

# Nogomet u nastavi matematike

## 6. razreda osnovne škole

FRANKA MIRIAM BRÜCKLER<sup>1</sup> I FILIP MIJAČ<sup>2</sup>

### Uvod

U prethodnih pet članaka vidjeli smo kako se u razrednoj nastavi i petom razredu osnovne škole učenici susreću s mnogim matematičkim temama prirodno povezivim s nogometom, posebice aritmetikom prirodnih (i decimalnih) brojeva i geometrijom pravokutnika te skupljanjem i prikazom podataka stupčastim dijagramima. Tako smo stigli do šestog razreda u kojemu se učenici susreću s mnogim novim matematičkim pojmovima i tehnikama. Prema novom kurikulumu [1], u ovom razredu učenici:

- Uče određivati najmanji zajednički višekratnik brojeva i koriste ga za proširivanje, skraćivanje i svođenje razlomaka na zajednički nazivnik;
- Opisuju i uspoređuju nenegativne racionalne brojeve u različitim zapisima (prirodni brojevi, decimalni brojevi i razlomci, pravi i nepravi razlomci, mješoviti brojevi, postotci i promili);
- Računaju (zbrajaju, oduzimaju, množe, dijele) s nenegativnim racionalnim brojevima;
- Proširuju skup prirodnih brojeva na skup cijelih brojeva i računaju (zbrajaju, oduzimaju, množe, dijele, kvadriraju) unutar toga skupa;
- Koriste potencije broja 10 s nenegativnim eksponentima te preračunavaju mjere za duljinu, masu, vrijeme, volumen tekućine, površinu izražene u raznim mjernim jedinicama;
- Rješavaju linearne jednadžbe s jednom nepoznanicom;
- Konstruiraju razne kutove, trokute i četverokute;
- Određuju opsege, površine i zbrojeve mjera unutarnjih kutova trokuta i četverokuta (od četverokuta, površinu određuju samo za paralelograme);
- Računaju s postocima;
- Uče prikazivati cijele i pozitivne racionalne brojeve na pravcu te točke s cjelobrojnim koordinatama u pravokutnom koordinatnom sustavu;
- Prikazuju podatke tablično te linijskim i stupčastim dijagramima frekvencija.

Gotovo sve te teme – izuzetak su konstrukcije kutova, trokuta i četverokuta – posebno se prirodno (i realistično) mogu povezati s nogometom, za što ćemo u ovom nastavku naše serije članaka dati primjere.

<sup>1</sup>Franka Miriam Brückler, PMF – Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu

<sup>2</sup>Filip Mijač, X. gimnazija „Ivan Supek“, Zagreb

## Nogomet u aritmetici (i algebri) 6. razreda OŠ

Dok su se u 5. razredu osnovne škole učenici tek upoznali s pojmom razlomka, u 6. razredu već uče uspoređivati razlomke i računati s njima. Vezano za nogomet, razlomci su posebno prikladni za izražavanje vremena tijekom utakmice – ta poluvrijeme je  $\frac{1}{2}$  utakmice! Evo jedan primjer preuzet iz [2].

**Primjer 1.** Uzimamo da je trajanje utakmice točno 90 minuta, dakle bez nadoknada i produžetaka. Kylian Mbappé odigrao je  $\frac{2}{3}$  jedne nogometne utakmice, a nakon toga trener ga je odlučio zamijeniti. Marco Veratti odigrao je  $\frac{4}{5}$  iste nogometne utakmice, a potom je trener odlučio da mora izići iz igre. Zadatak je odrediti koji je igrač proveo više minuta u igri. Učenici će ovo lako riješiti izravno uspoređivanjem razlomaka. Ako bi zadatak uključivao i određivanje broja minuta koje su Mbappé i Veratti proveli u igri, koristit će množenje razlomaka prirodnim brojevima: Mbappé je u navedenoj utakmici igrao 60 min, a Veratti 72 min.

Dok s razlomcima uglavnom samo malo proširujemo mogućnosti razgovora o nogometu na već poznate teme, račun s postotcima koji se po novom kurikulumu započinje učiti u 6. razredu (prije je to bilo u 7. razredu [3]) te – možda će vas ovo malo iznenaditi – s negativnim cijelim brojevima koji se i po starom i po novom kurikulumu radi u 6. razredu, otvaraju mnoge nove mogućnosti poveznica matematike i nogometa.

Krenimo prvo od negativnih brojeva koji mnogima – ne samo učenicima – predstavljaju problem zbog prividne slabe povezanosti sa stvarnim svijetom. Osim primjera s bankovnim računima te temperaturom izraženom u Celzijevim stupnjevima, upravo nogomet pruža primjere korištenja negativnih brojeva u svakodnevi. Naime, u nogometnim ligama uobičajeno je kao jedan od kriterija rangiranja klubova (koristi se kad dva kluba imaju isti broj bodova, ali i u općim statistikama) koristiti *gol-razliku*. Za svaki klub njegova gol-razlika je razlika danih i primljenih pogodaka tijekom prvenstva.

**Primjer 2.** Na web-stranici [4] (odnosno, na odgovarajućoj mobilnoj aplikaciji) lako i brzo nalazimo trenutne ljestvice raznih liga. Tako u trenutku pisanja ovoga članka u turskoj *Süper lig* 9. mjesto drži Konyaspor, a 10. mjesto Alanyaspor, oba s po 28 bodova. Zašto je Konyaspor ispred Alanyaspora? Pogled u tablicu daje nam informaciju da je u dosadašnjih po 23 odigrane utakmice Konyaspor dao 24 pogotka i primio 26 (u tablici pisano kao 24:26), dok je Alanyaspor dao 34 i primio 41 pogodak (u tablici pisano kao 34 : 51). Dakle, da je kriterij rangiranja za klubove s istim brojem bodova veći broj pogodaka, Alanyaspor bi bio ispred Konyaspora. No, gol-razlika Konyaspora je  $24 - 26 = -2$ , dok je gol-razlika Alanyaspora  $34 - 41 = -7$ . Budući da je  $-2 > -7$ , Konyaspor je rangiran ispred Alanyaspora.

Korištenje gol-razlike omogućuje nam mnoštvo zadataka i primjera koji uključuju uspoređivanje, zbrajanje i oduzimanje u skupu cijelih brojeva. Jedna mogućnost je zadavati zadatke poput onog u primjeru 1 u [5], ali proširene djelomičnim podacima

o gol-razlikama ili rangiranju. Možemo i učenicima dati kompletne podatke (pobjede, neodlučeni ishodi, porazi, dani i primljeni pogodci za svaku momčad) neke lige bez rangiranja te im prepustiti da sami odrede rangiranje. Dodatno, može ih se tražiti da rangiraju po gol-razlici umjesto standardno i da usporede tako dobivenu tablicu sa stvarnom.

Rang	Klub	P	N	I	G+	G-
1.	Galatasaray	17	3	2	47	17
2.	Fenerbahçe	16	3	4	58	25
3.	Beşiktaş	12	7	4	40	24
4.	Başakşehir	12	4	6	32	22
5.	Adana Demirspor	10	9	3	41	23
6.	Trabzonspor	11	5	7	35	31
7.	Kayserispor	11	2	10	36	32
8.	Karagümrük	7	8	7	47	43
9.	Konyaspor	6	10	7	24	26
10.	Alanyaspor	7	7	9	34	41
11.	Antalyaspor	7	4	11	27	35
12.	Sivasspor	6	6	11	29	35
13.	Ankaragücü	6	4	12	25	35
14.	Kasımpaşa	6	4	12	27	41
15.	Giresunspor	5	7	11	21	40
16.	İstanbulspor	6	3	13	23	45
17.	Ümraniyespor	4	6	13	29	42

Tablica 1. Trenutna tablica turske Süper lig, sezona 2022./23.

**Primjer 3.** Prema web-stranici [4], u trenutku pisanja ovog članka u tablici turske Süper lig stanje je kako je navedeno u tablici 1 (P = broj pobjeda, N = broj neodlučenih utakmica, I = broj izgubljenih utakmica, G+ = broj danih pogodaka, G- = broj primljenih pogodaka).<sup>3</sup> Zadatak za učenike bio bi izračunati gol-razlike i rangirati klubove po gol-razlici. Koji klub ima najbolju, a koji najgoru gol-razliku?

S obzirom na to da se u ovom razredu po prvi put i formalno susreću s linearnim jednadžbama s jednom nepoznicom, učenicima se mogu zadati i varijante gornjih primjera tako da pritom trebaju postaviti odgovarajuće linearne jednadžbe. Te će jednadžbe uglavnom imati koeficijent 1 uz nepoznicu, stoga dajemo jedan malo drugačiji nogometni primjer koji uključuje rješavanje linearne jednadžbe s 1 nepoznicom, a s kojim ujedno ulazimo i u druge dvije teme matematike 6. razreda – različite zapise racionalnih brojeva, preračunavanje metričkih jedinica mjere i geometriju četverokuta.

<sup>3</sup>U tablici nedostaju Gaziantep i Hatayspor koji su se za ovu sezonu morali povući iz prvenstva zbog posljedica velikih potresa koji su snažili njihove regije početkom veljače 2023.

**Primjer 4.** Prema službenim nogometnim pravilima [8], preporučena je veličina, a takva je veličina nogometnih terena većine velikih europskih klubova, 68 m puta 105 m. Za tu veličinu terena odredite koji udio površine „pokriva” svaki igrač jedne momčadi. Ovisi li taj udio o jedinici u kojoj izražavamo površinu? Je li taj udio čisti broj ili ima i pripadnu jedinicu mjere (ako da, koju)?

Površina preporučenog nogometnog terena je, budući da se radi o pravokutniku,  $7140 \text{ m}^2$ . U jednoj momčadi imamo 11 igrača. Dakle, površina  $x$  koju pokriva jedan igrač rješenje je jednadžbe

$$11x = 7140 \text{ m}^2,$$

dakle,  $x = \frac{7140}{11} \text{ m}^2 = 649\frac{1}{11} \text{ m}^2 = 649.09 \text{ m}^2$ . U, recimo,  $\text{dm}^2$ ,  $x = 64909.09 \text{ dm}^2$ .

Dakle, *iznos* površine koju pokriva jedan igrač ovisi o odabranoj jedinici površine i također ima tu istu jedinicu.

No, udio je udio u odnosu na ukupnu površinu, dakle traženi udio rezultat je dijeljenja  $x$  s ukupnom površinom terena:

$$\frac{\frac{7140}{11} \text{ m}^2}{7140 \text{ m}^2} = \frac{1}{11}$$

(uočimo da su se jedinice mjere pokratile te je udio površine koju pokriva jedan igrač čisti broj). Svakako tu vrijedi komentirati da se isti udio dobije neovisno o tome koje jedinice koristimo za mjeru ukupne površine i za  $x$ , primjerice

$$\frac{\frac{7140}{11} \text{ m}^2}{7140 \text{ m}^2} = \frac{\frac{714000}{11} \text{ dm}^2}{714000 \text{ dm}^2} = \frac{1}{11}.$$

Naposljetku, udio je prirodno izraziti i decimalno  $0.09$  ili, još prirodnije, kao postotak  $9.09\%$ . Dakle, svaki igrač pokriva približno  $9\%$  terena.

Naravno, tema postotaka pruža još mnoge druge mogućnosti povezivanja matematike s nogometom jer svaki, čak i samo povremeni gledatelj nogometnih utakmica ne može ne primijetiti koliko se puta podatci tijekom i nakon utakmica izražavaju u postotcima: udjeli posjeda lopte, uspješnost u pogađanju protivničkih vrata (omjer broja pogodaka prema broju upućenih udaraca), procjene vjerojatnosti raznih rezultata, ... Završimo stoga ovaj odjeljak s jednim primjerom iz nogometne svakodnevice.

**Primjer 5.** Prema podatcima sa stranice [4], 4. ožujka 2023. utakmica Kayserispor – Fenerbahçe završila je rezultatom 1:2. U statistici te utakmice navedeno je, među ostalim, da je posjed lopte Fenerbahçea bio  $60\%$  te da im je uspješnost dodavanja, „pasova”, bila  $83\%$ , da je utakmica trajala  $45 + 6 + 45 + 5 = 101$  minutu i da su igrači Fenerbahçea uputili ukupno 427 uspješnih dodavanja svojim suigračima. Zadatci za učenike mogli bi biti:

a) Koliki je bio posjed Kayserispora? Ovo je lako:  $100\% - 60\% = 40\%$ .

- b) Koliko je minuta lopta bila u posjedu Fenerbahçea, a koliko Kayserispora? Ni ovo nije teško:  $60 \% \cdot 101 \text{ min} = 60,6 \text{ min} = 60 \text{ min } 36 \text{ s}$ .
- c) Koliko su ukupno dodavanja uputili igrači Fenerbahçea? Ovo je malo teže, a dobije se rješavanjem linearne jednadžbe s jednom nepoznicom:  $83 \% x = 427$ , dakle je  $x = \frac{427}{83} = \frac{42700}{83} = 514,45$ . Učenici bi ovdje zaključili da su igrači Fener-

bahçea uputili 514 ili 515 dodavanja i vjerojatno sami uočili da je 83 % samo zaokruženi postotak. No, zanimljivo bi bilo komentirati da u istoj statistici piše da je upućenih udaraca bilo 516 (lakši zadatak za učenike bio bi da su iz 427 uspješna i tog ukupnog broja trebali izračunati postotak uspješnosti) i prepustiti učenicima da otkriju u čemu je problem (nije greška, nego i 427:516 zaokruženo na puni postotak daje 83 %). Ovo ne samo da potiče diskusiju o greškama zaokruživanja i njihovoj važnosti odnosno prihvatljivosti, nego se prirodno može proširiti zatom: Ako je poznat broj uspješnih (alternativno svih) dodavanja, za koje se ukupne (odnosno uspješne) brojeve dodavanja dobije postotak 83 %?

## Nogomet u statistici 6. razreda OŠ

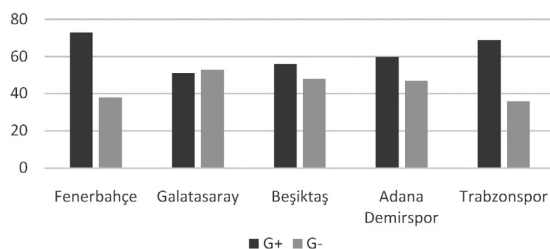
Kad nam trebaju neki numerički i lako dostupni podatci za nastavne teme koje uključuju prikaz i analizu podataka, nogomet je idealan. Jedan primjer koji uključuje skupljanje i prikaz podataka već smo susreli u članku [6]. Tamo u primjeru 6 predlažemo da učenici stupčastim dijagramom prikažu podatke o ukupnim brojevima pogodaka u utakmicama jednog prvenstva. Ako u 5. ili 6. razredu učenici u sklopu proširenog sadržaja nauče računati aritmetičku sredinu podataka, takav je prikaz sad idealno nadopuniti izračunavanjem aritmetičke sredine broja pogodaka, tj. prosječnog broja pogodaka po utakmici. Posebno korisno onda može biti usporediti najčešći i prosječni broj pogodaka u različitim prvenstvima, iz čega će učenici moći i sami zaključiti o bitnoj razlici prosječne i najčešće vrijednosti [9].

Dajmo još jedan primjer prikladan za korištenje nogometa u nastavi matematike, a koji uključuje skupljanje, tabeliranje i prikaz podataka.

**Primjer 6.** Zadatak za učenike mogao bi biti da odaberu nogometnu ligu po izboru i da za prethodnu sezonu pronađu, tabeliraju i prikladnim stupčastim dijagramima prikažu brojeve primljenih i danih pogodaka za, recimo, pet klubova te lige. Kao proširenje može se zadati da razvrstaju brojeve primljenih i danih pogodaka na one u utakmicama gdje su klubovi bili domaćini i one gdje su bili gosti. Ovakvi zadatci posebno su korisni za uvod u raspravu o tome kakvi trebaju biti dijagrami da bi bili korisni i realistično prikazali podatke: dobro označeni, jasno iscrtani, stupci iste širine, isto mjerilo za više dijagrama koje kanimo uspoređivati, ... Može im se dati i primjere boljih ili lošijih dijagrama pa da sami zakluče koji su bolji odnosno lošiji i zašto. Primjerice, na Slici 1. imamo (dobar) prikaz podataka o primljenim i danim

pogotcima za pet klubova turske *Süper lig* (Fenerbahçe, Galatasaray, Beşiktaş, Adana Demirspor, Trabzonspor) u sezoni 2021./22. (podatci su preuzeti s [10]).

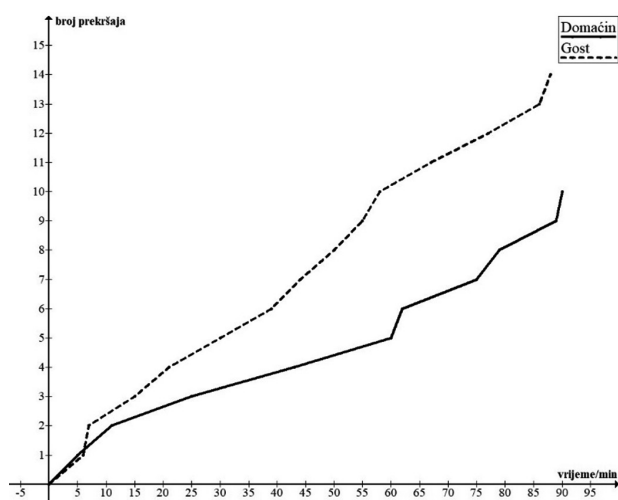
### Dani i primljeni pogotci u sezoni 2021. / 2022.



Slika 1. Prikaz podataka o pogotcima pet turskih klubova 2021./22.

U 6. razredu učenici se susreću i s linijskim dijagramima u pravokutnom koordinatnom sustavu. Dok oni nisu najprikladniji za prikaz brojeva pogodaka kao u prethodnom primjeru ili onome iz članka [6], jer podatci na horizontalnoj osi nisu kontinuirani, u nogometnom kontekstu prikladni su kad god prikazujemo neke podatke tijekom jedne utakmice, dakle kad apscisa predstavlja vrijeme. Evo jedan takav primjer za kraj.

**Primjer 7.** Zamolite učenike da pogledaju bilo koju nogometnu utakmicu po vlastitom izboru, te da tijekom njena trajanja za obje momčadi bilježe minute u kojima su im suđeni prekršaji.<sup>4</sup> U istom koordinatnom sustavu trebaju (različitim bojama ili tipovima crta) linijskim dijagramima – poput našeg izmišljenog na Slici 2. – prikazati kako se za koju momčad kretao broj prekršaja od početka do kraja utakmice.



Slika 2. Linijski dijagrami brojeva prekršaja do pojedine minute susreta za domaćina i gosta u izmišljenom susretu

<sup>4</sup>Podatke o minutama u kojima su počinjeni prekršaji za prošle utakmice nismo uspjeli naći ni na kojoj web-stranici, te zato preporučamo skupljanje podataka „uživo“.

---

## Zaključak

Drugi dio matematičkog obrazovanja započeli smo još prošli put u vidu predmetne nastave. Primjećujemo kako naša matematika napreduje i dobiva sve veći smisao. Kao što smo imali priliku čitati, učenici uvelike koriste razlomke u računskim operacijama te negativne cijele brojeve s kojima lakše shvaćamo pojam *gol-razlike*. Ono što je usko povezano s razlomcima jesu postotci koji se, kako smo već spomenuli, po novome obrađuju u šestom razredu. Moramo biti svjesni da je ovo samo uvod u postotke, ali opet je dovoljno da se shvate osnovni zadatci kao iz gore navedenog primjera. Također, statistika u ovom razredu poprima veću važnost pa lako možemo implementirati linijske i stupčaste dijagrame sve u cilju boljeg shvaćanja određenog gradiva.

Ostala su nam još dva razreda predmetne nastave gdje nas čeka još mnogo nogometnih primjera u kojima pronalazimo različite matematičke vrijednosti.

### Literatura:

1. Odluka o donošenju kurikuluma za nastavni predmet Matematike za osnovne škole i gimnazije u Republici Hrvatskoj. Narodne novine 7/2019. [https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019\\_01\\_7\\_146.html](https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html)
2. Mijač, F. (2021.), Nogomet u nastavi matematike. Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu
3. Nastavni plan i program za osnovnu školu: Matematika. Narodne novine 102/2006. <https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/dodatni/129156.htm>
4. Sofascore, <https://www.sofascore.com/>
5. Brückler, F. M. Nogomet u nastavi matematike 2. razreda osnovne škole. Poučak 89 (2022.), 44–47
6. Mijač, F., Brückler, F. M. Nogomet u nastavi matematike 3. razreda osnovne škole. Poučak 90 (2022.), 52–57
7. Brückler, F. M., Mijač, F. Nogomet u nastavi matematike 4. razreda osnovne škole. Poučak 91 (2022.) 40–45
8. Hrvatski nogometni savez, *Pravila nogometne igre 21./22.* (2021.). <https://hns-cff.hr/files/documents/21824/PNI%202021-2022.pdf>
9. Brückler, F. M., Mijač, F. A Football Trip Through Mathematics. *Advances in Research on Teaching Mathematics* (Eds.: Z. Kolar Begović, R. Kolar-Šuper, A. Katalenić), Osijek, 2022.
10. Fussballdaten.de, <https://www.fussballdaten.de/>