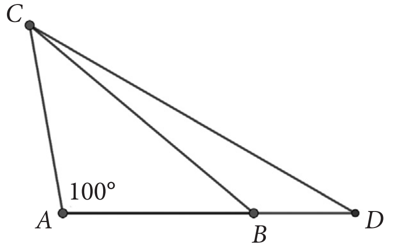
TROKUT, ČETVEROKUT I KRUG

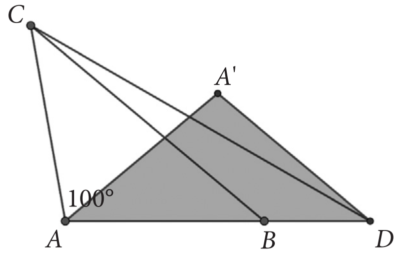
Zlatko Lobor, Zagreb

Primjer 1. Odredimo veličinu kuta $\angle CDB$ ako je $|AB| = |AC|$ i $|AD| = |BC|$.

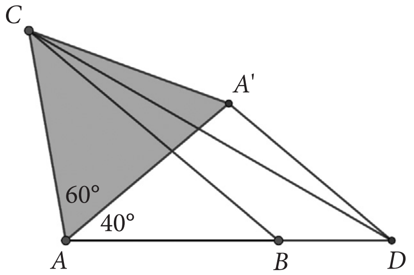


Rješenje: Trokut *ABC* je jednakokračan pa su kutovi $\angle CBA$ i $\angle ACB$ nasuprot krakova sukladni, a veličina im je 40°.

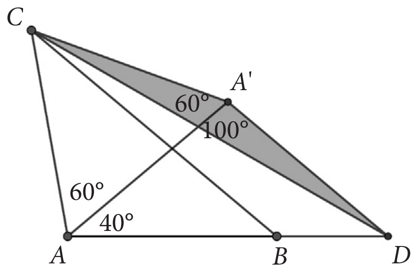
Zarotirajmo trokut *ABC* tako da stranicu $\overline{BC}$ dovedemo u položaj dužine $\overline{AD}$, a točku *A* u položaj točke *A*'.



Spojimo li točke *C* i *A*', dobivamo trokut *AA*'*C* kojemu su dvije stranice $\overline{AC}$ i $\overline{AA'}$ jednake duljine, a kut između njih je $|\angle A'AC| = |\angle BAC| - |\angle BAA'| = 100° - 40° = 60°$. To onda znači da je trokut *AA'C* jednakostraničan pa da je $|AC| = |AA'| = |A'C|$.



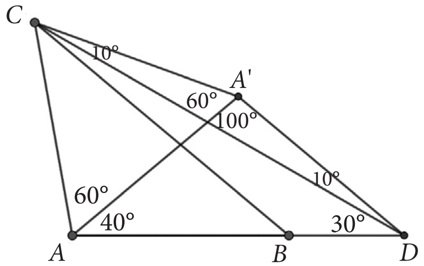
Uočimo da je i trokut *CDA'* jednakokračan jer je $|DA'| = |A'C|$. Pri tome je kut $|\angle CA'D| = |\angle CA'A| + |\angle AA'D| = 60° + 100° = 160°$.



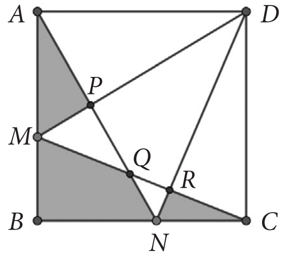
Kutovi uz osnovicu $\angle DCA'$ i $\angle A'DC$ u jednakokračnom trokutu CDA' su sukladni, a veličina im je 10°.

Sada se konačno može odrediti veličina traženoga kuta $\angle CDB$.

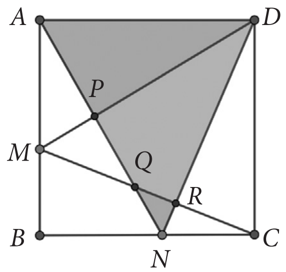
Vrijedi: $|\angle CDB| = |\angle A'DA| - |\angle A'DC| = 40° - 10° = 30°$



Primjer 2. Zadan je kvadrat $ABCD$. Na stranici $\overline{AB}$ istaknuta je točka M, a na stranici $\overline{BC}$ točka N. Točka M spojena je s vrhovima C i D, a točka N s vrhovima A i D. Točka P presjek je dužina $\overline{AN}$ i $\overline{MD}$, točka Q presjek je dužina $\overline{AN}$ i $\overline{MC}$, a točka R presjek je dužina $\overline{MC}$ i $\overline{ND}$. Ako je površina četverokuta $PQRD$ jednaka 1, kolika je površina osjenčanog dijela kvadrata $ABCD$?



Rješenje: Promotrimo sliku na kojoj je istaknut trokut AND.



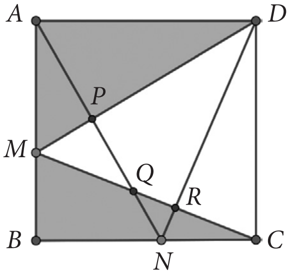
Možemo primijetiti da za površinu četverokuta *PQRD* vrijedi:

$$P_{PQRD} = P_{AND} - P_{APD} - P_{QNR}.$$

Pri tome je površina trokuta *AND* jednaka polovini površine kvadrata *ABCD*, tj. $P_{AND} = \frac{|AD| \cdot |AB|}{2} = \frac{P_{ABCD}}{2}$.

Stoga se može pisati $P_{PQRD} = \frac{P_{ABCD}}{2} - P_{APD} - P_{QNR}$. (1)

Promotrimo sada sljedeću sliku.



Označimo li s *P* traženu površinu osjenčanoga dijela kvadrata, vrijedi:

$$P = P_{AMP} + P_{MBNQ} + P_{NCR}, \text{ tj. } P = P_{AMD} + P_{MBC} - P_{APD} - P_{QNR}.$$

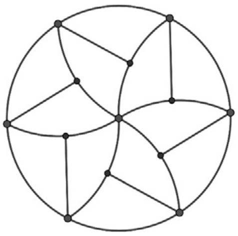
Uočimo da je

$$P_{AMD} + P_{MBC} = \frac{|AD| \cdot |AM|}{2} + \frac{|AD| \cdot |MB|}{2} = \frac{|AD| \cdot (|AM| + |MB|)}{2} = \frac{|AD| \cdot |AB|}{2} = \frac{P_{ABCD}}{2}.$$

Slijedi $P = \frac{P_{ABCD}}{2} - P_{APD} - P_{QNR}$. (2)

Usporedimo li jednakosti (1) i (2), dobivamo $P = \frac{P_{ABCD}}{2} - P_{APD} - P_{QNR} = P_{PQRD}$.

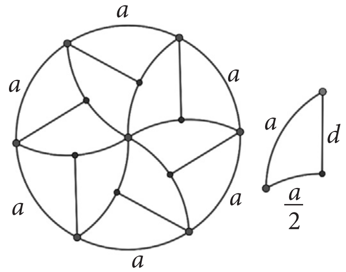
To znači da je $P = P_{PQRD} = 1$.



Primjer 3. Krug radijusa 1 podijeljen je na 12 sukladnih dijelova. Koliki je opseg jednoga dijela?

Rješenje: Opseg cijeloga kruga je $o = 2r\pi = 2 \cdot 1 \cdot \pi = 2\pi$.

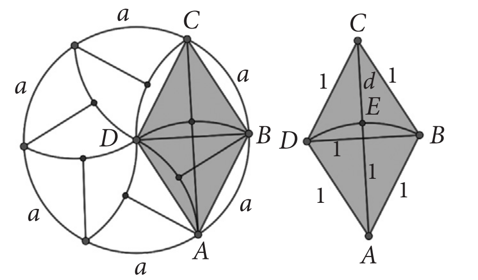
Kružnica koja omeđuje zadani krug podijeljena je na 6 sukladnih dijelova duljine *a*.



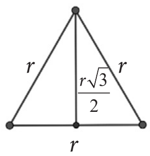
Svaki od sukladnih dijelova omeđen je većim lukom duljine a, manjim lukom duljine $\frac{a}{2}$ i dužinom duljine d.

Veći luk ima duljinu $a = \frac{o}{6} = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$, a manji luk $\frac{a}{2} = \frac{\pi}{3} : 2 = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Preostaje još izračunati duljinu dužine d. Istaknimo unutar kruga romb $ABCD$ kako je prikazano na donjoj slici. Sve njegove stranice i kraća dijagonala imaju duljinu 1 jer se taj romb sastoji od dva sukladna jednakostranična trokuta ABD i CDB.



Dulja dijagonala toga romba ima duljinu $|AC| = |AE| + |AC| = 1 + d$. Njezina je duljina ujedno jednaka duljini dviju visina jednakostraničnih trokuta koji čine romb $ABCD$, a čije stranice imaju duljinu $r = 1$.



(Napomena: Duljina visine jednakostraničnog trokuta sa stranicom duljine r je $\frac{r\sqrt{3}}{2}$.)

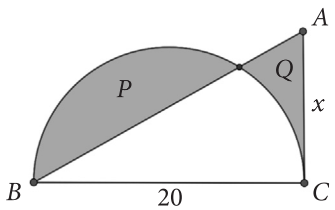
Dakle, $|AC| = 2 \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = r\sqrt{3} = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$

Iz toga slijedi $1 + d = |AC| = \sqrt{3}$, tj. $d = \sqrt{3} - 1$.

Opseg istaknutoga dijela kruga je stoga

$$a + \frac{a}{2} + d = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} - 1 = \frac{\pi}{2} + \sqrt{3} - 1 \approx 2.303\,.$$

Zadatak 1. Za površine P i Q vrijedi $P = Q + 47$. Koliko je $|AC|$ ako je $|BC| = 20$?



Izvor:

1. https://www.youtube.com/c/MindYourDecisions