MATEMATIKA

Neke nejednakosti četverokuta

Daniela Zubović[1], *Šefket Arslanagić*[2]

U ovom članku bit će govora o nekim nejednakostima četverokuta. Većinu njih ćemo dokazati koristeći poznatu nejednakost trokuta koja glasi:

Svaka stranica trokuta manja je od zbroja drugih dviju, a veća od njihove razlike, tj.

$$a - b < c < a + b,$$

gdje su a, b, c duljine stranica.

Također će nam biti potrebna i ostala elementarna znanja iz geometrije, kao što su: teorem o srednjici trokuta, sličnost trokuta i teorem o tangencijalnom četverokutu. Dat ćemo više primjera nejednakosti četverokuta.

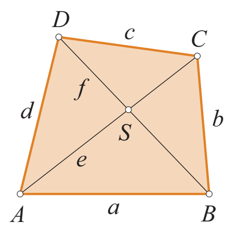
Primjer 1. Dokazati da je zbroj duljina dijagonala svakog četverokuta manji od njegovog opsega, a veći od njegovog poluopsega.

Rješenje. Neka su u četverokutu $ABCD$, $e = |AC|$, $f = |BD|$ duljine dijagonala, a $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |AD|$ duljine njegovih stranica. Na osnovu spomenutog teorema o stranicama trokuta imamo

$$e < a + b, \quad e < c + d, \quad f < b + c, \quad f < a + d.$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo

$$e + f < a + b + c + d.$$



Slika 1.

Neka je točka S presjek dijagonala četverokutu $ABCD$ (slika 1). Iz trokuta ABS, BCS, CDS, ADS imamo

$$a < |AS| + |BS|, \quad b < |BS| + |CS|, \quad c < |CS| + |DS|, \quad d < |DS| + |AS|,$$

te nakon zbrajanja ovih nejednakosti

$$a + b + c + d < 2\left(|AS| + |BS| + |CS| + |DS|\right),$$

tj.

$$\left(|AS| + |CS|\right) + \left(|BS| + |DS|\right) > \frac{1}{2}\left(a + b + c + d\right),$$

te

$$e + f > \frac{1}{2}\left(a + b + c + d\right),$$

što je i trebalo dokazati.

Primjer 2. Ako su a, b, c, d duljine stranica četverokuta i e, f duljine njegovih dijagonala, dokazati

$$(a + b + c + d)(e + f) > 2\left(e^2 + f^2\right).$$

[1] Autorica je viša stručna suradnica na Prirodno-matematičkom fakultetu u Sarajevu; e-pošta: `dzubovic@pmf.insa.ba`

[2] Autor je bio izvanredni profesor u miru na PMF-u u Sarajevu.

Rješenje. Iz teorema koji vrijedi za stranice trokuta imamo:

$$a+b>e, \quad c+d>e, \tag{1}$$

$$a+d>f, \quad b+c>f. \tag{2}$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo

$$a+b+c+d>2e, \quad a+b+c+d>2f,$$

tj.

$$(a+b+c+d)\cdot e>2e^2, \quad (a+b+c+d)\cdot f>2f^2,$$

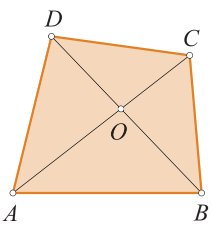
i nakon zbrajanja

$$(a+b+c+d)(e+f)>2\left(e^2+f^2\right),$$

što je i trebalo dokazati.

Primjer 3. Dokazati da u svakom konveksnom četverokutu postoji stranica koja je manja od dulje dijagonale.

Rješenje. Neka je u četverokutu $ABCD$ dijagonala $\overline{AC}$ dulja od dijagonale $\overline{BD}$.



Slika 2.

Pretpostavimo suprotno tj. neka vrijedi $|AB|$, $|BC|$, $|CD|$, $|DA|>|AC|$. Nakon zbrajanja slijedi

$$|AB|+|BC|+|CD|+|DA|>4|AC|. \tag{3}$$

Zbog $|AC|>|BD|$ vrijedi i

$$4|AC|>2\left(|AC|+|BD|\right). \tag{4}$$

Iz (3) i (4) sada imamo

$$|AB|+|BC|+|CD|+|DA|>4|AC|>2\left(|AC|+|BD|\right). \tag{5}$$

Dokažimo da nejednakost (5) ne može vrijediti.

Sa slike 2 vidimo:

$$|AB|<|AO|+|BO|, \quad |BC|<|BO|+|CO|, \quad |CD|<|CO|+|DO|, \quad |AD|<|DO|+|AO|.$$

Zbrajanjem prethodnih nejednakosti dobivamo

$$|AB|+|BC|+|CD|+|DA|<2\left(|AC|+|BD|\right),$$

što je u suprotnosti s (5). Prema tome, postoji bar jedna stranica konveksnog četverokuta koja je manja od dulje dijagonale tog četverokuta.

Primjer 4. Ako su točke P i Q središta stranica $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ četverokuta $ABCD$, dokazati

$$\big||AB|-|CD|\big|\leqslant 2|PQ|\leqslant |AB|+|CD|.$$

Rješenje. Neka je točka M središte dužine $\overline{AC}$. Tada po teoremu o srednjici trokuta, za trokute ABC i ACD vrijedi

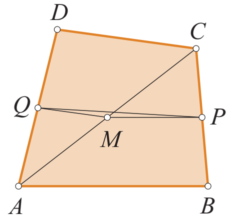
$$|AB|=2|PM| \quad \text{i} \quad |CD|=2|QM|. \tag{6}$$

Zbrajanjem nejednakosti (6) dobivamo

$$|AB|+|CD|=2(|PM|+|QM|)\geqslant 2|PQ|,$$

tj.

$$2|PQ|\leqslant |AB|+|CD|.$$



Slika 3.

Oduzimanjem nejednakosti (6) dobivamo

$$||AB| - |CD|| = 2||PM| - |QM|| \leqslant 2|PQ|,$$

tj.

$$||AB| - |CD|| \leqslant 2|PQ|,$$

što je i trebalo dokazati. Znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je $AB \| CD$ (i tada su točke P, M i Q kolinearne).

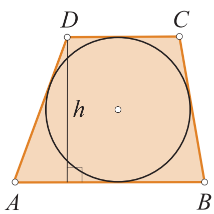
Primjer 5. Oko kruga je opisan četverokut $ABCD$ kod kojeg je $AB \| CD$. Dokazati

$$|AB| + |CD| \geqslant 2\sqrt{P},$$

gdje je P površina četverokuta.

Rješenje. Iz uvjeta zadatka slijedi da je četverokut $ABCD$ trapez. Iz slike 4 imamo

$$P = \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot h. \tag{7}$$



Slika 4.

Zbog $h \leqslant |AD|$ i $h \leqslant |BC|$ je $2h \leqslant |AD| + |BC|$, tj.

$$h \leqslant \frac{|AD| + |BC|}{2}. \tag{8}$$

Zbog činjenice da je četverokut $ABCD$ tangencijalni, vrijedi i $|AD| + |BC| = |AB| + |CD|$, pa iz (8) imamo

$$h \leqslant \frac{|AB| + |CD|}{2}. \tag{9}$$

Iz (7) i (9) je

$$P \leqslant \frac{|AB| + |CD|}{2} \cdot \frac{|AB| + |CD|}{2},$$

odnosno

$$(|AB| + |CD|)^2 \geqslant 4P, \quad \text{tj.} \quad |AB| + |CD| \geqslant 2\sqrt{P},$$

što je i trebalo dokazati. Jednakost vrijedi ako i samo ako je četverokut $ABCD$ kvadrat.

⋆ ⋆ ⋆

Preporučamo čitateljima da riješe sljedeće zadatke:

1. Dokazati da u četverokutu $ABCD$ vrijedi nejednakost $|AD| \cdot |BC| + |AB| \cdot |CD| \geqslant |AC| \cdot |BD|$.
2. Površina trapeza iznosi 1. Koju najmanju vrijednost može imati njegova dulja dijagonala?
3. Dokazati da je zbroj udaljenosti od proizvoljne točke ravnine od tri vrha jednakokračnog trapeza veća od udaljenosti te točke do četvrtog vrha.
4. Dokazati da je trostruka duljina dijagonale pravokutnika veća od njegovog opsega.
5. Ako su a i b duljine stranica paralelograma, a e i f duljine njegovih dijagonala, dokazati nejednakost $a^2 - b^2 < ef$.

Literatura

[1] Šefket Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.

[2] Anđelko Marić, *Planimetrija, Zbirka riješenih zadataka*, Element, Zagreb, 1996.