Matka 31 (2022./2023.) br. 123

MATEMAGIČAR

Petar Mladinić, Zagreb

PROBLEM GOLUBA I TAKSISTA

Stari i mladi matemagičari često u rješavanju problema primjenjuju različite pristupe. Ovdje ćemo ilustrirati nekoliko problema koje su riješili stari matemagičari, a danas ih mogu riješiti i vrlo mladi prema sadržajima i postupcima iz školske matematike.

Starogrčki matemagičari Euklid i Pitagora riješili su crtanje i mjerenje kružnice kao skupa točaka koje su u ravnini jednako udaljene od jedne točke koja se zove *središte*. Na drugi je način Lamé objasnio/zadao tu istu definiciju pomoću apsolutne vrijednosti udaljenosti točaka. Nastavak te ideje poopćio je 2003. godine Johan Gielis koji je uočio da se njegovom formulom (u kojoj su kao posebni oblici Pitagorina i Laméova formula za udaljenost točaka) mogu definirati svi likovi u ravnini. To je povezao s biljkama odnosno živim (mikro i makro) organizmima.

Belgijska matematičarka Frédérique Papy (1921. – 2005.) u dijelu svojega projekta iz 1969. godine uspješno je dokazivala (i dokazala!) da i mala djeca mogu usvajati „visoku" matematiku ako im se, sukladno uzrastu, snizi razina matematičke apstrakcije. Poučavala je djecu u dobi od 8 do 9 godina, između ostalog, i *taxicab* geometriju.

U knjizi *Les enfants et la mathematique* objavila je svoje zadatke i uratke djece u dobi od 8 do 9 godina.

U drugoj i trećoj knjizi u 18. poglavljima *Taximétrie* ilustrirala je kako djeca toga uzrasta vrlo uspješno rješavaju probleme ove geometrije. Učenicima je prezentirala priču o dječaku Nabuchodonosoru koji je posjetio svoga strica u New Yorku. Učenici su imali na raspolaganju list papira s kvadratnom mrežom kao „idealnim" planom/kartom New Yorka. O tome u nastavku teksta!

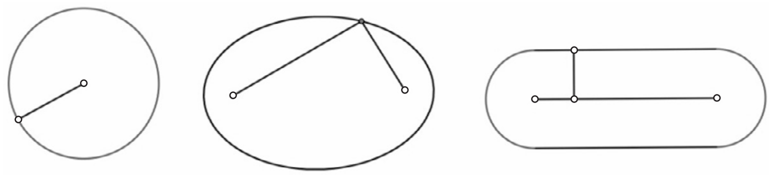
Uvod

Na početku razmotrimo sljedeće probleme.

U Matki broj 20. u lipnju godine 1997. na naslovnici je nacrtana koza koja pase travu. Evo naslovnice te Matke.

Gladnu kozu vežemo užetom za klin učvršćen na ravnoj travnatoj livadi. Nakon određenog vremena koza pojede svu njoj dostupnu travu. Koji oblik ima pojedeni dio trave? Koji bi oblik imao dio livade ako bismo kozu privezali klizećom alkom za konop koji je dulji od međusobne udaljenosti klinova za koje je pričvršćen?

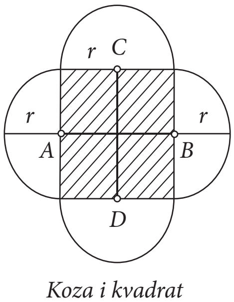
Kojeg je oblika popaseni dio livade ako je sajla razapeta, a koza privezana za sajlu užetom i klizećom alkom?



Koza i travnjak

U prvom slučaju područje je omeđeno kružnicom, u drugom elipsom, a u trećem je pravokutnik s polukružnicama na krajevima.

U časopisu Matka broj 20 u članku *Koza i kvadrat* razmatralo se ovakve probleme.



Koza i kvadrat

Ako u *A, B, C* i *D* zabodete kolčiće, a između *A* i *B*, te *C* i *D* razapnete užad i kozu privežete s dva užeta od kojih jedno slobodno klizi od *A* do *B*, a drugo od *C* do *D*, onda koza može popasti zajednički dio tih dvaju likova, tj. kvadrat stranice $2r$.

Povijesno gledano, geometriju u kojoj „radi” taksist prvi je izložio njemački matematičar Hermann Minkowski (1865. – 1909.). Austrijski matematičar Karl Menger (1902. – 1985.) godine je 1952., u pokušaju da je približi nematematičarima, prvi za nju uporabio naziv *taxicab geometry* (*geometrija taksija*), odnosno *Manhattan geometry* (zbog ulica u New Yorku koje su međusobno usporedne ili okomite).

Matematičar Eugene Krause napisao je u knjižici *Taxicab Geometry*:

Taxicab geometrija zadovoljava tri uvjeta:

(1) ima aksiomatsku strukturu,

(2) ima značajne primjene i

(3) razumljiva je svakome tko poznaje elementarne činjenice euklidske geometrije

Zbog toga je taxicab geometrija dostupna učenicima. Ona je, zajedno sa svim novostima, bogat izvor originalnih istraživačkih problema koji su u dosegu učeničkih mogućnosti.

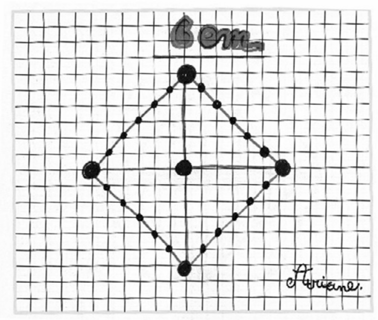
Primjeri radova učenika

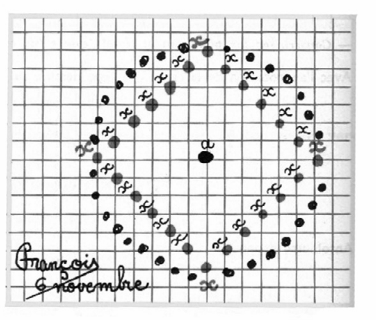
Učenicima je prezentirana priča o dječaku Nabuchodonosoru koji je posjetio svojeg strica u New Yorku. Učenici su imali na raspolaganju list papira s kvadratnom mrežom kao „idealnim” planom/kartom New Yorka.

Zadatak 1. Zadana je točka na karti New Yorka. Označite točke koje su od te točke udaljene za 6 jedinica.

Na slikama su prikazana rješenja toga zadataka na način na koji su ga riješili Ariane i François 1969. godine. Vidimo da mladi matemagičari na različite načine vizualiziraju rješavanje postavljenog zadatka primjenom naučene matematike.

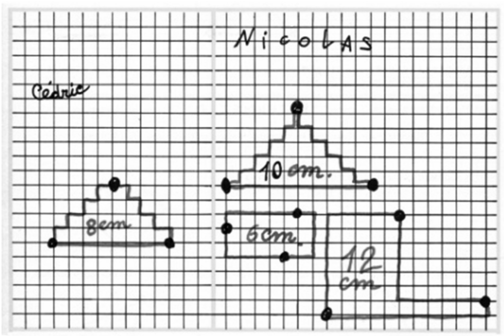
Na slici lijevo je Arianino, a desno je Françoisovo rješenje



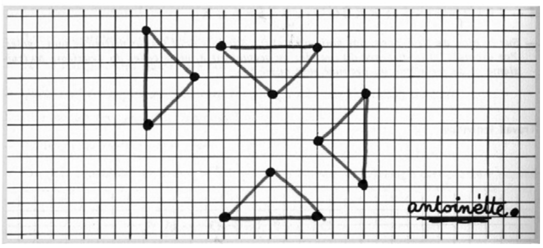


Zadatak 2. Na karti New Yorka označite tri točke čije su međusobne udaljenosti jednake.

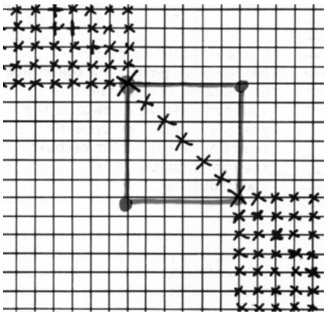
Cédric je nacrtao trokut sa stranicama duljine 8 cm, a Nicolas tri jednakostranična trokuta sa stranicama duljina 6 cm, 10 cm i 12 cm.



Antoinette je ovako nacrtala jednakostranične trokute.



Simetralu dužine ovako je nacrtao François Sanchez.



Zadatci.

Zadatak 3. Zamislite da na taksi-stajalištu u New Yorku taksist čeka putnika. Na ramenu mu sjedi golub.

a) U kvadratnoj mreži nacrtajte granice njegovih triju zona prema kojima naplaćuje vožnju. Svaka je zona udaljena od stajališta 3 kvadratne jedinice.

b) Na istoj karti nacrtajte zone za goluba.

Uputa. Taksist može voziti samo ulicama, a golub može slobodno letjeti.

Zadatak 4. U pravokutnom koordinatnom sustavu zadane su točke A, B, C i D. Nacrtajte i odredite golublju i taksistovu međusobnu udaljenost točaka A, B, C i D ako su koordinate točaka $A(1, 1)$, $B(5, 0)$, $C(0, 3)$, $D(3, 4)$.

Uputa. Golublja se udaljenost računa pomoću formule za udaljenost

$$\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2},$$

a taksistova pomoću formule $\left|x_2-x_1\right|+\left|y_2-y_1\right|$.

Zadatak 5. Nacrtajte skup točaka T u koordinatnoj ravnini za koju vrijedi da je golublja i taksistova udaljenost jednaka 5 koordinatnih jedinica od ishodišta $O(0, 0)$.

Uputa. Golublje kretanje crta se pomoću šestara, a taksistovo pomoću gibanja paralelno s koordinatnim osima.

Napomena. Jednom knjigom iz Matkine biblioteke nagradit ćemo onoga tko nam pošalje nacrtano rješenje zadatka.