Više načina rješavanja jednog zadatka

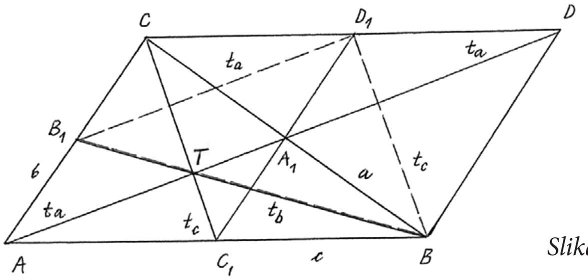
Jens Carstensen[1] i Alija Muminagić[2]

Ovaj članak počinjemo citatom iz [1]: *Zašto razmatrati više načina rješavanja? Zar nije dovoljan samo jedan način budući da on vodi do onog što se traži, a to je rješenje zadatka? Naravno da je dovoljan jedan način rješavanja ako je cilj samo rješenje zadatka. No, ako se želi postići više, onda nije dovoljan. Što je to više? Za nalaženje rješenja zadatka potrebno je određeno znanje koje se sastoji od teorijskih činjenica koje su u najužoj vezi sa zadatkom. Za jedan način rješavanja potrebne su jedne činjenice, za drugi način neke druge činjenice, za treći treće. Zaključujemo da će za rješavanje zadatka na više načina trebati više teorijskih činjenica i metoda nego za rješavanje na samo jedan način. Time se za samo jedan zadatak aktivira, analizira i primjenjuje veća količina stečenoga znanja. Osim toga, znanja se produbljuju i proširuju novim znanjima, a najvažnije je da zadatci s više načina rješavanja povećavaju aktivnost učenika i njihov interes za matematiku.*

Uvjerimo se u to rješavajući ovaj zadatak.

Zadatak. Duljine težišnica u danom su trokutu stranice novog trokuta čija je površina jednaka $\frac{3}{4}$ površine danog trokuta. Dokažite!

Rješenje 1.



Slika 1.

Neka su točke A_1, B_1 i C_1 redom polovišta stranica $\overline{BC}, \overline{CA}$ i $\overline{AB}$ trokuta ABC. Spojnice $\overline{AA_1}, \overline{BB_1}, \overline{CC_1}$ vrhova s polovištima nasuprotnih stranica zovemo težišnicama, a njihovo sjecište težištem T trokuta ABC. Uvedimo oznake $\overline{BC} = a$, $\overline{CA} = b$, $\overline{AB} = c$, $\overline{AA_1} = t_a$, $\overline{BB_1} = t_b$ i $\overline{CC_1} = t_c$. Produžimo težišnicu t_a preko točke A_1 do točke

[1]Jens Carstensen, Frederiksberg, Danska
[2]Alija Muminagić, Frederiksberg, Danska

D tako da je $|AA_1|=|A_1D|$, te spojimo točke B i C s točkom D (vidite Sliku 1.). Dobiveni četverokut $ABDC$ je paralelogram (zašto?). Točke A_1, B_1 i C_1 polovišta su stranica trokuta ABC, a na stranici $\overline{CD}$ četverokuta $ABDC$ odredimo točku D_1 tako da je D_1 polovište stranice $\overline{CD}$. Spojimo točke B_1 i D_1. Podsjetimo se: spojnica polovišta dviju stranica trokuta zove se srednjica trokuta. Vrijedi teorem: Srednjica trokuta paralelna je s trećom stranicom, a njezina duljina jednaka je polovici duljine te stranice. (Dokažite!)

Dakle, $\overline{B_1D_1}$ srednjica je trokuta ADC i vrijedi $B_1D_1 \parallel AD$, te je

$$|B_1D_1|=\frac{1}{2}|AD|=\frac{1}{2}\cdot 2t_a=t_a .$$

Lako se dokazuje da je $|BD_1|=|CC_1|=t_c$ i zbog $|BB_1|=t_b$ trokut BD_1B_1 ima stranice čije su duljine t_a, t_b *i* t_c.

Sada imamo $2\cdot P(ABC)=P(ABDC)$ i $P(BDD_1)=\frac{1}{2}P(BDC)=\frac{1}{2}P(ABC)$.

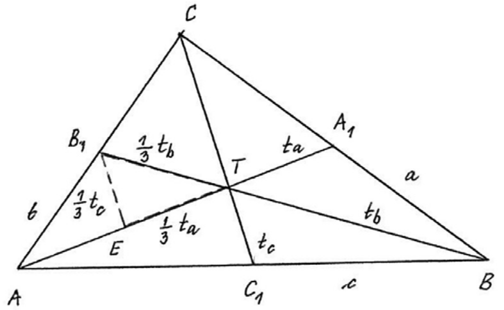
Osim toga je $P(ABB_1)=\frac{1}{2}P(ABC)$ (jer je $\overline{BB_1}$ težišnica trokuta ABC, a težišnica dijeli trokut na dva dijela jednakih površina. Dokažite!).

Dalje je $P(B_1D_1C)=\frac{1}{4}P(ADC)=\frac{1}{4}P(ABC)$ (jer su duljine stranica trokuta B_1D_1C jednake polovinama duljina stranica trokuta ABC. Objasnite!).

Konačno imamo da je (vidite Sliku 1.)

$$P(B_1BD_1)=P(ABDC)-P(BDD_1)-P(B_1D_1C)-P(ABB_1)$$
$$=2P(ABC)-\frac{1}{2}P(ABC)-\frac{1}{4}P(ABC)-\frac{1}{2}P(ABC)=\frac{3}{4}P(ABC).$$

Rješenje 2. U ovom rješenju primjenjujemo teorem: Težište T dijeli svaku težišnicu u omjeru 2 : 1 mjereći od vrha trokuta.



Slika 2.

Prema oznakama sa Slike 2. je $|B_1T|=\frac{1}{3}t_b$ i $|AT|=\frac{2}{3}t_a$. Neka je točka E polovište dužine $\overline{AT}$, tj. $|ET|=\frac{1}{2}|AT|=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}t_a=\frac{1}{3}t_a$. Sada imamo: $P(ATB_1)=2\cdot P(ETB_1)$ i $P(ABT)=2\cdot P(ATB_1)$ (Objasnite!), pa je

$$P(ABB_1) = P(ABT) + P(ATB_1) = 2P(ATB_1) + P(ATB_1) =$$
$$= 3P(ATB_1) = 3 \cdot 2 \cdot P(ETB_1) = 6P(ETB_1),$$

te

$$P(ABC) = 2 \cdot P(ABB_1) = 12 \cdot P(ETB_1). \tag{1}$$

Ovdje smo koristili činjenice iz Rješenja 1.

Trokut ETB_1 ima duljine stranica $\frac{1}{3}t_a, \frac{1}{3}t_b, \frac{1}{3}t_c$, a trokut B_1BD_1(vidite Sliku 1.) ima duljine stranica t_a, t_b, t_c. Dokažite da je $\triangle ETB_1 \sim \triangle ABC$, pa nakon toga dokažite teorem: Površine sličnih trokuta odnose se kao kvadrati bilo koje dvije homologne stranice (ili homologne visine).

Dakle, u ovom slučaju vrijedi

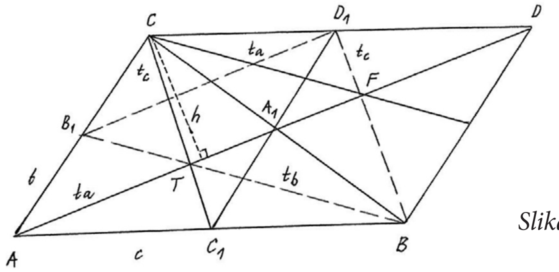
$$\frac{P(ETB_1)}{P(B_1BD_1)} = \frac{\left(\frac{1}{3}t_a\right)^2}{t_a^{\,2}},$$

tj.

$$P(B_1BD_1) = 9 \cdot P(ETB_1). \tag{2}$$

Konačno, iz (1) i (2) slijedi $\frac{P(B_1BD_1)}{P(ABC)} = \frac{9 \cdot P(ETB_1)}{12 \cdot P(ETB_1)}$, tj. $P(B_1BD_1) = \frac{3}{4}P(ABC)$.

Rješenje 3. Ovo rješenje dajemo u „komprimiranom” obliku. Čitateljima prepuštamo da raspišu tekst koji slijedi uz rješenje.



Slika 3.

Imamo (vidite Sliku 3.) $|TC| = \frac{2}{3}t_c$, $|TA_1| = \frac{1}{3}t_a$, $|A_1F| = \frac{1}{3}t_a$ i $|TF| = |TA_1| + |A_1F| = \frac{2}{3}t_a$.

Dakle, $|TC| = \frac{2}{3}t_c$, $|TF| = \frac{2}{3}t_a$ i $|FC| = \frac{2}{3}t_b$.

Nadalje, vrijedi

$$\frac{P(TFC)}{P(B_1BD_1)} = \frac{\left(\frac{2}{3}t_a\right)^2}{t_a^{\,2}}, \text{ tj. } P(TFC) = \frac{4}{9}P(B_1BD_1), \tag{3}$$

$$P(ABC)=P(AA_1C)+P(ABA_1)=P(AA_1C)+P(A_1DC)=P(ADC)\,,$$

$$\frac{P(TFC)}{P(ADC)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot|TF|\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot|AD|\cdot h}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot t_a\cdot h}{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot t_a\cdot h}=\frac{1}{3}\,,$$

tj.

$$P(TFC)=\frac{1}{3}P(ADC)=\frac{1}{3}P(ABC) \tag{4}$$

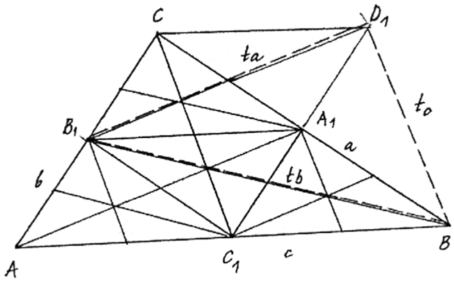
Iz (3) i (4) dobivamo

$$P(B_1BD_1)=\frac{9}{4}\cdot P(TFC)=\frac{9}{4}\cdot\frac{1}{3}P(ABC)=\frac{3}{4}P(ABC)\,.$$

Rješenje 4. Težišnice $\overline{AA_1}$, $\overline{BB_1}$ i $\overline{CC_1}$ dijele trokut ABC na četiri sukladna trokuta AC_1B_1, C_1BA_1, A_1CB_1 i $A_1B_1C_1$. Težišnice u tim trokutima dijele ih na 6 sukladnih trokuta. Dakle, ukupno 24 trokuta.

Dalje je lako (vidite Sliku 4.). Površina trokuta B_1BD_1 pokriva $2\cdot 9=18$ trokuta, pa je

$$\frac{P(B_1BD_1)}{P(ABC)}=\frac{18}{24}=\frac{3}{4}\,.$$



Slika 4.

Rješenje 5. Teorem: Duljina težišnice $\overline{AA_1}$ dana je s $t_a=|AA_1|=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}$ i slično, za preostale dvije težišnice vrijedi $t_b=\frac{1}{2}\sqrt{2(c^2+a^2)-b^2}$ i $t_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$.

Osim toga, poznata nam je Heronova formula za izračunavanje površine trokuta $P(ABC)=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gdje je $\dfrac{a+b+c}{}$.

Sada imamo

$$\begin{aligned}\left[P(ABC)\right]^2&=s(s-a)(s-b)(s-c)=\frac{1}{2}(a+b+c)\cdot\frac{1}{2}(b+c-a)\cdot\frac{1}{2}(a+c-b)\cdot\frac{1}{2}(a+b-c)\\&=\frac{1}{16}\left[(b+c)^2-a^2\right]\cdot\left[a^2-(c-b)^2\right]\\&=\frac{1}{16}\left[2bc+c^2-(a^2-b^2)\right]\cdot\left[2bc-c^2+(a^2-b^2)\right]\\&=\frac{1}{16}\left[4b^2c^2-c^4+(a^2-b^2)\cdot 2c^2-(a^2-b^2)^2\right]\\&=\frac{1}{16}\left[c^2(2a^2+2b^2-c^2)-(a^2-b^2)^2\right].\end{aligned}$$

U trokutu B_1BD_1 duljine stranica su t_a, t_b, t_c, pa je

$$\left[P(B_1BD_1)\right]^2=\frac{1}{16}\left[t_c^{\,2}(2t_a^{\,2}+2t_b^{\,2}-t_c^{\,2})-(t_a^{\,2}-t_b^{\,2})^2\right].$$

Izračunamo

$$2t_a^{\,2}+2t_b^{\,2}-t_c^{\,2}=\frac{1}{2}\left(2b^2+2c^2-a^2\right)+\frac{1}{2}\left(2c^2+2a^2-b^2\right)-\frac{1}{4}\left(2a^2+2b^2-c^2\right)=\frac{9}{4}c^2$$

i

$$(t_a^{\,2}-t_b^{\,2})^2=\left[\frac{1}{4}\left(2c^2+2a^2-b^2\right)-\frac{1}{4}\left(2c^2+2b^2-a^2\right)\right]^2=\frac{9}{16}\left(b^2-a^2\right)^2,$$

pa je

$$\left[P(B_1BD_1)\right]^2=\frac{1}{16}\left[\frac{9}{4}c^2\cdot\frac{1}{4}\left(2a^2+2b^2-c^2\right)-\frac{9}{16}\left(b^2-a^2\right)^2\right]$$
$$=\frac{1}{16}\cdot\frac{9}{16}\left[\left[c^2(2a^2+2b^2-c^2)-(b^2-a^2)^2\right]\right]=\left[\frac{9}{16}\cdot P(ABC)\right]^2,$$

i konačno, $P(B_1BD_1)=\frac{3}{4}P(ABC)$.

Za kraj...

1. Vidjeli smo da postoji trokut čije su duljine stranica težišnice danog trokuta ABC. Riješite sada ovaj zadatak: Konstruirajte trokut ABC kojemu su poznate sve tri težišnice t_a, t_b *i* t_c.
2. Površinu trokuta, čije su duljine stranica poznate, računamo pomoću Heronove formule. U Rješenju 5. vidjeli smo kako možemo izračunati površinu trokuta čije su duljine težišnica poznate.
3. Prirodno je sada zapitati se možemo li izračunati površinu trokuta čije su duljine visina poznate? Konstruirajte trokut ABC kojemu su poznate sve tri visine h_a, h_b *i* h_c.
4. Možemo li izračunati površinu trokuta čije su duljine simetrala unutrašnjih kutova toga trokuta poznate?
5. Možemo li konstruirati trokut ABC kojemu su poznate duljine s_α, s_β, s_γ simetrala njegovih kutova?
6. Možete li zadatak riješiti na još neki način?

Literatura:

1. Kurnik, Z. (2010.). *Posebne metode rješavanja matematičkih problema*. Element. Zagreb.
2. Palman, D. (1994.). *Trokut i kružnica*. Element. Zagreb.
3. Pavković, B., Veljan, D. Z. (1992.). *Elementarna matematika 1*. Tehnička knjiga. Zagreb.