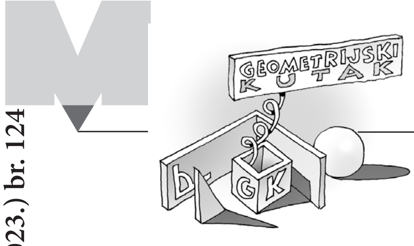
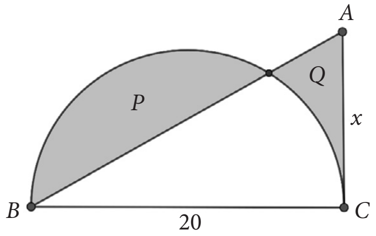


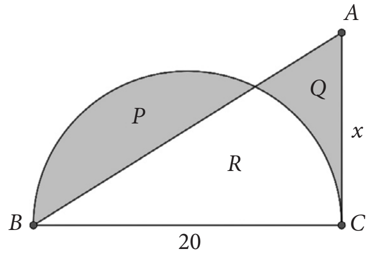
TROKUT, ČETVEROKUT I KRUG

Zlatko Lobor, Zagreb

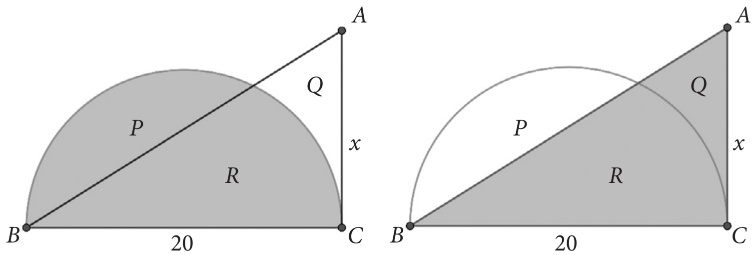
Primjer 1. Za površine P i Q vrijedi $P = Q + 47$. Koliko je $|AC|$ ako je $|BC| = 20$?



Rješenje: Označimo neosjenčani dio polukruga (trokuta) s R.



Slijedi da je površina polukruga $P + R = \frac{1}{2}\left(\frac{|BC|}{2}\right)^2 \pi = \frac{1}{2}\left(\frac{20}{2}\right)^2 \pi = 50\pi$.



Također, vrijedi da je površina trokuta ABC jednaka $Q + R = \frac{20 \cdot x}{2} = 10x$.

Oduzimanjem površine trokuta ABC od površine polukruga dobiva se

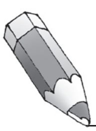
$$P + R - (Q + R) = 50\pi - 10x.$$

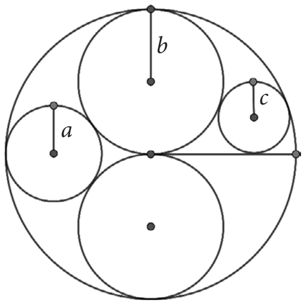
Uvrstimo li da je $P = Q + 47$ u gornju jednakost, dobiva se

$$Q + 47 + R - Q - R = 50\pi - 10x.$$

Nakon reduciranja na lijevoj strani jednakosti ostaje samo 47 pa je $47 = 50\pi - 10x$.

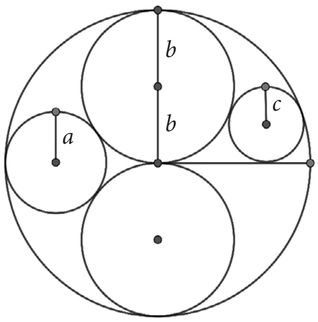
Slijedi $10x = 50\pi - 47$, tj. $x = 5\pi - 4.7 \approx 11.01$.



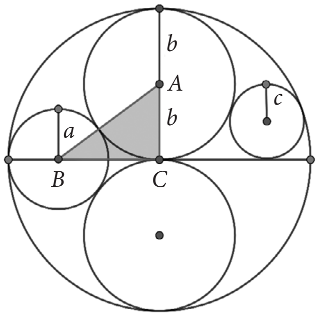


Primjer 2. Duljina polumjera velike kružnice je 12. Koliko je $a + b + c$ ako su a, b i c duljine polumjera kružnica na slici?

Rješenje: Promjer dviju sukladnih kružnica je $2b$, a on je jednak duljini polumjera velike kružnice. Stoga je $2b = 12$, tj. $b = 6$.



Istaknimo trokut ABC kojemu su vrhovi središta triju kružnica.



Taj je trokut pravokutan te vrijedi $|AC| = b = 6$, $|BC| = 12 - a$ i $|AB| = a + b = a + 6$.
Iz Pitagorina poučka slijedi:

$$|AC|^2 + |BC|^2 = |AB|^2$$

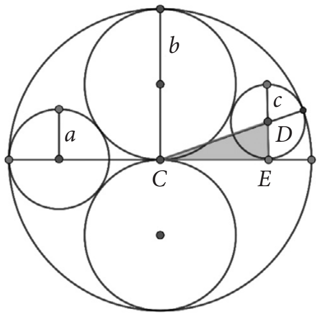
$$6^2 + (12 - a)^2 = (a + 6)^2$$

$$36 + 144 - 24a + a^2 = a^2 + 12a + 36$$

$$-36a = -144$$

$$a = 4$$

Istaknimo sada i pravokutni trokut CED. U tome je trokutu $|DE| = c$, $|CE| = x$ i $|CD| = 12 - c$.



Vrijedi:

$$|DE|^2 + |CE|^2 = |CD|^2$$

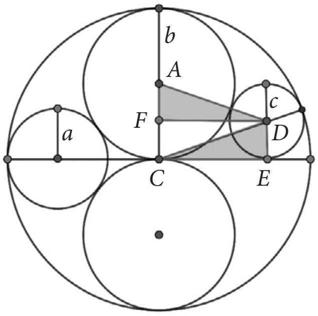
$$c^2 + x^2 = (12 - c)^2$$

$$c^2 + x^2 = 144 - 24c + c^2$$

$$x^2 = 144 - 24c. \quad (1)$$

Na kraju promotrimo i pravokutni trokut AFD. U tome je trokutu

$$|AF| = b - c = 6 - c,\ |FD| = |CE| = x \text{ i } |AD| = b + c = 6 + c.$$

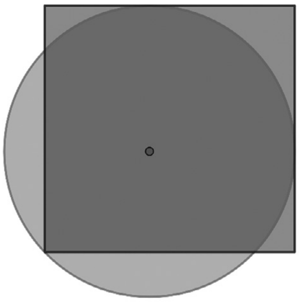


Vrijedi:

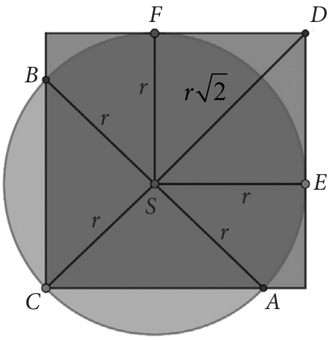
$$|AF|^2 + |FD|^2 = |AD|^2$$
$$(6-c)^2 + x^2 = (6+c)^2$$
$$36 - 12c + c^2 + x^2 = 36 + 12c + c^2$$
$$x^2 = 24c. \quad (2)$$

Povežemo li jednakosti (1) i (2), dobiva se $24c = x^2 = 144 - 24c$.
Dakle, $48c = 144$, tj. $c = 3$, pa je $a + b + c = 6 + 4 + 3 = 13$.

Primjer 3. Duljina stranice kvadrata je 1. Koliki je postotak površine kvadrata izvan kruga?

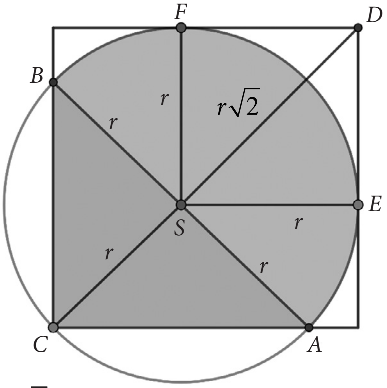


Rješenje: Dopunimo sliku na sljedeći način uvođenjem navedenih oznaka.



Središte kružnice S polovište je dužine $\overline{AB}$ jer je kružnica opisana pravokutnom trokutu ABC. To ujedno znači da je $\overline{AB}$ promjer zadanoga kruga.

Površina dijela kvadrata koji je izvan kruga dobije se oduzimanjem površine trokuta ABC i površine polukruga od površine kvadrata. Da bismo izračunali obje te površine, potrebno je izračunati duljinu polumjera kruga r.



Dijagonala $\overline{CD}$ zadanoga kvadrata stranice duljine $a = 1$ ima duljinu $|CD| = a\sqrt{2} = \sqrt{2}$.

S druge strane vrijedi $|CD| = |CS| + |SD| = r + r\sqrt{2}$.

Slijedi:

$r + r\sqrt{2} = \sqrt{2}$, tj. $r\left(1+\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}$ pa je $r = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1} \cdot \dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\left(\sqrt{2}\right)^2 - \sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 1^2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2-1} = 2-\sqrt{2}$.

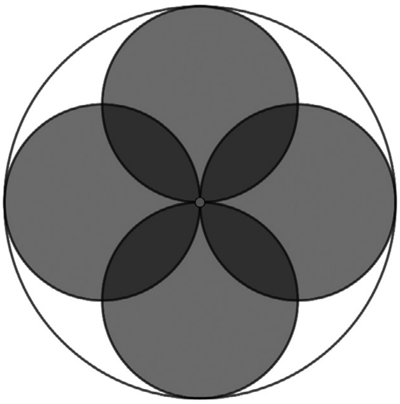
Površina trokuta ABC je $P_{ABC} = \dfrac{2r \cdot r}{2} = r^2 = \left(2-\sqrt{2}\right)^2 = 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = 4 - 4\sqrt{2} + 2 = 6 - 4\sqrt{2}$.

Površina polukruga je $P_{PK} = \dfrac{r^2\pi}{2} = \dfrac{\left(6-4\sqrt{2}\right)\pi}{2} = \dfrac{2\left(3-2\sqrt{2}\right)\pi}{2} = \left(3-2\sqrt{2}\right)\pi$

Površina dijela kvadrata izvan kruga je $P = 1 - P_{ABC} - P_{PK} = 1 - \left(6-4\sqrt{2}\right) - \left(3-2\sqrt{2}\right)\pi \approx 0.1178$

Izraženo postotkom, izvan kruga je 11.78 % površine kvadrata.

Zadatak 1. Koliki dio površine velikoga kruga nije osjenčan?



Izvor:

1. https://www.youtube.com/c/MindYourDecisions