ZADATCI I RJEŠENJA

Redakcija, iz tehničkih razloga, daje ovo upozorenje:

Krajnji rok za primanje rješenja iz ovog broja je 29. veljače 2024. Rješenja (i imena rješavatelja) bit će objavljena u br. $4/296$.

Ujedno molimo da pripazite na upute rješavateljima koje su na str. 140.

A) Zadatci iz matematike

3945. U dekadskom sustavu odredi posljednju znamenku broja

$$23^{23^{23^{23}}}.$$

3946. Neka su M i N redom polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ četverokuta $ABCD$. Dokaži $|AN|^2+|DM|^2+|BC|^2=|BN|^2+|CM|^2+|AD|^2$.

3947. Dokaži da ne postoje različiti pozitivni cijeli brojevi a i b takvi da je $2a(a^2+3b^2)$ potpuni kub.

3948. Ako su p i q rješenja kvadratne jednadžbe

$$ax^2+bx+c=0,$$

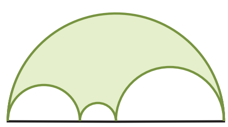
kako glasi kvadratne jednadžba čija su rješenja $ap+b$ i $aq+b$?

3949. Ako je

$$a=\log_{105}294 \quad \text{i} \quad b=\log_{70}21,$$

izrazi $x=\log_{14}21$ pomoću a i b.

3950. Na slici je prikazan lik koji se sastoji od četiri polukružnice čiji su polumjeri različiti cijeli brojevi. Ako je opseg lika 18π, a njegova površina $k\pi$, gdje je k prost broj, odredi k.



3951. Dijagonale trapeza $ABCD$ $(AB\|CD)$ sijeku se u točki O. Odredi površinu trapeza ako su površine trokuta ABO i CDO redom jednake a^2 i b^2?

3952. Dan je konveksan tetivan četverokut kod kojeg je $\sphericalangle ACB=2\sphericalangle CAD$ i $\sphericalangle ACD=2\sphericalangle BAC$. Dokaži $|BC|+|CD|=|AC|$.

3953. Dokaži da je u trapezu zbroj kvadrata dijagonala jednak zbroju kvadrata neparalelnih stranica uvećan za dvostruki produkt paralelnih stranica.

3954. Za stranice a, b, c nedegeneriranog trokuta ABC vrijedi $b^2=ca+a^2$ i $c^2=ab+b^2$. Odredi kutove trokuta.

3955. Nađi sva rješenja jednadžbe

$$\sin^7 x+\frac{1}{\sin^3 x}=\cos^7 x+\frac{1}{\cos^3 x}.$$

3956. Nađi sve $z\in\mathbb{C}$ za koje vrijedi

$$|z-2|=2 \quad \text{i} \quad \arg\left[(z-2)^6\cdot(\overline{z}-2)^2\right]=\frac{3\pi}{2}.$$

3957. Dana je kružnica k i tangenta t u točki M te kružnice. Iz proizvoljne točke A na pravcu p koji je paralelan s t i ne siječe kružnicu, povučene su tangente na danu kružnicu koje sijeku travac t u točama X i Y. Dokaži da vrijednost umnoška $|XM|\cdot|YM|$ ne ovisi o izboru točke A.

3958. Dokaži da je determinanta

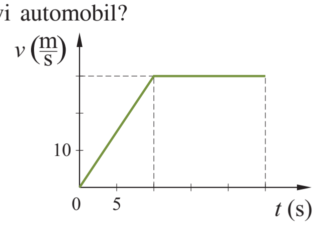
$$\begin{vmatrix} \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} & \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} & \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \\ \cos\dfrac{\beta-\gamma}{2} & \sin\dfrac{\beta+\gamma}{2} & \cos\dfrac{\beta+\gamma}{2} \\ \cos\dfrac{\gamma-\alpha}{2} & \sin\dfrac{\gamma+\alpha}{2} & \cos\dfrac{\gamma+\alpha}{2} \end{vmatrix}$$

jednaka

$$\frac{1}{2}\left(\sin(\beta-\alpha)+\sin(\gamma-\beta)+\sin(\alpha-\gamma)\right).$$

B) Zadatci iz fizike

OŠ – 526. Dio gibanja automobila tijekom testne vožnje je prikazan v-t grafom. Koliko mora biti dugačka staza za testiranje, ako pretpostavimo da vozaču treba 60 metara da sigurno zaustavi automobil?



OŠ – 527. Marko je za zadaću trebao odrediti faktor trenja za kontakt drvo-drvo, ali mu je njegova sestrica potrgala dinamometar kojim je trebao mjeriti silu trenja. Nije znao ni masu kvadra iz pribora za fiziku koji je trebao vući. Izmjerio je da mu duljina iznosi 20, širina 10 i visina 4 cm. U tablicama je našao podatak da je gustoća drva oko $700\ \mathrm{kg/m^3}$. Učvrstio je nepomični kolotur na stol i na jednu stranu objesio maslac mase 250 g, a na drugu kvadar koji je ostao na stolu. Kad je pustio maslac da pada sa stola kvadar se nije gibao jednoliko, ubrzavao je, pa je na njega dodao jednu čokoladu od 100 g. Nakon toga je gibanje kvadra, kojeg je preko koloture vukao padajući maslac, bilo jednoliko. Koliki je faktor trenja Marko izračunao?

OŠ – 528. Brzi vlak treba oko 4 sata i 20 minuta da prijeđe udaljenost između Zagreba i Rijeke koja iznosi 229 km. Kineski vlakovi koji postižu brzine od $350\ \mathrm{km/h}$ udaljenost između Pekinga i Šangaja prolaze za prosječno 5 sati. Udaljenost između ta dva kineska grada iznosi 1300 km. Koliko su puta brži kineski vlakovi od hrvatskih?

OŠ – 529. Elena želi uravnotežiti polugu dugačku 55 cm pomoću dva utega različitih masa. Kad je na oprugu objesila uteg A izmjerila je da se ona produljila 8 cm. S utegom B produljenje je iznosilo 14 cm. Utege je objesila na krajeve poluge. Koliko oslonac treba biti udaljen od utega A? Masa poluge je zanemariva.

1826. Raspon brzine kojom se planet Mars giba oko Sunca je od $21\,972\ \mathrm{km/s}$ do $26\,500\ \mathrm{km/s}$. Odredi pomoću Keplerovih zakona ekscentricitet putanje, ophodno vrijeme, te najmanju udaljenost Marsa od Zemlje, ako je Zemljina putanja kružnica radijusa 1 aj oko Sunca i ravnine orbitiranja Zemlje i Marsa se poklapaju. $1\ \mathrm{aj} = 149.6 \cdot 10^6\ \mathrm{km}$.

1827. Planet mase 10^{24} kg ima atmosferu mase 10^{18} kg. Koliki je tlak atmosfere na površini planeta, ako je njegova prosječna gustoća $4200\ \mathrm{kg/m^3}$?

1828. Kolika je prosječna snaga kočenja, ako je automobil kočio s brzine $54\ \mathrm{km/h}$ do zaustavljanja uz zaustavni put od 20 m? Masa automobila je 1600 kg.

1829. Tijelo mase 4 kg dignuto je 25 km s površine Zemlje. Kolika je pogreška ako potencijalnu energiju računamo u homogenom gravitacijskom polju jačine $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$ u odnosu na polje iste jakosti *na površini Zemlje* koje pada s kvadratom udaljenosti? Uzeti da je Zemlja kugla radijusa 6371 km.

1830. Radioizotop srebra $^{106}\mathrm{Ag}$ ima vrijeme poluživota 24 min. Ako je u nekom trenutku izmjerena aktivnost 1500 Bq (raspada u sekundi), kolika će biti aktivnost i broj neraspadnutih atoma nakon 3 sata?

1831. Koju maksimalnu temperaturu može doseći stijena na Mjesecu zbog grijanja od Sunca? Snaga Sunčevog zračenja je $1370\ \mathrm{W/m^2}$, Mjesec nema atmosferu i rotira zanemarivo polagano, a površina stijene se ponaša približno kao crno tijelo.

1832. Od tri otpornika nepoznatog otpora dva spojimo paralelno, te u seriju s trećim. Ovisno o odabiru trećeg otpornika, otpor dobivenog sklopa je $46\ \Omega$, $34.5\ \Omega$ ili $69\ \Omega$. Odredi otpore ta tri otpornika.

C) Rješenja iz matematike

3917. *Ako su $a \neq b$ pozitivni brojevi, $ab \neq 0$, dokaži da jednadžba*

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x-a} + \frac{1}{x-b} = 0$$

ima dva različita realna rješenja.

Rješenje. Uz standardne uvjete $x \neq 0$, $x \neq a$, $x \neq b$ jednadžbu pomnožimo s $x(x-a)(x-b)$ pa imamo

$$(x-a)(x-b) + x(x-b) + x(x-a) = 0$$
$$3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0.$$

Dobili smo kvadratnu jednadžbu, a ona ima dva realna i različita rješenja samo ako je njezina diskriminanta strogo veća od nule. Sada je:

$$\begin{aligned} D &= 4(a+b)^2 - 12ab \\ &= 4[(a-b)^2 + ab] > 0, \end{aligned}$$

za realne brojeve a, b kao u uvjetu zadatka. Ovime je tvrdnja dokazana.

Vid Horvat (4),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3918. *Dokaži da za pozitivne brojeve a, b, c vrijedi nejednakost*

$$\frac{ab}{a^5+a^2b^2c+b^5}+\frac{bc}{b^5+ab^2c^2+c^5}+\frac{ac}{a^5+a^2bc^2+c^5}\geq\frac{1}{abc}.$$

Rješenje. Vrijedi nejednakost

$$a^5+b^5\geq(a^3+b^3)\cdot\frac{a^2+b^2}{2},$$

jer se ona sređivanjem svede na nejednakost:

$$\begin{aligned}&a^5-a^3b^2-a^2b^3+b^5\\&=(a-b)^2(a+b)(a^2+ab+b^2)\geq 0\end{aligned}$$

koja očito vrijedi. Slično vrijedi i nejednakost

$$a^3+b^3\geq(a+b)\cdot\frac{a^2+b^2}{2},$$

jer se i ona svodi na očitu nejednakost

$$a^3-a^2b-ab^2+b^3=(a-b)^2(a+b)\geq 0.$$

Iz gornjih dviju nejednakosti imamo:

$$\begin{aligned}a^5+b^5&\geq(a^3+b^3)\cdot ab\\&\geq ab\cdot(a+b)\cdot\frac{a^2+b^2}{2}\\&\geq a^2b^2(a+b).\end{aligned}\tag{1}$$

Koristeći (1), slijedi tražena nejednakost:

$$\begin{aligned}L&=\frac{ab}{a^5+a^2b^2c+b^5}+\frac{bc}{b^5+ab^2c^2+c^5}\\&\quad+\frac{ac}{a^5+a^2bc^2+c^5}\\&\leq\frac{ab}{a^2b^2(a+b)+a^2b^2c}\\&\quad+\frac{bc}{b^2c^2(b+c)+ab^2c^2}\\&\quad+\frac{ac}{a^2c^2(a+c)+a^2bc^2}\\&=\frac{ab}{a^2b^2(a+b+c)}+\frac{bc}{b^2c^2(b+c+a)}\\&\quad+\frac{ac}{a^2c^2(a+c+b)}\\&=\frac{c+a+b}{abc(a+b+c)}=\frac{1}{abc}.\end{aligned}$$

Jednakost se postiže u slučaju $a=b=c$.

Marko Dodig (4),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

3919. *Ako su a, b, c duljine stranica trokuta, s njegov opseg i r, r_a, r_b, r_c polumjeri upisane i pripisanih mu kružnica, dokaži nejednakost*

$$\sqrt{\frac{a}{r_a}}+\sqrt{\frac{b}{r_b}}+\sqrt{\frac{c}{r_c}}\leq\frac{2}{3}\sqrt{\frac{s}{r}}.$$

Rješenje. Kako je $r_a=\dfrac{rs}{s-a}$, $r_b=\dfrac{rs}{s-b}$, $r_c=\dfrac{rs}{s-c}$ nejednakost je ekvivalentna sljedećoj

$$\sqrt{a(s-a)}+\sqrt{b(s-b)}+\sqrt{c(s-c)}\leqslant\frac{3}{2}s.$$

Iz A-G nejednakosti dobivamo:

$$\begin{aligned}&\sqrt{a(s-a)}+\sqrt{b(s-b)}+\sqrt{c(s-c)}\\&\leqslant\frac{a+s-a}{2}+\frac{b+s-b}{2}+\frac{c+s-c}{2}=\frac{3}{2}s,\end{aligned}$$

čime je nejednakost dokazana.

Marko Dodig (4), Zagreb

3920. *Neka su x, y, z međusobno različiti realni brojevi. Dokaži da je*

$$\sqrt[3]{x-y}+\sqrt[3]{y-z}+\sqrt[3]{z-x}\neq 0.$$

Rješenje. Rastavimo na faktore izraz

$$\begin{aligned}&A^3+B^3+C^3-3ABC\\&=(A+B+C)^3-3A^2B-3AB^2-3A^2C\\&\quad-3AC^2-3B^2C-3BC^2-9ABC\\&=(A+B+C)^3-3AB(A+B+C)\\&\quad-3AC(A+B+C)-3BC(A+B+C)\\&=(A+B+C)\\&\quad\cdot[(A+B+C)^2-3AB-3BC-3AC]\\&=(A+B+C)\\&\quad\cdot(A^2+B^2+C^2-AB-BC-AC).\end{aligned}$$

Sada stavimo $A=\sqrt[3]{x-y}$, $B=\sqrt[3]{y-z}$, $C=\sqrt[3]{z-x}$ i pretpostavimo suprotno tj. da vrijedi $A+B+C=0$. Prema gore navedenoj jednakosti je tada $A^3+B^3+C^3-3ABC=0$. Ali, kako je $A^3+B^3+C^3=x-y+y-z+z-x=0$ slijedi $ABC=\sqrt[3]{(x-y)(y-z)(z-x)}=0$, a to nije moguće jer su x, y, z različiti realni brojevi. Ovim proturječjem smo dokazali tvrdnju zadatka.

Marko Dodig (4), Zagreb

3921. *Neka su m i n pozitivni cijeli brojevi koji zadovoljavaju jednadžbu*

$$mn^2+876=4mn+217n.$$

Nađi sumu svih mogućih vrijednosti od m.

Rješenje.

$$mn^2+876=4mn+217n$$

$$mn^2-217n=4mn-876$$

$$n=\frac{4mn-876}{mn-217}=4-\frac{8}{mn-217}. \qquad (1)$$

Iz posljednje jednakosti uočavamo da $(mn-217)\,|8$, odakle je $mn-217=\pm1,\ \pm2,\ \pm4,\ \pm8$ i $mn\in\{218,216,219,215,221,213,225,209\}$. Iz (1) slijedi redom $n\in\{-4,12,0,8,2,6,3,5\}$. Kako su m,n prirodni brojevi imamo samo dvije mogućnosti koje zadovoljavaju uvjete zadatka:

$$m=\frac{mn}{n}\implies m=\frac{216}{12}=18$$

ili

$$m=\frac{225}{3}=75.$$

Znači, suma svih mogućih vrijednosti prirodnog broja m iznosi 93.

Marko Dodig (4), Zagreb

3922. *Dokaži da n-ti prosti broj p_n zadovoljava uvjet $p_n\le 2^{2^{n-1}}$ za svaki $n\ge1$.*

Rješenje. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom.

Baza. Za $n=1$ očito vrijedi jednakost $p_1=2=2^{2^0}$.

Pretpostavka. Neka za bilo koji $k\le n$ vrijedi $p_k\le 2^{2^{k-1}}$.

Korak. Dokažimo da tada vrijedi i $p_{k+1}\le 2^{2^k}$.

Gledamo broj $p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k+1$. On očito nije djeljiv niti jednim od brojeva $p_1,p_2,\ldots,p_k$, pa vrijedi

$$p_{k+1}\le p_1\cdot p_2\cdot\ldots\cdot p_k+1.$$

Koristeći pretpostavku indukcije dalje vrijedi

$$\begin{aligned}p_{k+1}&\le 2^1\cdot2^2\cdot2^4\cdot\ldots\cdot2^{2^{k-1}}+1\\&=2^{2^k-1}+1\le 2^{2^k}.\end{aligned}$$

Ovime smo tvrdnju dokazali.

Marko Dodig (4), Zagreb

3923. *Dan je Fibonaccijev niz $(F_1=1,\ F_2=1,\ F_n=F_{n-1}+F_{n-2},\ n>2)$. Dokaži*

$$\binom{n}{1}F_1+\binom{n}{2}F_2+\ldots+\binom{n}{n-1}F_{n-1}+F_n=F_{2n}.$$

Rješenje. Iskoristit ćemo činjenicu da je opći član Fibonaccijevog niza dan formulom

$$F_n=\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n\right],\quad n\ge0.$$

Ovdje smo uzeli $F_0=0$, i našu sumu sada zapisujemo:

$$\begin{aligned}S&=\sum_{k=0}^{n}F_k\cdot\binom{n}{k}\\&=\frac{1}{\sqrt5}\cdot\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^k\right.\\&\qquad\left.-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^k\right].\end{aligned}$$

Uočimo da su sume u zagradi gornjeg izraza zapravo raspisi po binomnom poučku od $(x+1)^n$, ako redom uzmemo $x=\dfrac{1\pm\sqrt5}{2}$. Zato dalje imamo:

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}+1\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}+1\right)^n\right]\\&=\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{3+\sqrt5}{2}\right)^n-\left(\frac{3-\sqrt5}{2}\right)^n\right].\end{aligned}$$

Kako je

$$\frac{3\pm\sqrt5}{2}=\left(\frac{1\pm\sqrt5}{2}\right)^2,$$

konačno slijedi:

$$\begin{aligned}S&=\sum_{k=0}^{n}F_k\cdot\binom{n}{k}\\&=\frac{1}{\sqrt5}\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{2n}-\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{2n}\right]\\&=F_{2n}.\end{aligned}$$

Marko Dodig (4), Zagreb

3924. *Neka je* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *niz brojeva sa svojstvima:*

i) $a_1 = 1$

ii) $a_{2n} = na_n$ *za svaki* $n \in \mathbb{N}$.

Koliko je $a_{2^{100}}$ *?*

Rješenje. Iz načina na koji je niz zadan slijedi redom:

$$\begin{aligned} a_{2^n} &= a_{2\cdot 2^{n-1}} = 2^{n-1}\cdot a_{2^{n-1}} \\ &= 2^{n-1}\cdot a_{2\cdot 2^{n-2}} \\ &= 2^{n-1}\cdot 2^{n-2}\cdot a_{2^{n-2}} = \ldots \\ &= 2^n\cdot 2^{n-1}\cdot \ldots \cdot 2^2\cdot 2^1 a_1 \\ &= 2^{(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1} \\ &= 2^{\frac{n\cdot(n-1)}{2}}. \end{aligned}$$

Specijalno je $a_{2^{100}} = 2^{4950}$.

Vid Horvat (4), Zagreb

3925. *U točki* D *kružnice polumjera* r *povučena je tangenta* t. *Neka je* C *drugi kraj promjera* $\overline{CD}$ *te kružnice i* O *njezino središte. Točkom* O *prolazi pravac koji siječe* t *u točki* A *tako da je* $\measuredangle DOA = 30^\circ$. *Na tangentu* t *nanese se dužina* $\overline{AB}$ *tako da je* $|AB| = 3r$ *i to na onu stranu od* A *na kojoj je i točka* D. *Dokaži da je* $|BC| \approx r\pi$. *Pokaži da ta konstrukcija za broj* π *daje približnu vrijednost*

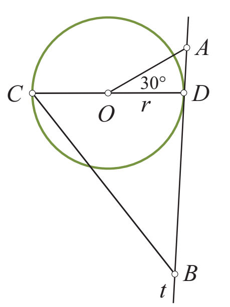
$$\pi \approx \sqrt{\frac{2(20-3\sqrt{3})}{3}},$$

što daje točnost na četiri decimale.

Rješenje. Dobivamo

$$|AD| = \frac{r}{\sqrt{3}}$$

$$|BD| = 3r - \frac{r}{\sqrt{3}}.$$



Sada je

$$\begin{aligned} |BC|^2 &= |CD|^2 + |BD|^2 \\ &= 4r^2 + \left(3r - \frac{r}{\sqrt{3}}\right)^2 \\ &= r^2\cdot\frac{2(20-3\sqrt{3})}{3} \end{aligned}$$

odakle slijedi

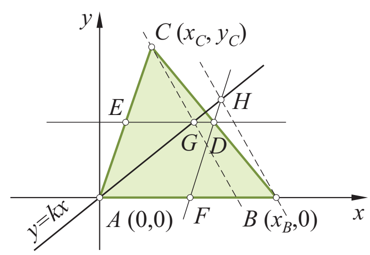
$$|BC| = r\sqrt{\frac{2(20-3\sqrt{3})}{3}} \approx r\cdot 31415\ldots$$

Ur.

3926. *U trokutu* ABC *polovišta stranica* $\overline{BC}$, $\overline{CA}$, $\overline{AB}$ *su redom* D, E, F. *Proizvoljan pravac kroz točku* A *siječe dužine* $\overline{DE}$, $\overline{DF}$ *(ili njihove produžetke) redom u* G, H. *Dokaži da su pravci* CG *i* BH *paralelni.*

Prvo rješenje. Smjestimo dani trokut u koordinatnu ravninu tako da se točka A nalazi u ishodištu, točka B na pozitivnom dijelu osi apscisa te točka C u gornjoj poluravnini (kao na slici). Označimo $A(0,0)$, $B(x_B,0)$, $C(x_C,y_C)$, pa su koordinate polovišta stranica

$$E\left(\frac{x_C}{2},\frac{y_C}{2}\right),\quad F\left(\frac{x_B}{2},0\right),\quad D\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_C}{2}\right).$$



Lako dobivamo jednadžbe pravaca:

$$ED \ \ldots \ y = \frac{y_C}{2} \quad \text{i}$$

$$DF \ \ldots \ y = \frac{y_C}{x_C}x - \frac{x_B y_C}{2x_C}.$$

Neka je $y = kx$ proizvoljan pravac točkom A. Njegov presjek s pravcima ED i DF su redom točke:

$$G\left(\frac{y_C}{2k},\frac{y_C}{2}\right) \quad \text{i}$$

$$H\left(\frac{x_B y_C}{2(y_C-kx_C)},\frac{kx_B y_C}{2(y_C-kx_C)}\right),$$

a dobijemo ih rješavanjem jednostavnih linearnih sustava. Sada računamo koeficijente smjera pravaca CG i BH:

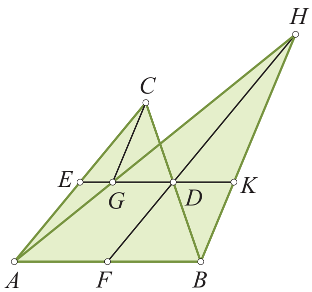
$$k_{CG} = \frac{y_C - \frac{y_C}{2}}{x_C - \frac{y_C}{2k}} = \frac{ky_C}{2kx_C - y_C},$$

$$k_{BH} = \frac{\frac{kx_By_C}{2\,(y_C - kx_C)}}{\frac{x_By_C}{2\,(y_C - kx_C)} - x_B} = \frac{ky_C}{2kx_C - y_C},$$

i kako su oni jednaki vrijedi $CG \| EH$.

Marko Dodig (4), Zagreb

Drugo rješenje. Dužina $\overline{FH}$ je srednjica trokuta ABH.



Kako je $|AE| = |EC|$ i $|BD| = |DC|$, $ED \| AB$, tj. $GK \| AB$. Kako je $|AF| = |FB|$, vrijedi $|GD| = |DK|$ pa su trokuti BDK i CDG sukladni. Zato je $BK \| CG$, tj. $CG \| BH$.

Ur.

3927. *Dan je šiljastokutan trokut ABC. Pravac na kojem leži njegova visina iz B siječe kružnicu dijametra $\overline{AC}$ u točkama P i Q, a visina iz C siječe kružnicu s dijametrom $\overline{AB}$ u točkama M i N. Dokaži da točke P, Q, M i N leže na istoj kružnici.*

Rješenje. Dovoljno je pokazati da je

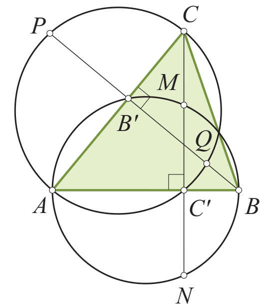
$$|AP| = |AQ| = |AM| = |AN|,$$

tj. da P, Q, M, N leže na kružnici sa središtem u A. Zbog pretpostavke $|AP| = |AQ|$ i $|AM| = |AN|$ dovoljno je pokazati $|AP| = |AM|$. Neka su B' i C' nožišta visina u B i C, tim redom. Zbog sličnosti trokuta $AB'P$, APC te $AC'M$, AMB imamo

$$\frac{|AB'|}{|AP|} = \frac{|AP|}{|AC|} \quad \text{i} \quad \frac{|AC'|}{|AM|} = \frac{|AM|}{|AB|}$$

tj.

$$|AB'| \cdot |AC| = |AP|^2 \quad \text{i} \quad |AC'| \cdot |AB| = |AM|^2.$$



Iz sličnosti trokuta ACC' i ABB' imamo

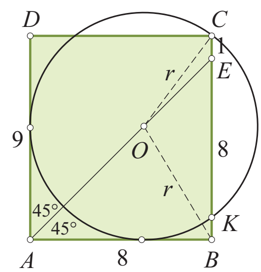
$$\frac{|AB'|}{|AC'|} = \frac{|AB|}{|AC|}$$

tj. $|AP| = |AM|$.

Ur.

3928. *Kružnica dodiruje stranice $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ pravokutnika $ABCD$, prolazi točkom C i siječe $\overline{BC}$ u K. Odredi površinu četverokuta $ABKD$ ako je $|AB| = 8$ cm i $|AD| = 9$ cm.*

Rješenje. Vidimo da se središte kružnice nalazi na simetrali kuta $\sphericalangle BAD$ i neka je njezin polumjer jednak r.



Uz oznake kao na slici je $|AE| = 8\sqrt{2}$, $|AO| = r\sqrt{2}$ i potom $|OE| = (8 - r)\sqrt{2}$. Kako je $\sphericalangle OEC = 135^\circ$, primjenom kosinusovog poučka u $\triangle OEC$ je

$$\begin{aligned} \Longrightarrow\ r^2 &= 2(8-r)^2 + 1^2 \\ &\quad - 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{2}(8-r) \cdot \cos 135^\circ \\ \Longrightarrow\ r^2 &- 34r + 145 = 0. \end{aligned}$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su $r_1 = 5$ cm i $r_2 = 29$ cm. Iz gometrijskih razloga uzimamo samo prvo rješenje, jer se u drugom slučaju radi o velikoj kružnici koja dodiruje produžetke stranica $\overline{AB}$ i $\overline{AD}$ i također prolazi točkom C.

Sada primijenimo kosinusov poučak u $\triangle OEK$ uz $x = |BK|$ pa slijedi:

$$\begin{aligned}5^2 &= (8-x)^2 + (3\sqrt{2})^2 \\ &\quad - 2\cdot 3\sqrt{2}\cdot(8-x)\cdot\cos 45^\circ \\ &\Longrightarrow x^2 - 10x + 9 = 0.\end{aligned}$$

Opet imamo dva rješenja ove jednadžbe $x_1 = 1$ cm i $x_2 = 9$ cm. Iz gore navedenih razloga uzimamo samo prvo rješenje. Površina pravokutnog trapeza $ABKD$ sada iznosi:

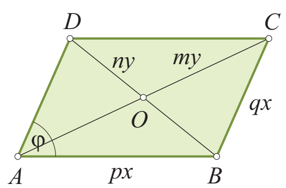
$$P = \frac{9+1}{2}\cdot 8 = 40\ \text{cm}^2.$$

Marko Dodig (4), Zagreb

3929. *Omjer duljina stranica paralelograma je $a : b = p : q$, a njegovih dijagonala $d_1 : d_2 = m : n$. Odredi kutove tog paralelograma.*

Rješenje. Označimo stranice i dijagonale paralelograma kao na slici, a koje zadovoljavaju omjere dane u uvjetima zadatka. Iz svojstva paralelograma

$$\begin{aligned}& d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2+b^2) \\ &\Longrightarrow (m^2+n^2)y^2 = 2x^2(p^2+q^2). \qquad (1)\end{aligned}$$



Sada koristimo kosinusov poučak za $\triangle ABD$:

$$\begin{aligned}(ny)^2 &= (px)^2 + (qx)^2 - 2\cdot px\cdot qx\cdot\cos\varphi \\ \cos\varphi &= \frac{p^2x^2 + q^2x^2 - n^2y^2}{2pqx^2}.\end{aligned}$$

Koristeći gore dobivenu jednakost (1) dalje slijedi

$$\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{\dfrac{(m^2+n^2)y^2}{2} - n^2y^2}{2pq\cdot\dfrac{(m^2+n^2)y^2}{2(p^2+q^2)}} \\ &= \frac{(m^2-n^2)(p^2+q^2)}{2pq(m^2+n^2)},\end{aligned}$$

pa je jedan kut paralelograma jednak

$$\varphi = \arccos\frac{(m^2-n^2)(p^2+q^2)}{2pq(m^2+n^2)},$$

a njegov suplement je

$$\pi - \varphi = \pi - \arccos\frac{(m^2-n^2)(p^2+q^2)}{2pq(m^2+n^2)}.$$

Marko Dodig (4), Zagreb

3930. *Za cijele brojeve $m \geq 0$ i $n > 0$, neka je $S_m(n) = 1^m + 2^m + \ldots + n^m$. Dokaži da vrijedi*

$$\begin{aligned}&\binom{m+1}{0}S_0(n) + \binom{m+1}{1}S_1(n) \\ &+\binom{m+1}{2}S_2(n) + \ldots + \binom{m+1}{m}S_m(n) \\ &= (n+1)^{m+1} - 1.\end{aligned}$$

Odavde se mogu redom određivati formule za sume $S_0(n)$, $S_1(n)$, $S_2(n), \ldots, S_m(n), \ldots$

Rješenje. Prema binomnom poučku imamo

$$\begin{aligned}&(a+1)^{m+1} \\ &= \binom{m+1}{0}a^{m+1} + \binom{m+1}{1}a^m \\ &\quad + \binom{m+1}{2}a^{m-1} + \ldots \\ &\quad + \binom{m+1}{m}a + \binom{m+1}{m+1} \\ &= a^{m+1} + \binom{m+1}{1}a^m + \binom{m+1}{2}a^{m-1} \\ &\quad + \ldots + \binom{m+1}{m}a + 1.\end{aligned}$$

Sada, umjesto a redom uvrštavamo brojeve $0, 1, 2, \ldots, n-1, n$ pa slijedi:

$$\begin{aligned}1^{m+1} &= 0 + 0 + \ldots + 0 + 1 \\ 2^{m+1} &= 1^{m+1} + \binom{m+1}{1}1^m \\ &\quad + \ldots + \binom{m+1}{m}1 + 1 \\ 3^{m+1} &= 2^{m+1} + \binom{m+1}{1}2^m \\ &\quad + \ldots + \binom{m+1}{m}2 + 1 \\ &\ \ \vdots\end{aligned}$$

$$(n+1)^{m+1} = n^{m+1} + \binom{m+1}{1} n^m + \ldots + \binom{m+1}{m} n + 1.$$

Sumiranjem lijeve i desne strane dobivamo:

$$\begin{aligned}(n+1)^{m+1} &\\ = 1 + \binom{m+1}{1} S_m(n) + \binom{m+1}{2} S_{m-1}(n) &\\ + \ldots + \binom{m+1}{m} S_1(n) + \binom{m+1}{m+1} S_0(n).\end{aligned}$$

Koristeći svojstvo simetrije binomnih koeficijenata $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, posljednju jednakost zapisujemo u traženom obliku

$$\begin{aligned}(n+1)^{m+1} - 1 &\\ = \binom{m+1}{0} S_0(n) + \binom{m+1}{1} S_1(n) &\\ + \binom{m+1}{2} S_2(n) + \ldots + \binom{m+1}{m} S_m(n).\end{aligned}$$

Ovo je rekurzivna formula za sumu m-tih potencija prvih n prirodnih brojeva. Tako je npr.

$$S_0(n) = n, \quad S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$S_3(n) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2,$$

$$S_4(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)\left(3n^2+3n-1\right)}{30}$$

itd.

Marko Dodig (4), Zagreb

D) Rješenja iz fizike

OŠ – 518. *Kovanice od 10, 20 i 50 centi su zlatne boje. Napravljene su od legure koja se naziva nordijsko zlato. Tu je leguru teško rastaliti i upotrebljava se za izradu kovanica i medalja. Nordijsko zlato sadrži 89 posto bakra, po 5 posto aluminija i cinka i 1 posto kositra. Koliko je puta gustoća te legure manja od gustoće zlata? Gustoća je bakra 8920 kg/m^3, aluminija 2700 kg/m^3, cinka 7000 kg/m^3, kositra 7310 kg/m^3, a zlata 19 320 kg/m^3.*

Rješenje.

$\rho_{\mathrm{Cu}} = 8920\ \mathrm{kg/m^3}$

$\rho_{\mathrm{Al}} = 2700\ \mathrm{kg/m^3}$

$\rho_{\mathrm{Zn}} = 7000\ \mathrm{kg/m^3}$

$\rho_{\mathrm{Sn}} = 7310\ \mathrm{kg/m^3}$

$\rho_{\mathrm{Au}} = 19\,300\ \mathrm{kg/m^3}$

$\dfrac{\rho_{\mathrm{Au}}}{\rho_{\mathrm{nz}}} = ?$

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{nz}} &= 0.89 \cdot \rho_{\mathrm{Cu}} + 0.05 \cdot \rho_{\mathrm{Al}} + 0.05 \cdot \rho_{\mathrm{Zn}} + 0.01 \cdot \rho_{\mathrm{Sn}}\\ &= 0.89 \cdot 8920\ \mathrm{kg/m^3} + 0.05 \cdot 2700\ \mathrm{kg/m^3} + 0.05 \cdot 7000\ \mathrm{kg/m^3} + 0.01 \cdot 7310\ \mathrm{kg/m^3}\\ &= 8496.9\ \mathrm{kg/m^3}\end{aligned}$$

$$\frac{\rho_{\mathrm{Au}}}{\rho_{\mathrm{nz}}} = \frac{19\,300\ \mathrm{kg/m^3}}{8496.9\ \mathrm{kg/m^3}} = 2.27.$$

Mihovil Marić (8), OŠ Mate Lovraka, Zagreb

OŠ – 519. *Na kalem okruglog presjeka je namotano 50 namotaja bakrene žice. Širina svih namotaja iznosi 6 cm. Kad se ta zavojnica spoji na izvor napona 4.5 V kroz nju poteče struja od 3 A. Koliki je promjer kalupa na koji je žica namotana? Električna otpornost bakra iznosi $1.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega m$.*

Rješenje.

$n = 50$

$d_{\text{žice}} = \dfrac{6}{50}\ \mathrm{cm} = \dfrac{3}{2500}\ \mathrm{m}$

$U = 4.5\ \mathrm{V}$

$I = 3\ \mathrm{A}$

$\rho_{\mathrm{Cu}} = 1.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}$

$d_{\text{kalema}} = ?$

$$R = \frac{U}{I} = \frac{4.5\ \mathrm{V}}{3\ \mathrm{A}} = 1.5\ \Omega$$

$$r_{\text{žice}} = \frac{d_{\text{žice}}}{2} = \frac{3}{5000}\ \mathrm{m} = 6 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{m}$$

$$S_{\text{žice}} = r^2\pi = 3.6 \cdot 10^{-7}\pi\ \mathrm{m}^2$$

$$l = \frac{RS}{\rho} = \frac{1.5\ \Omega \cdot 3.6 \cdot 10^{-7}\pi\ \mathrm{m}^2}{1.7 \cdot 10^{-8}\ \Omega\mathrm{m}} = 99.79\ \mathrm{m}.$$

Opseg kalema je:

$$l_{1\ \text{namotaj}} = \frac{l}{50} = \frac{99.79\ \text{m}}{50} = 1.9958\ \text{m},$$

polumjer žice:

$$r_{\text{kalema}} = \frac{l_{1\ \text{namotaj}}}{2\pi} = 0.32\ \text{m},$$

a njezin promjer:

$$d_{\text{kalema}} = 2r_{\text{kalema}} = 0.64\ \text{m}.$$

Lara Džubur Krajinović (8),
OŠ Horvati, Zagreb

OŠ – 520. *Učenik ima maleni komadić metala kojem želi odrediti gustoću. Ima preciznu vagu kojom je odredio da je masa metala 52 grama, ali menzura koju ima je prevelika da bi točno izmjerio tako mali obujam. Zato je u menzuru natočio vodu do visine 30 cm i mjerio vrijeme koje treba metalu da padne na dno menzure kad ga ispusti s površine vode. Nakon nekoliko mjerenja izračunao je da je prosječno vrijeme iznosilo 0.29 s. Kolika je gustoća tog metala? Gustoća vode je* $1000\ kg/m^3$, *a ubrzanje sile teže je* $9.81\ m/s^2$.

Rješenje.

$m = 52\ \text{g} = 0.052\ \text{kg}$

$h = 30\ \text{cm} = 0.3\ \text{m}$

$t = 0.29\ \text{s}$

$\rho_{\text{voda}} = 1000\ \text{kg/m}^3$

$\underline{g = 9.81\ \text{m/s}^2}$

$\rho = ?$

$$a = \frac{2h}{t^2} = \frac{2\cdot 0.3\ \text{m}}{(0.29\ \text{s})^2} = 7.134\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$F_R = am = 7.134\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\cdot 0.052\ \text{kg} = 0.371\ \text{N}$$

$$G = mg = 0.052\ \text{kg}\cdot 9.81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 0.51012\ \text{N}$$

$$F_{\text{uzgon}} = G - F_R = 0.13912\ \text{N}$$

$$V = \frac{F_{\text{uzgon}}}{\rho_{\text{voda}}\cdot g} = \frac{0.13912\ \text{N}}{1000\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\cdot 9.81\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 1.418\cdot 10^{-5}\ \text{m}^3$$

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{0.052\ \text{kg}}{1.418\cdot 10^{-5}\ \text{m}^3} = 3.667.1\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.$$

Ur.

OŠ – 521. *Marko je na električnu ploču štednjaka snage 1000 W stavio kuhati litru vode temperature* $20\,^\circ C$ *jer je želio popiti čaj. Čim ju je stavio zazvonio je telefon, njegov ga je prijatelj Ivan pozvao da zajedno uče fiziku za test. Marko želi popraviti ocjenu iz fizike, zaboravio je na čaj i otišao kod Ivana koji živi u susjednom stanu. Nakon 45 minuta se sjetio da je ostavio vodu na štednjaku. Je li voda do tada isparila? Pretpostavimo da se 20 posto topline trošilo na zagrijavanje okoline. Specifična toplina isparavanja neke tvari je količina topline koju treba dovesti jednom kilogramu te tvari da prijeđe iz tekućeg u plinovito stanje, za vodu ona iznosi* $2.26\ MJ/kg$. *Specifični toplinski kapacitet vode iznosi* $4200\ J/kgK$, *a gustoća vode* $1000\ kg/m^3$.

Rješenje.

$P = 1000\ \text{W}$

$t_p = 20\,^\circ\text{C}$

$t_k = 100\,^\circ\text{C}$

$m = 1\ \text{kg}$

$t = 45\ \text{min} = 2700\ \text{s}$

$\eta = 0.8$

$\underline{L = 2.26\ \text{MJ/kg}}$

$$Q = Pt = 1000\ \text{W}\cdot 2700\ \text{s} = 2\,700\,000\ \text{J}$$

$$Q_{\text{korisna}} = \eta Q = 0.8\cdot 2\,700\,000\ \text{J} = 2\,160\,000\ \text{J}$$

$$Q_{\text{kuhanja}} = cm\Delta t = 4200\ \frac{\text{J}}{\text{kgK}}\cdot 1\ \text{kg}\cdot 80\ \text{K} = 336\,000\ \text{J}$$

$$Q_{\text{isparavanje}} = Q_{\text{korisna}} - Q_{\text{kuhanja}} = 2\,160\,000\ \text{J} - 336\,000\ \text{J} = 1824\,00\ \text{J}$$

$$m_{\text{ispareno}} = \frac{Q_{\text{isparavanje}}}{L} = \frac{1\,824\,000\ \text{J}}{2\,260\,000\ \frac{\text{J}}{\text{kg}}} = 0.807\ \text{kg}$$

$$\Delta m = m - m_{\text{ispareno}} = 1\ \text{kg} - 0.807\ \text{kg} = 0.193\ \text{kg}.$$

U posudi je ostalo još 0.193 kg vode.

Ana Lakoš (8),
OŠ Horvati, Zagreb

1812. *Jednoliko ubrzano gibanje s početnom brzinom v_0 odvija se tako da je prevaljeni put u četvrtoj sekundi gibanja 3.6 m veći nego u prvoj. Odredi ubrzanje tog gibanja.*

Rješenje. Općenita jednadžba jednoliko ubrzanog gibanja koje kreće iz ishodišta $(s_0 = 0)$ je

$$s(t) = \frac{a}{2}t^2 + v_0 t,$$

a dani uvjet možemo napisati kao

$$s(4) - s(3) = s(1) + 3.6.$$

Uvrštavanjem slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{16a}{2} + 4v_0 - \frac{9a}{2} - 3v_0 &= \frac{a}{2} + v_0 + 3.6, \\ \frac{7a}{2} + v_0 &= \frac{a}{2} + v_0 + 3.6, \\ a &= 1.2, \end{aligned}$$

dakle ubrzanje iznosi $a = 1.2\ \mathrm{m/s^2}$.

Ur.

1813. *Satelit se giba oko Zemlje po eliptičnoj putanji. Najveća brzina (u perigeju) iznosi* 9.2 *km/s, a brzina na 1000 km visine iznad površine je* 8.5 *km/s. Odredi visinu perigeja nad površinom Zemlje. Uzmimo da je Zemlja kugla radijusa 6371 km i mase* $6 \cdot 10^{24}$ *kg.*

Rješenje. Ukupnu energiju po jedinici mase u odnosu na Zemlju možemo izračunati kao zbroj kinetičke i potencijalne

$$\frac{E}{m} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{GM}{R+h},$$

gdje je $R = 6\,371\,000$ m radijus Zemlje, $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg njezina masa, $h = 1\,000\,000$ m visina, $v = 8500$ m/s brzina satelita i $G = 6.674 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm^2/kg^2}$ gravitacijska konstanta. Uvrštavanjem dobijemo

$$\frac{E}{m} = -18\,201\,414\ \mathrm{J/kg}.$$

Uočimo da je $E < 0$ za sve eliptične putanje. Primijenimo li istu relaciju za najveću brzinu $v_m = 9200$ m/s, dobit ćemo udaljenost perigeja od središta Zemlje,

$$r_p = 6\,616\,501\ \mathrm{m}.$$

Visinu dobijemo oduzimanjem radijusa Zemlje, $h = r_p - R = 245.5$ km.

Ur.

1814. *Projektil se pri kosom hicu popne do najviše točke 520 m iznad horizontalnog zemljišta, a brzina mu tada iznosi* 120 *m/s. Koliki je ukupni domet projektila, početna brzina i kut izbačaja?*

Rješenje. Maksimalna visina kosog hica je

$$H = \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha,$$

a komponente brzine u trenutku t su:

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\alpha, \\ v_y &= v_0 \sin\alpha - gt. \end{aligned}$$

Znamo da je u najvišoj točki putanje $v_y = 0$. Imamo sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} v_0 \cos\alpha &= 120, \\ \frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha &= 520. \end{aligned}$$

Uvrstimo li v_0 iz prve jednadžbe u drugu, imamo:

$$\mathrm{tg}^2\,\alpha = 0.7085 \implies \alpha = 40^\circ 5' 17''.$$

Odatle je:

$$\begin{aligned} v_0 &= 156.85\ \mathrm{m/s}, \\ D &= \frac{v_0^2}{g}\sin 2\alpha = 2471\ \mathrm{m}. \end{aligned}$$

Marko Dodig (4),
Gimnazija Lucijana Vranjanina, Zagreb

1815. *Kod sabirne leće jačine* $+3.25$ *dpt oštra slika predmeta nastane na udaljenosti 2.8 cm od fokusa. Kolika je udaljenost predmeta od leće i koliko je uvećanje?*

Rješenje. Iz jačine dobijemo žarišnu daljinu f leće:

$$j = \frac{1}{f} \implies f = \frac{1}{3.25} = 30.77\ \mathrm{cm}.$$

Uvrstimo li dani uvjet u jednadžbu leće

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b},$$

dobivamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{30.77} &= \frac{1}{a} + \frac{1}{30.77 + 2.8}, \\ \frac{1}{a} &= \frac{1}{30.77} - \frac{1}{33.57}, \\ a &= 368.91\ \mathrm{cm}. \end{aligned}$$

Linearno uvećanje iznosi

$$m = \frac{-b}{a} = \frac{-33.57}{368.91} = -0.091,$$

a to znači da je slika umanjena, realna i obrnuta.

Marko Dodig (4), Zagreb

1816. *U uzorku se nalazi $2 \cdot 10^9$ radioaktivnih jezgri nekog izotopa. Ako ih se u prvoj sekundi raspadne 150 000, koliko očekujemo da ih ostane neraspadnuto nakon 24 sata?*

Rješenje. Početnu aktivnost A_0, ukupan broj radioaktivnih jezgri N_0 i vrijeme poluraspada T povezuje relacija

$$A_0 = \frac{N_0}{T} \ln 2.$$

Odatle je:

$$T = \frac{N_0}{A_0} \ln 2 = 9241.96 \text{ s} = 2.5672 \text{ h}.$$

Broj neraspadnutih atoma u nekom trenutku t je

$$N(t) = N_0 2^{-t/T},$$

a za $t = 24$ h to iznosi:

$$\begin{aligned} N(t) &= 2 \cdot 10^9 \cdot 2^{-24/2.5672} \\ &= 3.0675 \cdot 10^6. \end{aligned}$$

Ur.

1817. *Ako dva ohmska trošila spojimo paralelno na naponski izvor, imat će zajedno 7.2 puta veću snagu nego da smo ih spojili serijski na isti izvor. Ako je zbroj njihovih otpora $21\ \Omega$, koliko iznose pojedinačni otpori?*

Rješenje. Ako s P_p označimo snagu paralelnog, a s P_s serijskog spoja, imamo $P_p = 7.2P_s$. Kako je $R_1+R_2 = 21\ \Omega$, vrijedi redom:

$$\begin{aligned} \frac{U^2}{R_p} &= 7.2\frac{U^2}{R_s}, \\ \frac{U^2}{\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}} &= 7.2\frac{U^2}{R_1+R_2}, \\ (R_1+R_2)^2 &= 7.2R_1R_2, \\ R_1R_2 &= 61.25, \\ R_1(21-R_1) &= 61.25, \\ R_1^2 - 21R_1 + 61.25 &= 0. \end{aligned}$$

Rješenja ove kvadratne jednadžbe su 3.5 i 17.5. Kako su jednadžbe simetrične na zamjenu R_1 i R_2, ako odaberemo da je R_1 manji, imamo:

$$R_1 = 3.5\ \Omega, \quad R_2 = 17.5\ \Omega.$$

Marko Dodig (4), Zagreb

1818. *U balonu na topli zrak moguće je postići $100\,^\circ C$ veću temperaturu od temperature okolnog zraka koja iznosi $15\,^\circ C$. Ako je volumen balona jednak volumenu kugle radijusa 6 m, kolika je ukupna nosivost balona? Gustoća zraka pri $15\,^\circ C$ je $1.23\ kg/m^3$.*

Rješenje. Volumen balona je:

$$V = \frac{4}{3}r^3\pi = 904.78 \text{ m}^3.$$

Gustoća toplog zraka zagrijanog na $115\,^\circ$C izračuna se iz omjera apsolutnih temperatura:

$$\begin{aligned} \rho(115\,^\circ\mathrm{C}) &= \rho(15\,^\circ\mathrm{C})\frac{273+15}{273+115} \\ &= 0.913 \text{ kg/m}^3. \end{aligned}$$

Ukupna nosivost u kg bit će razlika u masi hladnog i toplog zraka dobivenog volumena:

$$\begin{aligned} m &= \Delta\rho \cdot V \\ &= (1.23 - 0.913) \cdot 904.78 \\ &= 287 \text{ kg}. \end{aligned}$$

Ur.

⋆ ⋆ ⋆

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 11^2 &= 121 \\ 111^2 &= 12321 \\ 1111^2 &= 1234321 \\ 11111^2 &= 123454321 \\ 111111^2 &= 12345654321 \\ 1111111^2 &= 1234567654321 \\ 11111111^2 &= 123456787654321 \\ 111111111^2 &= 12345678987654321 \end{aligned}$$