo. Međutim, razlika između metalnih i plastičnih valovitih cijevi nije bila značajna, što pokazuje da materijal kanala nema jasan utjecaj na dinamički progib u sredini raspona naknadno prednapete betonske grede.

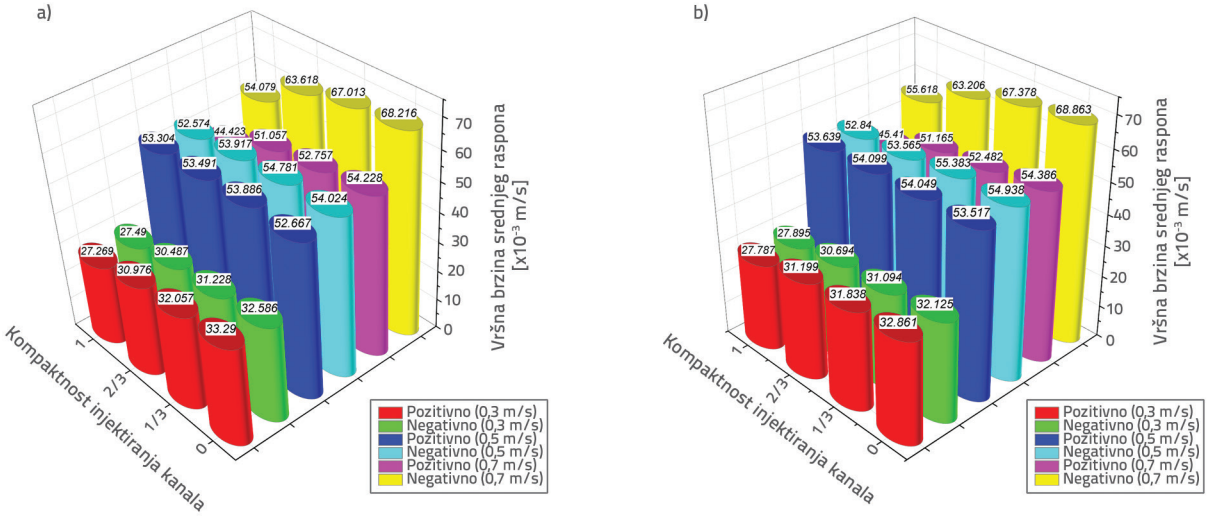


Slika 5. Dinamička krivulja progiba: a) prednapeta greda s metalnom valovitom cijevi *v* = 0,3 m/s; b) prednapeta greda s metalnom valovitom cijevi *v* = 0,5 m/s; c) prednapeta greda s metalnom valovitom cijevi *v* = 0,7 m/s; d) prednapeta greda s plastičnom valovitom cijevi *v* = 0,3 m/s; e) prednapeta greda s plastičnom valovitom cijevi *v* = 0,5 m/s; f) prednapeta greda s plastičnom valovitom cijevi *v* = 0,7 m/s

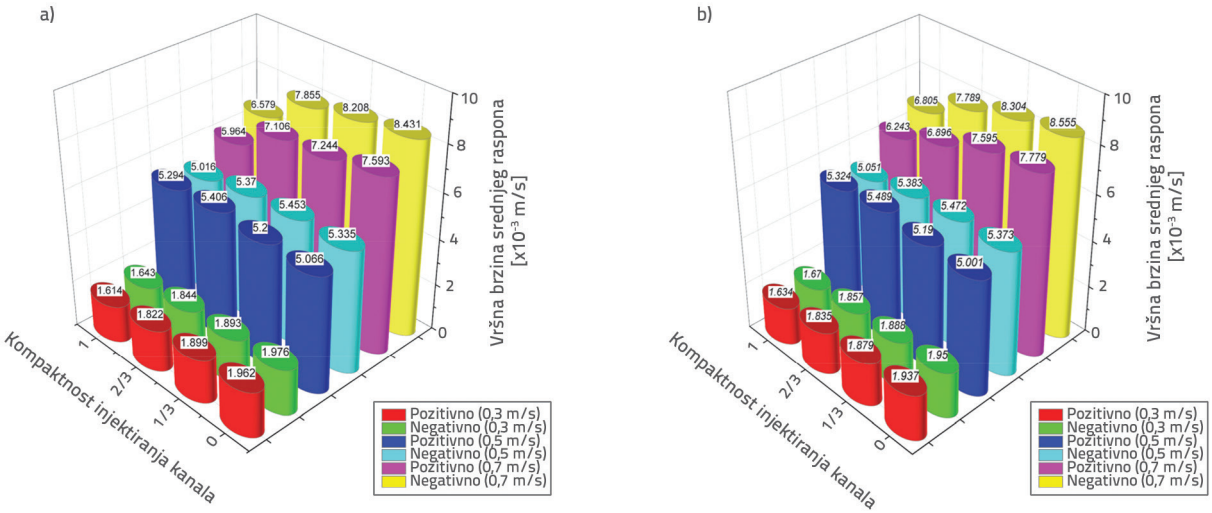
3.2.2. Brzina i ubrzanje srednjeg raspona

Vršne vrijednosti odziva brzine i ubrzanja na sredini raspona greda dobivene su iz rezultata konačnih elemenata, kao što je prikazano na slikama 6. i 7.

Na slikama 6. i 7. vidljivo je da s povećanjem brzine gibanja opterećenja rastu vršni odzivi brzine čvora i ubrzanja u rasponu grede. Pri brzini kretanja opterećenja od 0,3 i 0,7 m/s, s povećanjem kompaktnosti injekcijske smjese, vršna vrijednost brzine i ubrzanja na sredini raspona prednapetih betonskih greda valovitog metalnog i plastičnog kanala postupno se smanjivala, a amplituda smanjenja dosegla je 15 do 22 % odnosno 19 do 29 %. Kada je brzina kretanja opterećenja bila 0,5 m/s, s povećanjem kompaktnosti injekcijske smjese, vršna brzina i ubrzanje središnjeg čvora grede najprije su se povećali, a zatim smanjili (vrijednost smanjenja je bila niska). Rezultati pokazuju da je utjecaj različitih brzina na brzinu i ubrzanje čvora u sredini raspona greda s različitom kompaktnošću injektiranja pukotina različit, ali postupno raste s povećanjem brzine. Međutim, razlika u brzini i ubrzanju u sredini raspona uzrokovana



Slika 6. Vršna brzina u sredini raspona prednapete grede (×10⁻³ m/s): a) prednapeta greda s metalnom valovitom cijevi; b) prednapeta greda s plastičnom valovitom cijevi



Slika 7. Vršno ubrzanje u sredini raspona prednapete grede (m/s²): a) prednapeta greda s metalnom valovitom cijevi; b) prednapeta greda s plastičnom valovitom cijevi

pokretnim opterećenjima između prednapetih betonskih greda s valovitim metalnim i s plastičnim kanalom je mala, što pokazuje da materijal koji ispunjava pore ima mali učinak na brzinu čvora u sredini raspona i odziv ubrzanja prednapetih betonskih greda.

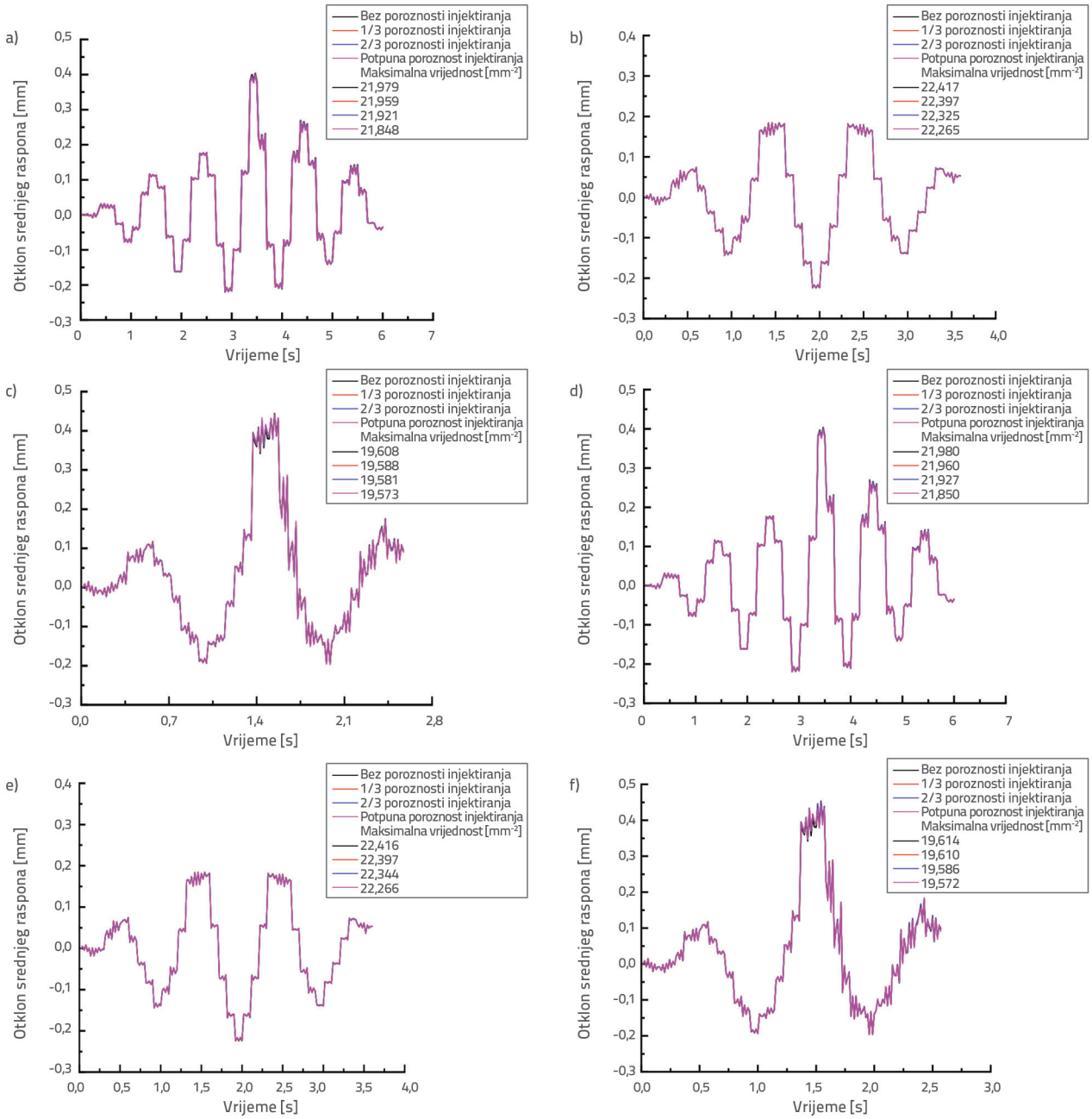
3.3. Vertikalni dinamički odziv prednapetih greda na pokretno jednostavno harmonijsko opterećenje

Ispitan je dinamički progib i odziv brzine i ubrzanja u sredini raspona prednapete betonske grede s različitim vrijednostima kompaktnosti injekcijske smjese metalnih i plastičnih valovitih cijevi u uvjetima bez pukotina. Jednostavno pokretno harmonijsko opterećenje primijenjeno na gornji dio grede pojednostavljeno je na jednoliko pokretno harmonijsko opterećenje P(t) = 6cos(1,0t). Frekvencija vibracija pokretnog opterećenja bila je f = 1,0 Hz, a brzina kretanja opterećenja je 0,3, 0,5 i 0,7 m/s.

3.3.1. Dinamički progib

Slika 8. uspoređuje dinamički progib prednapetih betonskih greda s valovitim cijevima izrađenim od dva različita materijala pod različitim brzinama pokretnog harmonijskog opterećenja. Najveći dinamički progib svake grede također je prikazan na slici 8.

Kao što je prikazano na slici 8., krivulje dinamičkog progiba u sredini raspona naknadno prednapetog betona proste grede s dvije valovite cijevi izrađene od dvaju materijala bile su slične sinusoidnim krivuljama koje vibriraju na određenoj frekvenciji. Kada je brzina kretanja opterećenja bila mala, visokofrekvencijska fluktuacija grede bila je potpuno razvijena, a fluktuacija je bila značajna. Nasuprot tome, kada je brzina pokretnog opterećenja bila velika, visokofrekvencijska fluktuacija grede nije se mogla u potpunosti razviti, a dinamička



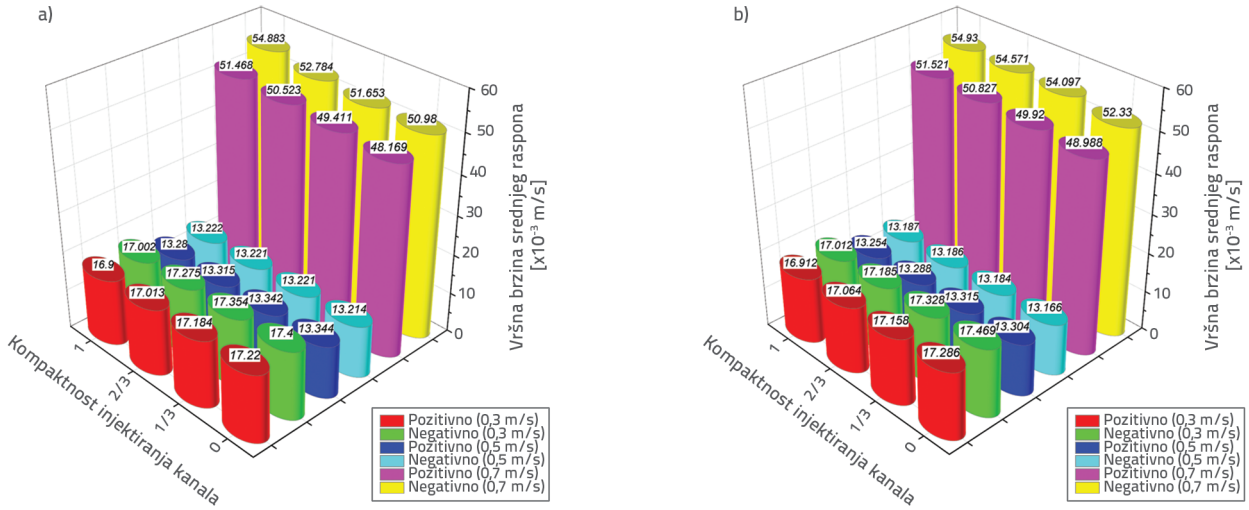
Slika 8. Dinamička krivulja progiba prednapete grede s plastičnom valovitom cijevi: a) prednapeta greda s metalnom valovitom cijevi *v* = 0,3 m/s; b) prednapeta greda s metalnom valovitom cijevi *v* = 0,5 m/s; c) prednapeta greda s metalnom valovitom cijevi *v* = 0,7 m/s; d) prednapeta greda s plastičnom valovitom cijevi *v* = 0,3 m/s; e) prednapeta greda s plastičnom valovitom cijevi *v* = 0,5 m/s; f) prednapeta greda s plastičnom valovitom cijevi *v* = 0,7 m/s

krivulja odziva na progib bila je relativno glatka. Pri određenoj brzini kretanja opterećenja, dinamički progib u sredini raspona prednapete betonske grede s metalnim i plastičnim valovitim kanalima smanjio se s povećanjem kompaktnosti injekcijske smjese kanala, što pokazuje da povećanje kompaktnosti smjese kanala može učinkovito poboljšati nosivost prednapete betonske grede i smanjiti dinamički odziv grede. Dinamički progib u sredini raspona prednapetih betonskih greda s metalnim valovitim cijevima bio je približno 0,02 % manji od prednapetih betonskih greda s plastičnim valovitim cijevima. Razlika u dinamičkom progibu uzrokovanom pokretnim harmonijskim opterećenjem između prednapetih betonskih greda s valovitim metalnim i plastičnim kanalima bila je mala, što pokazuje da materijal koji stvara pore nije imao značajan utjecaj na dinamički progib srednjeg raspona naknadno prednapetih betonskih greda.

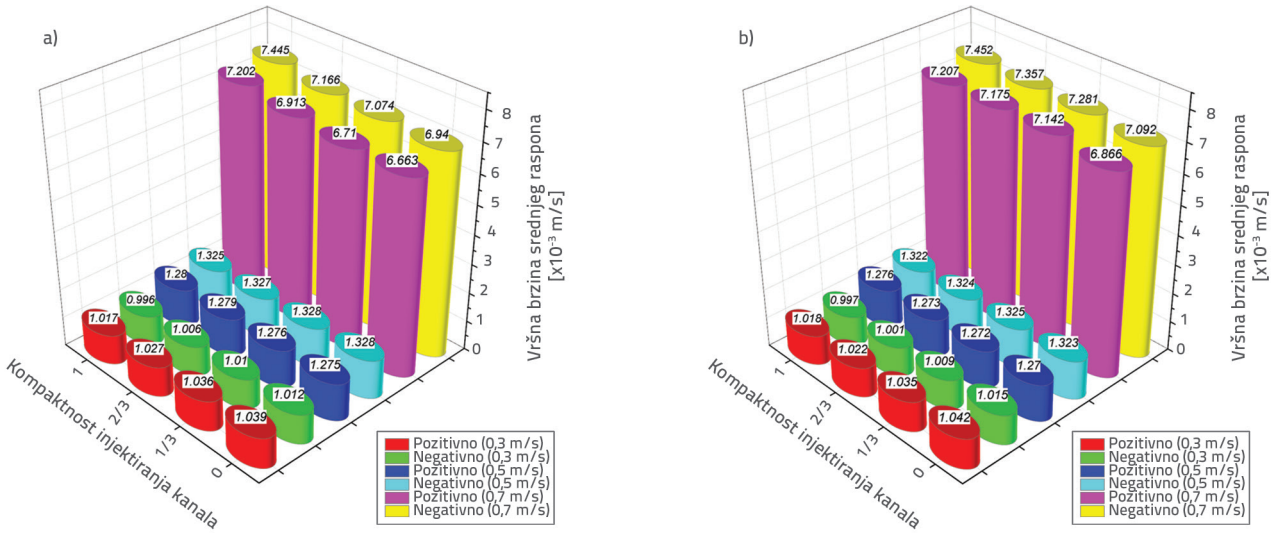
3.3.2. Brzina i ubrzanje u sredini raspona

Vršne vrijednosti odziva za brzinu i ubrzanje u sredini raspona prednapetih betonskih greda dobivene su iz rezultata konačnih elemenata, kao što je prikazano na slikama 9. i 10.

Slike 9. i 10. pokazuju da se s povećanjem brzine kretanja opterećenja, vršna brzina čvora u sredini raspona proste grede od prednapetog betona najprije smanjila, a zatim povećala, a tendencija vršnog ubrzanja se povećala. Pri brzini kretanja od 0,3 m/s, s povećanjem kompaktnosti injekcijske smjese kanala, smanjili su se brzina čvora u sredini raspona i vršni odziv na ubrzanje prednapetih betonskih greda s metalnim i plastičnim valovitim kanalima. Kada je brzina kretanja bila 0,5 m/s, s povećanjem kompaktnosti injekcijske smjese kanala, brzina čvora u sredini raspona i vršni odziv pozitivnog ubrzanja grede postupno su se smanjivali, dok su vršni odzivi negativne brzine i pozitivnog ubrzanja postupno rasli. Kada je brzina kretanja bila 0,7 m/s, s povećanjem kompaktnosti injekcijske smjese kanala, brzina čvora u sredini raspona i vršni odziv na ubrzanje grede postupno su se povećavali, što pokazuje da učinak kompaktnosti injekcijske smjese kanala na brzinu čvora u sredini raspona i odziv na ubrzanje prednapetih betonskih greda nisu isti pod djelovanjem jednostavnog harmonijskog opterećenja. Umjesto toga, povezan je s brzinom kretanja opterećenja, koja pokazuje monotoni trend unutar određenog raspona brzina. Razlika u brzini i ubrzanju u sredini raspona uzrokovana pokretnim harmonijskim opterećenjem između prednapetih betonskih greda s valovitim kanalom izrađenim od metala i plastike bila



Slika 9. Vršna brzina u sredini raspona prednapete grede (×10 $^{-3}$ m/s): a) prednapeta greda s metalnom valovitom cijevi; b) prednapeta greda s plastičnom valovitom cijevi



Slika 10. Vršno ubrzanje u sredini raspona prednapete grede (m/s^2): a) prednapeta greda s metalnom valovitom cijevi; b) prednapeta greda s plastičnom valovitom cijevi

je mala, što upućuje na to da materijal koji stvara pore ima mali učinak na brzinu čvora u sredini raspona i odziv ubrzanja prednapetih betonskih greda.

4. Zaključak

Kompaktnost injekcijske smjese kanala utjecala je na karakteristike prirodnih vibracija prednapete betonske gredne konstrukcije. S povećanjem kompaktnosti injekcijske smjese kanala smanjio se prirodni period vibracija konstrukcije, a povećala frekvencija prirodnih vibracija. Kada je kompaktnost injekcijske smjese kanala bila ista, prednapete betonske grede s metalnom valovitom cijevi pokazale su veću frekvenciju od prednapetih betonskih greda s plastičnom valovitom cijevi, što nije vidljivo u prvom i drugom modu, ali je vidljivo u trećem modu.

Pod djelovanjem pokretnog opterećenja, s povećanjem kompaktnosti injekcijske smjese kanala, dinamički progib prednapetih betonskih greda u sredini raspona smanjuje se u potpunosti. Kada je pokretno opterećenje prešlo preko položaja sredine raspona, vrhunac poprečnog dinamičkog progiba u sredini raspona pojavio se prije i poslije pomaka. Međutim, opterećenje nije uvijek promatrano u položaju na sredini raspona. Pod istim pokretnim opterećenjem, maksimalna dinamička vrijednost progiba pojavila se istodobnno, bez obzira na kompaktnost injekcijske smjese kanala i materijala za oblikovanje.

Pod djelovanjem pokretnog opterećenja, kada je brzina pomicanja opterećenja bila jednaka, brzina čvora srednjeg raspona i vršna akceleracija svake grede bili su gotovo identični. To pokazuje da materijal koji stvara pore ima mali učinak na brzinu čvora u sredini raspona i odziv ubrzanja prednapetih betonskih greda. Osim toga, učinci kompaktnosti injekcijske smjese kanala na brzinu čvora u sredini raspona i ubrzanje grede bili su nejednolični ili ujednačeni.

Zahvala

Autori zahvaljuju na financijskoj potpori Nacionalne zaklade za prirodne znanosti Kine (broj potpore: 51968045) i Znanstveno-tehnološkom projektu Ureda za nadzor kvalitete prometa u Zhejiangu (broj potpore: ZJ201602).

LITERATURA

[1] Li, G.H.: Stability and vibration of bridge structure, China Railway Press, Beijing, 2003.

[2] Zhang, N., Xia, H.: Dynamic analysis of railway bridge under high-speed trains, Computers & Structures, 83 (2005) 23, pp. 1891–1901, https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2005.02.014

[3] Xia, H., Zhang, N., Gao R. et al.: Experimental study on a railway bridge and high-speed trains, Engineering Mechanics, (2007) 9, pp. 166–172.

[4] Yang, H.Y., Zhang, H.L., Chen, Z.J. et al.: Finite element analysis of train-track-bridge interaction system considering the influence of creep, China Railway Science, 34 (2013) 6, pp. 13–20.

[5] Hutton, S.G., Cheung, Y.K.: Dynamic response of single span highway bridges, Earthquake Engineering & Structural Dynamics, 7 (1979) 6, pp. 543–554, https://doi.org/10.1002/eqe.4290070604

[6] Gupta, R.K.: Dynamic loading of highway bridges, Journal of the Engineering Mechanics Division, 106 (1980) 2, pp. 377–394, 10.1061/JMCEA3.0002590

[7] Yang, Y.B., Lin, B.H.: Vehicle-bridge interaction analysis by dynamic condensation method, Journal of Structural Engineering, 121 (1995) 11, pp. 1636–1643, 10.1061/(ASCE)0733-9445(1995)121:11(1636)

[8] Li, H.Y., Wekezer, J., Kwasniewski., L.: Dynamic response of a highway bridge subjected to moving vehicles, Journal of Bridge Engineering, 13 (2008) 5, pp. 439–448, 10.1061/(ASCE)1084-0702(2008)13:5(439)

[9] Li, X.Z., Zhang, Z.J., Liu, Q.M.: Vertical dynamic response analysis of a simply supported beam bridge under successive moving loads, Journal of Vibration and Shock, 31 (2012) 20, pp. 137–142, 10.13465/j.cnki.jvs.2012.20.026

[10] Sheng, G.G., Li, C.X., Zhao, B.: Dynamic analysis of simple-supported beam subjected to moving vehicles, Engineering Mechanics, (2006) 12, pp. 154–158.

[11] Gao, Y.D., Xu, H.T., Liu, Q.L.: The finite element method of dynamic analysis on the structure of simultaneous effect of static load, Journal of Inner Mongolia University of Science and Technology, 30 (2011) 3, pp. 237–240, 10.16559/j.cnki.2095-2295.2011.03.004

[12] Yang, X.: Analysis of dynamic response and impact coefficient of beam bridge under vehicle load, 2016, Doctoral Dissertation, Chongqing Jiaotong University, Chongqing, China.

[13] Beskou, N.D., Tsinopoulos, S.V., Theodorakopoulos, D.D.: Dynamic elastic analysis of 3-D flexible pavements under moving vehicles: A unified FEM treatment, Soil Dynamics and Earthquake Engineering, (2017) 82, pp. 63–72, https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2015.11.013

[14] Xu, J.Y., Hu J.J., Zhang, C. et al.: Vibration load identification and vibration control of bridge under heavy-haul train, Journal of Huazhong University of Science and Technology (Natural Science Edition), (2018) 2, pp. 46–50, 10.13245/j.hust.180209

[15] Atutis, E., Valivonis, J., Atutis, M.: Experimental study of concrete beams prestressed with basalt fiber reinforced polymers under cyclic load, Composite Structures, 183 (2018), pp. 389–396, https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2017.03.106

[16] Shi, J., Yao, Z.D., Wang, Y.J.: Resonance responses of vehicle during a two-axle train passing through sequential equal-span bridges sequential equal-span bridges, Journal of Vibration and Shock, 38(2019)5, pp. 237–258, 10.13465/j.cnki.jvs.2019.05.034

[17] Cheng, H., Li, J., Lu, H.L.: Research on calculation method of bending capacity of corroded prestressed concrete Girder Bridges, World Bridges, (2015)43(01), pp. 65–68.

[18] Zhang, D.L.: Detection and research on prestressed friction Loss of corrugated duct, 2008, Masteral Dissertation, China Academy of Building Research, Beijing, China.

[19] An, L., Ji, X.B.: Research status of influence of grouting cavity on performance of post-tensioned prestressed structures, Proceedings of the Chinese Conference on Reinforcement and Evaluation of existing Bridges, (2008), pp. 67–71, https://doi.org/10.1016/S0045-7949(00)00150-4

[20] Pillai, R.G., Hueste, M.D., Gardoni, P., et al.: Time-variant service reliability of post-tensioned, segmental, concrete bridges exposed to corrosive environments, Engineering Structures, (2010) 32 (9), pp. 2596–2605, https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2010.04.032

[21] B.H., Fu, Z.Q.: Analysis of Chinese bridge collapse accident causes in recent years, China Civil Engineering Journal, 43 (2010) S1, pp. 495–498, 10.15951/j.tmgcxb.2010.s1.010

[22] Xu, H.T., Guo, G.Z., Pu, H.L. et al.: Causes and lessons of bridge accidents in China in recent years, China Safety Science Journal, (2007) 11, pp. 90–95, 10.16265/j.cnki.issn1003-3033.2007.11.018

[23] Zhu, E.Y.: The prestressed structure of modern bridge, Tsinghua University Press, Beijing, 2012.

[24] Gao, Y.: Current status of application and research of duct grouting for prestressed concrete structure, World Bridges, (2011) 3, pp. 65–68.

[25] BS EN 445/446/447:2007.: Grout for prestressing tendons, British Standards Institution, British, 2007.

[26] PTI M55.1.: Specification for Grouting of Post-Tensioned Structures, Post-tensioning institute, United States, 2019.

[27] TB/T 3192-2008.: Technical specification of cable grouts on post-prestressed concrete railway girder, Ministry of Railways of the People's Republic of China, 2008.

[28] Zhao, J.B.: Experimental research on dynamic of pavement structure model in vehicle and pavement system, 2013, Master Dissertation, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang, China.

[29] Zhang, D., Li, X.Z.: Analytical solution and application of vertical dynamic response of simply supported beams under the action of moving simple harmonic load, Chinese Journal of Applied Mechanics, 31 (2014) 1, pp. 144–149.

[30] Luo, J.: Determination of highway traffic load parameters of indoor test, Low Temperature Architecture Technology, 37 (2015) 3, pp. 121–123, 10.13905/j.cnki.dwjz.2015.03.046€