Dokazivanje nejednakosti pomoću vektora

Šefket Arslanagić[1] i Alija Muminagić[2]

Uvođenjem vektorske algebre u nastavu geometrije u srednjim školama javlja se mogućnost da učenike naučimo kako koristiti vektore za rješavanje raznih geometrijskih zadataka. Ovdje ćemo pak pokazati kako se pomoću vektorske algebre vrlo uspješno dokazuju razne vrste nejednakosti. Svakako bi se te nejednakosti mogle dokazati i na neki drugi način (bez primjene vektora), ali sigurno znatno teže. U ovome članku dat ćemo jedanaest raznih primjera s ciljem pokazivanja učinkovitosti vektorske metode u dokazivanju nejednakosti.

Koristit ćemo više poznatih nejednakosti iz vektorske algebre, kao što su na primjer:

$$\left||\vec{a}|-|\vec{b}|\right| \le |\vec{a}+\vec{b}| \le |\vec{a}|+|\vec{b}| \ ,$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b} \le |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|,$$

$$\vec{a}^2 \ge 0 \, ,$$

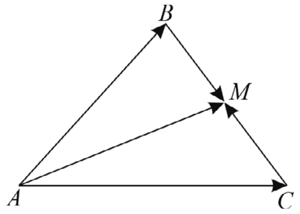
kao i još neke.

Preporučili bismo čitateljima da pomoću vektora sami pokušaju dokazati i neke druge nejednakosti jer su mogućnosti vektorske metode stvarno velike. Vjerujemo da će se čitatelji ovoga članka uvjeriti u istinitost navedenih riječi nakon prorade sljedećih primjera.

Primjer 1. Treba dokazati da je dužina težišnice trokuta manja od poluzbroja duljina susjednih stranica toga trokuta.

Dokaz: Neka je AM težišnica trokuta ΔABC (Sl.1). Zbog $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CM}$ i $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM}$, imamo da je $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$, a odavde je $\left|\overrightarrow{AM}\right|=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|$. Kako su vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ nekolinearni, to je $\left|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right|<\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{AC}\right|$, odnosno $\left|\overrightarrow{AM}\right|<\frac{1}{2}\left(\left|\overrightarrow{AB}\right|+\left|\overrightarrow{AC}\right|\right)$ ili $|AM|<\frac{1}{2}\left(|AB|+|AC|\right)$, što je i trebalo dokazati.

[1]Šefket Arslanagić, Prirodoslovno-matematički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, BiH
[2]Alija Muminagić, Frederiksberg, Danska



Slika 1.

Primjer 2. Zadane su dvije dužine $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ koje ne leže na istome pravcu. Neka su točke M i N središta dužina $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$. Treba dokazati da vrijedi nejednakost $|AD|+|BC|>2|MN|$.

Dokaz: Prema uvjetu zadatka (Slika 2.) vrijedi:

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{MN} \text{ i } \overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CN}=\overrightarrow{MN}.$$

Dalje je:

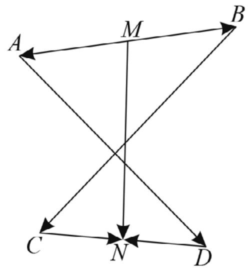
$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0} \text{ i } \overrightarrow{DN}+\overrightarrow{CN}=\vec{0},$$

pa je

$$2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC},$$

tj.

$$2\left|\overrightarrow{MN}\right|=\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right|.$$



Slika 2.

Kako za nekolinearne vektore vrijedi

$$\left|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right|<\left|\overrightarrow{AD}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|,$$

zaključujemo da je

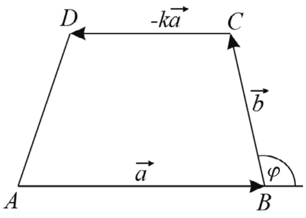
$$2\left|\overrightarrow{MN}\right|<\left|\overrightarrow{AD}\right|+\left|\overrightarrow{BC}\right|,$$

tj.

$$2\left|MN\right|<\left|AD\right|+\left|BC\right|,$$

što je i trebalo dokazati.

Primjer 3. Dan je trapez $ABCD$; ($AB \parallel CD$). Ako je $|AD| > |BC|$ i $|AC| > |BD|$, treba dokazati da je tada $|AB| > |CD|$.



Slika 3.

Dokaz: Uvedimo vektore $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$, čije su duljine a i b, dok je φ kut između njih (Slika 3.). Sada imamo $\overrightarrow{CD} = -k\vec{a}$, gdje je $k > 0$ i $k \neq 1$, $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} - k\vec{a} = (1-k)\vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = -k\vec{a} + \vec{b}$.

Kako je $\left|\overrightarrow{AD}\right| > \left|\overrightarrow{BC}\right|$, to je $\overrightarrow{AD}^2 > \overrightarrow{BC}^2$.

Dakle, imamo:

$$a^2(1-k)^2 + b^2 + 2ab(1-k)\cos\varphi > b^2,$$

ili

$$(1-k)\big(a(1-k) + 2b\cos\varphi\big) > 0. \tag{1}$$

Dalje, iz uvjeta da je $\left|\overrightarrow{AC}\right| > \left|\overrightarrow{BD}\right|$, slično dobivamo:

$$2(1-k) + 2b\cos\varphi > 0. \tag{2}$$

Iz nejednakosti (1) i (2) dobivamo da je $1-k > 0$, tj. $k < 1$, odnosno $\left|\overrightarrow{AB}\right| > \left|\overrightarrow{CD}\right|$ ili $|AB| > |CD|$, što je i trebalo dokazati.

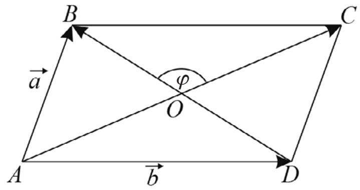
Primjer 4. Treba dokazati da za svaki paralelogram vrijedi nejednakost $a^2 - b^2 < ef$, gdje su a i b duljine stranica, e i f duljine dijagonala paralelograma.

Dokaz: Neka je $ABCD$ paralelogram i neka je $\overrightarrow{AB} = \vec{a}, \overrightarrow{AD} = \vec{b}$ (Slika 4.). Tada je $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{a} - \vec{b}$. Dalje imamo da je

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (\vec{a} + \vec{b})(\vec{a} - \vec{b}),$$

tj.

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = a^2 - b^2.$$



Slika 4.

No, znamo da je

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = ef\cos\varphi < ef,$$

pa je

$$a^2 - b^2 < ef,$$

što je trebalo i dokazati.

Primjer 5. Treba dokazati da u trokutu vrijedi nejednakost $|OH| < 3R$, gdje je O centar opisane kružnice trokuta, H ortocentar trokuta i R polumjer opisane kružnice trokuta.

Dokaz: Lako se izvodi jednakost $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ (Slika 5.).

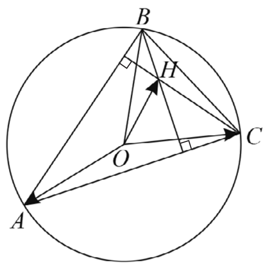
Odavde je

$$\left|\overrightarrow{OH}\right| = \left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right| < \left|\overrightarrow{OA}\right| + \left|\overrightarrow{OB}\right| + \left|\overrightarrow{OC}\right|,$$

(jer su vektori $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ nekolinearni).

Dakle, zbog $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{OB}\right| = \left|\overrightarrow{OC}\right| = R$ dobivamo da vrijedi $\left|OH\right| < 3R$, što je i trebalo dokazati.

Napomena 1: Zbog $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$ je $\left|\overrightarrow{AH}\right| < \left|\overrightarrow{OB}\right| + \left|\overrightarrow{OC}\right|$, tj. $\left|AH\right| < 2R$ i analogno $\left|BH\right| < 2R, \left|CH\right| < 2R$.

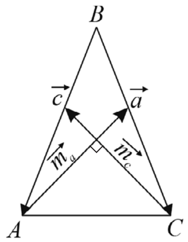


Slika 5.

Primjer 6. Treba dokazati da u trokutu ΔABC vrijedi nejednakost $\cos\angle B \geq \frac{4}{5}$, gdje su težišnice m_a i m_c koje odgovaraju stranicama $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ međusobno okomite.

Dokaz: Neka je vrh B trokuta ΔABC početak vektora $\overrightarrow{BA}$ i $\overrightarrow{BC}$, i neka je $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$ (Slika 6.). Tada vrijedi:

$$\vec{m}_a = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c} \ \text{ i } \ \vec{m}_c = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}.$$



Slika 6.

Iz uvjeta $m_a \perp m_c$ slijedi:

$$\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}\right) = 0,$$

odakle je

$$\vec{a}\cdot\vec{c} = \frac{2}{5}\left(\vec{a}^2 + \vec{c}^2\right).$$

Iz skalarnog umnoška vektora $\vec{a}$ i $\vec{c}$ dobivamo da vrijedi:

$$\cos\angle B = \frac{\vec{a}\cdot\vec{c}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{2}{5}\frac{\vec{a}^2 + \vec{c}^2}{|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|} = \frac{4}{5}\cdot\frac{|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2}{2|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|}.$$

Kako za realne brojeve vrijedi nejednakost $x^2 + y^2 \geq 2xy$, to je

$$|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 \geq 2|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|.$$

Najzad dobivamo da je

$$\cos\angle B \geq \frac{4}{5}.$$

Jednakost vrijedi u slučaju kada je $|\vec{a}|=|\vec{c}|$, tj. kada je trokut ΔABC jednakokračan.

Primjer 7. Koju najveću i koju najmanju vrijednost može poprimiti izraz $5\sin x-12\cos x$?

***Rješenje**:* Neka su $\vec{a}=(5,-12)$, $\vec{b}=(\sin x,\cos x)$ u Decartesovu pravokutnom sustavu. Tada je $5\sin x-12\cos x$ skalarni umnožak vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, tj. vrijedi $\vec{a}\cdot\vec{b}=5\sin x-12\cos x$. Zbog nejednakosti $\vec{a}\cdot\vec{b}\leq|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ ili $(\vec{a}\cdot\vec{b})^2\leq|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2$ imamo:

$$(5\sin x-12\cos x)^2\leq 13^2(\sin^2 x+\cos^2 x),$$

odakle je

$$(5\sin x-12\cos x)^2\leq 13^2.$$

Dalje imamo

$$|5\sin x-12\cos x|\leq 13 \quad \text{ili} \quad -13\leq 5\sin x-12\cos x\leq 13.$$

Dakle, najveća vrijednost danog izraza je 13, a najmanja –13.

Primjer 8. Treba dokazati da za $n\geq 2$ vrijedi

$$\log^2_{n!} n+\log^2_{n!}(n-1)+\log^2_{n!}(n-2)!>\frac{1}{3}.$$

Dokaz: Stavimo da je $\log_{n!}=x,\ \log_{n!}(n-1)=y,\ \log_{n!}(n-2)!=z$. Sada imamo:

$$x+y+z=\log_{n!} n(n-1)(n-2)!=\log_{n!} n!=1.$$

Neka je $\vec{a}=(x,y,z),\ \vec{e}=(1,1,1)$. Tada je $\vec{a}\cdot\vec{e}=x\cdot 1+y\cdot 1+z\cdot 1=x+y+z=1$. Kako je $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ i $|\vec{e}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3}$, te

$$(\vec{a}\cdot\vec{e})^2\leq|\vec{a}|^2\cdot|\vec{e}|^2,$$

to je

$$1^2\leq 3(x^2+y^2+z^2).$$

Zbog činjenice da su vektori $\vec{a}$ i $\vec{e}$ nekolinearni, imamo da je

$$x^2+y^2+z^2>\frac{1}{3},$$

što je i trebalo dokazati.

Primjer 9. Treba dokazati nejednakosti:

a) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\frac{3}{2}$,

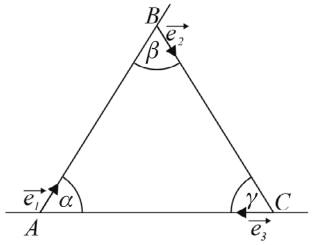
b) $\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\geq-\frac{3}{2}$,

gdje su α,β,γ unutarnji kutovi trokuta.

Dokaz: a) Uzmimo na stranicama trokuta ΔABC jedinične vektore $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$. (Slika 7.).

Skalarni umnožak toga vektora sa samim sobom je nenegativan, pa je $\left(\vec{e}_1+\vec{e}_2+\vec{e}_3\right)^2 \geq 0$. Nakon kvadriranja dobivamo $3+2\left(\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2+\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3+\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3\right)\geq 0$. No, $\vec{e}_1\cdot\vec{e}_2=\cos\left(180^o-\beta\right)=-\cos\beta$,

$\vec{e}_1\cdot\vec{e}_3=-\cos\alpha$, $\vec{e}_2\cdot\vec{e}_3=-\cos\gamma$.



Slika 7.

Sada imamo:

$$3-2\left(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\right)\geq 0,$$

te

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\frac{3}{2}.$$

Jednakost vrijedi ako je trokut ΔABC jednakostraničan.

b) Neka je H ortocentar troukuta, O centar kružnice opisane trokutu ΔABC (vidi Primjer 5.). Kako je $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, iz $\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)^2\geq 0$ dobivamo

$$3R^2+2R^2\left(\cos 2\gamma+\cos 2\beta+\cos 2\alpha\right)\geq 0.$$

Odavde je

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma\geq-\frac{3}{2}.$$

Napomena 2: Izračunajmo sumu kvadrata stranica trokuta:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\left|\overrightarrow{BC}\right|^2+\left|\overrightarrow{CA}\right|^2=\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)^2+\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}\right)^2+\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OC}\right)^2=$$

$$=6\,R^2-2R^2(\cos 2\gamma+\cos 2\beta+\cos 2\alpha).$$

Zbog nejednakosti pod b) je najzad:

$$a^2+b^2+c^2\leq 9R^2,$$

gdje su a,b,c dužine stranica trokuta, a R polumjer opisane kružnice trokuta.

Primjer 10. Treba dokazati nejednakost

$$\sin x\sin y\sin z+\cos x\cos y\cos z\leq 1.$$

Dokaz: Uzmimo vektore $\vec{a}=\left(\sin x\sin y,\cos x\cos y\right)$, $\vec{b}=\left(\sin z,\cos z\right)$. Imamo da je $\left|\vec{b}\right|=1$, $\left|\vec{a}\right|^2=\sin^2 x\sin^2 y+\cos^2 x\cos^2 y\leq\sin^2 x+\cos^2 x=1$ i $\vec{a}\cdot\vec{b}\leq\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\leq 1$, odnosno

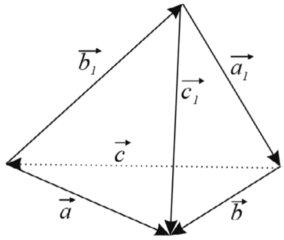
$$\sin x\sin y\sin z+\cos x\cos y\cos z\leq 1,$$

što je i trebalo dokazati.

Primjer 11. U tetraedru nasuprotni bridovi imaju duljine a i a_1, b i b_1, c i c_1. Neka je $c^2+c_1^2$ najveća od suma $a^2+a_1^2$, $b^2+b_1^2$, $c^2+c_1^2$. Treba dokazati da je

$$a^2+a_1^2+b^2+b_1^2>c^2+c_1^2.$$

Dokaz: Neka su vektori $\vec{a}, \vec{a}_1, \vec{b}, \vec{b}_1, \vec{c}, \vec{c}_1$ kao na Slici 8. Imamo:



Slika 8.

$$\vec{b}_1+\vec{a}_1+\vec{b}+(-\vec{a})=\vec{0},$$

$$\vec{b}_1+\vec{c}_1+\left(-\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{0},$$

$$\vec{a}+(-\vec{c}_1)+\vec{a}_1+\vec{c}=\vec{0}.$$

Odavde je:

$$\vec{a}-\vec{a}_1=\vec{b}+\vec{b}_1,\ \vec{b}-\vec{b}_1=\vec{c}+\vec{c}_1,\ \vec{c}-\vec{c}_1=-\vec{a}-\vec{a}_1.$$

Kvadriranjem obje strane svake od gornjih jednakosti, te oduzimanjem druge jednakosti od zbroja prve i treće jednakosti, dobivamo:

$$\left(\vec{a}-\vec{a}_1\right)^2+\left(\vec{c}-\vec{c}_1\right)^2-\left(\vec{b}-\vec{b}_1\right)^2=\left(\vec{b}+\vec{b}_1\right)^2+\left(\vec{a}+\vec{a}_1\right)^2-\left(\vec{c}+\vec{c}_1\right)^2.$$

Nakon kvadriranja dobivamo:

$$c^2+c_1^2-\left(b^2+b_1^2\right)=2\vec{a}\cdot\vec{a}_1. \tag{1}$$

Zbog $2\vec{a}\cdot\vec{a}_1=2aa_1\cos\angle\left(\vec{a}\cdot\vec{a}_1\right)<2aa_1\le a^2+a_1^2$, sada iz (1) slijedi da je

$$c^2+c_1^2-\left(b^2+b_1^2\right)<a^2+a_1^2$$

ili

$$a^2+a_1^2+b^2+b_1^2>c^2+c_1^2,$$

što je i trebalo dokazati.

Literatura

1. Mesihović, B., Arslanagić, Š., *Zbirka zadataka i problema iz matematike sa osnovama teorije i ispitni zadaci*, Svjetlost, Sarajevo, 1988.

2. Arslanagić, Š., *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

3. Marić, A., *Vektori-Zbirka riješenih zadataka*, Element, Zagreb, 2002.