Pronađi put do rješenja

Jens Carstensen, Alija Muminagić

U ovom prilogu promatramo dva identiteta.

I. Promatrajmo najprije jednakosti:

$$2^2+3^2+4^2+14^2=15^2$$
$$4^2+5^2+6^2+38^2=39^2$$
$$6^2+7^2+8^2+74^2=75^2.$$

Kako doći do identiteta koji generira gornje jednakosti?

Uočavamo da je prvi pribrojnik u svakoj od tih jednakosti kvadrat parnog broja, tj. $(2n)^2$, za prirodan broj n. Sada lako vidimo da je drugi pribrojnik $(2n+1)^2$ i treći $(2n+2)^2$. Četvrti pribrojnik je mali problem! Označimo ga s x^2. Dalje je lako! Vrijednost zbroja na desnoj strani u tim jednakostima je $(x+1)^2$. Dakle, redom imamo:

$$(2n)^2+(2n+1)^2+(2n+2)^2+x^2=(x+1)^2$$
$$4n^2+4n^2+4n+1+4n^2+8n+4+x^2=x^2+2x+1$$
$$x=6n^2+6n+2.$$

Dobivamo identitet

$$(2n)^2+(2n+1)^2+(2n+2)^2+(6n^2+6n+2)^2=(6n^2+6n+3)^2.$$

Za $n=1,2,3$ lako provjerimo gornje jednakosti.

II. Promatrajmo sada ove jednakosti:

$$\begin{gathered}3^2+4^2=5^2\\ 10^2+11^2+12^2=13^2+14^2\\ 21^2+22^2+23^2+24^2=25^2+26^2+27^2.\end{gathered}\tag{1}$$

Prirodno je zapitati se kako smo do njih došli.

Primijetimo da na lijevoj strani imamo zbroj $k+1$ uzastopnih kvadrata prirodnih brojeva, a na desnoj zbroj sljedećih k kvadrata prirodnih brojeva. Ako je prvi kvadrat na lijevoj strani n^2, imamo:

$$\begin{aligned}&n^2+(n+1)^2+\cdots+(n+k-1)^2+(n+k)^2\\&\quad=(n+k+1)^2+(n+k+2)^2+\cdots+(n+2k-1)^2+(n+2k)^2.\end{aligned}\tag{2}$$

Sređivanjem dobivamo:

$$[(n+k+1)^2-n^2]+[(n+k+2)^2-(n+1)^2]$$
$$+\cdots+[(n+2k)^2-(n+k-1)^2]-(n+k)^2=0$$
$$(k+1)[k(2n+k)+(1+3+\cdots+2k-1)]-(n+k)^2=0$$
$$(k+1)(2nk+k^2+k^2)-(n+k)^2=0$$
$$(n+k)(2k^2+k-n)=0.$$

Zbog $n+k\neq 0$ je $n=2k^2+k$ i vrijedi identitet (2).

Za $n=1,2,3$ dobivaju se jednakosti pod (1).