

SOPHIE GERMAIN



Luce Marušić, Ida Sabolić, Nika Sudić, Mila Trkulja, XV. gimnazija, Zagreb

Matka 31 (2022./2023.) br. 124

Marie-Sophie Germain bila je francuska matematičarka, fizičarka i filozofkinja. Rođena je 1. travnja 1776. godine u Parizu, a preminula je 27. lipnja 1831. Zalagala se za prava žena u znanosti i borila protiv rodni predrasuda i nedostatka formalnog obrazovanja za žene. Dala je izniman doprinos razvoju teorije brojeva i matematičke fizike.



Još u mladim danima zanimala se za znanost i matematiku. Osnovno obrazovanje stekla je čitajući knjige iz knjižnice svojega oca. Isprva nije imala podršku roditelja, no ustrajala je u svojoj želji za obrazovanjem i nastavila se baviti onime što voli.

Kada je napunila 18 godina, pokušala je upisati studij na Ecole Polytechnique u Parizu, no neuspješno jer je tada ženama bilo zabranjeno studiranje na ovome sveučilištu. Stoga se prijavila pod pseudonimom Antoine-Auguste Le Blanc i upisala studij. Suradivala s matematičarima poput Josepha Fouriera, Josepha Louisa de Lagrangea te Carla Friedricha Gaussa. Zbog izuzetnosti njezinih otkrića, Lagrange je tražio da se upoznaju. Bila je prisiljena prihvatiti sastanak i otkriti svoj identitet, no Lagrangeu nije smetalo što je žena te je godinama pratio i podržavao njezin rad.

Cijeli život S. Germain susretala se s mnogim predrasudama zbog svoga spola. Društvo je smatralo da je za ženu neprikladno raditi u području znanosti, tako da ova slavna žena ni danas ne dobiva potpune zasluge za svoj rad. Borila se protiv takvih predrasuda utirući tako put mnogim ženama u znanosti nakon nje. Ostavila je nasljeđe iznimnih znanstvenih i matematičkih otkrića koja su temelji današnje matematike. Izgradila je teoriju elastičnosti, odgovarajući na natječaj francuske Akademije znanosti iz 1809., a 1816. osvojila je nagradu.

Prosti brojevi Sophie Germain

Sophie Germain doprinijela je razvoju teorije brojeva. Prema njoj su nazvani prosti brojevi za koje vrijedi da su p i $2p + 1$ prosti. Na primjer, broj 29 je *prost broj Sophie Germain* jer je prost, a i broj $2 \cdot 29 + 1 = 59$ također je prost.

Zadatak 1. Pronađite sve *proste brojeve Sophie Germain* manje od 50.

Oredimo sve pravokutne trokute u kojima su duljina hipotenuze i duljina jedne katete *prosti brojevi Sophie Germain*, a duljina druge katete je prirodan broj.

Ako je duljina jedne katete *prost broj Sophie Germain*, ona može biti 2, 3, 5, 11...





Pokušajmo prvo pronaći pravokutni trokut u kojemu je duljina jedne katete 2, duljina hipotenuze *prost broj Sophie Germain*, a duljina druge katete prirodan broj. Označimo duljinu hipotenuze s p , a duljinu druge katete s n .

Tada je $2^2 = p^2 - n^2 = (p - n)(p + n)$, iz čega zaključujemo da je $p - n = 1$ i $p + n = 2^2$, pa je $p = \frac{2^2 + 1}{2} = \frac{5}{2}$, što nije prost broj. Zato takav trokut ne postoji.

Zadatak 2. Postoji li pravokutni trokut s traženim svojstvima ako mu je duljina jedne katete 3? Ako postoji, kolike su duljine hipotenuze i druge katete?

Potražimo sada pravokutni trokut s traženim svojstvima čija je duljina jedne katete prost broj veći od 3.

Neka su duljina hipotenuze p i duljina jedne katete q *prosti brojevi Sophie Germain*, a n duljina druge katete koja je prirodan broj.

Zadatak 3. Pokažite da je $p = \frac{q^2 + 1}{2}$.

Zadatak 4. Pokažite da je $2p + 1 = q^2 + 2$.

Zadatak 5. Pokažite da je za prost broj $q > 3$ broj $q^2 + 2$ djeljiv brojem 3. Ovo znači da broj $2p + 1$ nije prost pa broj p nije *prost broj Sophie Germain*.

Tako smo dokazali da je pravokutni trokut sa stanicama 3, 4, 5 jedini koji zadovoljava tražene uvjete.

Identitet Sophie Germain

Prema Sophie Germain nazvan je identitet koji uvelike olakšava rješavanje nekih matematičkih zadataka.

Identitet Sophie Germain:

$$\begin{aligned} a^4 + 4b^4 &= a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 \\ &= (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 \\ &= (a^2 + 2b^2 - 2ab)(a^2 + 2b^2 + 2ab) \end{aligned}$$

Hoće li broj $2023^4 + 2^{2042}$ biti složen ili prost broj?

Prema formuli identiteta Sophie Germain, slijedi:

$$\begin{aligned} 2023^4 + 2^{2042} &= 2023^4 + 2^2 \cdot 2^{4040} = 2023^4 + 4 \cdot 2^{4040} = 2023^4 + 4 \cdot (2^{1010})^4 = \\ &= (2023^2 + 2 \cdot 2^{2020} - 2 \cdot 2023 \cdot 2^{1010})(2023^2 + 2 \cdot 2^{2020} + 2 \cdot 2023 \cdot 2^{1010}) \\ &= (2023^2 + 2^{2021} - 2023 \cdot 2^{1011})(2023^2 + 2^{2021} + 2023 \cdot 2^{1011}) \end{aligned}$$



Kako bismo se zaista uvjerali hoće li rezultat biti složen ili prost broj, potrebno je provjeriti je li neki od faktora jednak 1. Ako je jedan od faktora jednak 1, znači da je rezultat zasigurno prost broj. Bez računanja je moguće utvrditi da je drugi faktor veći od 1. Prvi je faktor također veći od jedan (provjerite!). Time se dokazuje da je rezultat složeni broj.

Zadatak 6.

- Je li broj $2015^4 + 4^{2015}$ prost? Dokažite.
- Dokažite da je broj $3^{44} + 4^{29}$ složen.

Literatura:

- <https://www.mioc.hr/wp/?p=20470>
- Sophie Germain's Identity
(<https://www.cut-the-knot.org/blue/SophieGermainIdentity.shtml>)
- https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/af9b8682-eef4-478e-9b92-edcba4790886/html/24414_Razlika_kvadrata_zbroj_i_razlika_kubova.html#subtitle7

