64. Međunarodna matematička olimpijada 2023. g.

Međunarodna matematička olimpijada održana je ove godine od 2. do 13. srpnja u Chibi, a zemlja domaćin bila je Japan. Hrvatsku su ove godine na natjecanju predstavljali: *Emanuel Tukač* (4. r.) iz Prve gimnazije Varaždin, *Stella Čolo* (4. r.) iz Gimnazije Franje Petrića u Zadru, *Lovre Pazinović* (4. r.) iz 3. gimnazije Split, *Janko Bušelić* (4. r.), *Namik Agić* (4. r.) i *Lara Semeš* (3. r.) iz XV. gimnazije u Zagrebu. Voditelji ekipe bili su *Borna Vukorepa* i *Vlatko Crnković*.

Članovi hrvatske olimpijske ekipe i njihovi voditelji.

Budući da je Japan dalekoistočna država, na put smo krenuli nekoliko dana ranije kako bismo se mogli priviknuti na razliku u vremenskim zonama. Na dva leta koji su zajedno trajali petnaestak sati neki su pokušali spavati, dok su drugi razgledavali sadržaje koje je nudio zaslon ispred sjedala u avionu. Vrijeme prije službenog početka natjecanja utrošili smo na razgledavanje Tokija i njegova predgrađa Chibe, gdje se službeno održavala Olimpijada.

Rješavanje zadataka se održalo 7. i 8. srpnja i proteklo je ipak malo lošije nego što smo se nadali. Naša ekipa je ove godine bila relativno iskusna (u ekipi su svi osim Lare maturanti) i većina je imala pregršt iskustava s međunarodnih natjecanja. Prvog dana natjecanja raspored područja po zadatcima nije svima odgovarao, a tijekom razgovora s drugim ekipama ustanovili smo da su oni bili nešto lakši nego inače. Zato su oni koji su malo slabije riješili taj dan bili malo razočarani. Drugi dan je bio prikladnije težine s težim zadatcima nego prvog dana, što je odgovaralo nekim članovima naše ekipe. Nakon što je završilo rješavanje i posljednjeg srednjoškolskog natjecanja zavladala je opuštenija atmosfera. Vrijeme smo kratili u prostorijama Jane Streeta igrajući najviše Figgie i slične igre koje je dizajnirao upravo Jane Street.

Sljedeća dva dana uslijedila je koordinacija i komentiranje naših rješenja, i većinom je sve što smo pretpostavili da smo riješili uistinu bilo tako do na nekoliko iznimki. Dok su voditelji Borna i Vlatko na koordinacijama branili naša rješenja neki su išli u organizirane ekskurzije u Disneyland i Yokohamu te ponovno razgledavanje Tokija, dok su drugi kratili vrijeme spavajući ili u prostorijama Jane Streeta. Iako su voditelji bili vrlo zauzeti, pronašli smo trenutke u kojima smo zajednički mogli obilaziti grad.

Na zadnji dan olimpijade, 12. srpnja, održana je ceremonija zatvaranja na kojoj su objavljeni službeni rezultati. Hrvatska je ove godine imala slabiji nastup osvojivši četiri brončane medalje (Emanuel, Lara, Janko, Namik) te dvije pohvale (Stella, Lovre), te ukupno 52. mjesto u konkurenciji 112 zemalja. Ceremonija je završila svečanom predajom zastave IMO-a ekipi Ujedinjenog Kraljevstva, domaćinu 65. IMO-a 2024.

Za kraj, velike zahvale idu organizatorima na tome što je natjecanje prošlo bez problema zahvaljujući ogromnom angažmanu volontera, a posebno ostatku ekipe i voditeljima na nezaboravnoj avanturi dugoj 12 dana i 9000 kilometara udaljenoj od naših domova.

Bodovi hrvatskih učenika na 64. IMO.

natjecatelj	P1	P2	P3	P4	P5	P6	ukupno	osvojeno
N. Agić	7	7	1	7	2	0	24	brončana
E. Tukač	7	1	0	7	7	0	22	brončana
L. Semeš	7	0	3	7	2	0	19	brončana
J. Bušelić	7	2	0	7	2	0	18	brončana
S. Čolo	7	2	0	2	0	0	11	pohvala
L. Pazinović	7	0	0	2	0	0	9	pohvala
ekipni rezultat	**42**	**12**	**4**	**32**	**13**	**0**	**103**	

Namik Agić

Zadatci

Prvi dan, subota, 8. srpnja 2023.

Zadatak 1. Odredi sve složene cijele brojeve $n > 1$ koji zadovoljavaju sljedeće svojstvo: ako su $d_1, d_2, \ldots, d_k$ svi pozitivni djelitelji od n, pri čemu je $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$, tada d_i dijeli $d_{i+1} + d_{i+2}$ za svaki $1 \leq i \leq k-2$.

Zadatak 2. Neka je ABC šiljastokutan trokut s $|AB| < |AC|$. Neka je Ω kružnica opisana trokutu ABC. Neka je S polovište luka CB od Ω koji sadrži A. Okomica iz A na BC siječe pravac BS u D i siječe Ω još u $E \neq A$. Pravac kroz D paralelan s BC siječe pravac BE u L. Označimo kružnicu opisanu trokutu BDL s ω. Neka se ω i Ω sijeku još u $P \neq B$. Dokaži da se tangenta na ω u P siječe s pravcem BS na unutarnjoj simetrali kuta $\sphericalangle BAC$.

Zadatak 3. Za svaki cijeli broj $k \geq 2$, odredi sve beskonačne nizove pozitivnih cijelih brojeva $a_1, a_2, \ldots$ za koje postoji polinom P oblika $P(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \ldots + c_1 x + c_0$, gdje su $c_0, c_1, \ldots, c_{k-1}$ nenegativni cijeli brojevi, takav da je

$$P(a_n) = a_{n+1}a_{n+2}\ldots a_{n+k}$$

za svaki cijeli broj $n \geq 1$.

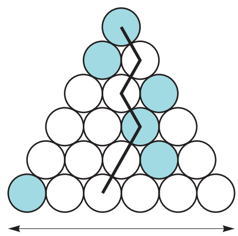
Drugi dan, nedjelja, 9. srpnja 2023.

Zadatak 4. Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_{2023}$ u parovima različiti pozitivni realni brojevi takvi da je

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

cijeli broj za svaki $n = 1, 2, \ldots, 2023$. Dokaži da je $a_{2023} \geq 3034$.

Zadatak 5. Neka je n pozitivan cijeli broj. *Japanski trokut* sastoji se od $1+2+\ldots+n$ krugova posloženih u oblik jednakostraničnog trokuta takav da za svaki $i = 1, 2, \ldots, n$ vrijedi da i-ti redak sadrži točno i krugova, od kojih je točno jedan obojan u crveno. *Ninja put* u japanskom trokutu je niz od n krugova dobijen kretanjem iz kruga u prvom retku te uzastopnim prelascima iz trenutnog kruga na jedan od dva kruga u idućem retku koji su neposredno ispod trenutnog kruga. Niz završava nakon što dođemo u najdonji redak. Ovo je primjer jednog japanskog trokuta za $n = 6$, zajedno s jednim ninja putem u tom trokutu koji sadrži dva crvena kruga.



U ovisnosti o n, nađi najveći k takav da u svakom japanskom trokutu postoji ninja put koji sadrži barem k crvenih krugova.

Zadatak 6. Neka je ABC jednakostraničan trokut. Neka su A_1, B_1, C_1 točke u unutrašnjosti trokuta ABC tako da je $|BA_1| = |A_1C|$, $|CB_1| = |B_1A|$, $|AC_1| = |C_1B|$ i

$$\sphericalangle BA_1C + \sphericalangle CB_1A + \sphericalangle AC_1B = 480^\circ.$$

Neka se pravci BC_1 i CB_1 sijeku u A_2, neka se pravci CA_1 i AC_1 sijeku u B_2 i neka se pravci AB_1 i BA_1 sijeku u C_2.

Dokaži da ako je trokut $A_1B_1C_1$ raznostraničan, tada tri kružnice opisane trokutima AA_1A_2, BB_1B_2 i CC_1C_2 sve prolaze kroz dvije točke koje su zajedničke tim trima kružnicama.

Vrijeme rješavanja svakog dana: 4 sata i 30 minuta.
Svaki zadatak vrijedi 7 bodova.

Rang-lista

	nagrade I	II	III	poh.	broj bod.
Kina	6				240
SAD	5	1			222
Republika Koreja	4	2			215
Rumunjska	5	1			208
Kanada	1	4	1		183
Janan	2	3	1		181
Vijetnam	2	2	2		180
Turska	1	5			176
Indija	2	2	2		174
Tajvan	1	4	1		173
Iran	1	4	1		172
Singapur	2	3		1	171
Ujedinjeno Kraljevstvo	2	2	2		167
Izrael	1	3	2		163
Meksiko	1	3	2		163
Brazil	1	2	3		161
Bjelorusija		4	2		159
Italija	1	2	3		159
Tajland	1	3	1	1	158
Njemačka		3	3		156
Kazahstan		2	4		154
Mađarska	1	2	3		153
Australija	1	2	2	1	152
Hong Kong	1	1	4		151
Bugarska	1	1	4		149
Filipini		3	3		145
Grčka	1	1	3	1	145
Francuska		1	5		142
Nizozemska		1	5		139
Mongolija	1		4	1	138
Ukrajina		1	5	1	134
Armenija		2	3	1	133
Peru		2	3		133
Poljska		1	4	1	133
Španjolska		1	4	1	131
Bosna i Hercegovina		1	4	1	130
Saudijska Arabija		1	3	2	130
Gruzija	1		4	1	129
Indonezija		1	3	2	128
Slovačka		1	4	1	128
Sjeverna Makedonija	1	1	2	2	127
Srbija		1	3	2	120
Švicarska	1		3	1	117
Malezija	1		3	2	114
Češka			4	1	112
Bangladeš			3	2	110
Estonija			3	3	108
Makau		1	2	3	107
Austrija		1	1	4	106
Uzbekistan			3	3	106
Južnoafrička Rebublika		1	1	4	105
Cipar		1	1	4	103
Hrvatska			4	2	103
Azerbajdžan		1	1	4	102
Latvija			3	3	101
Moldavija			3	3	101

	nagrade I	II	III	poh.	broj bod.
Alžir			2	4	100
Danska			2	3	97
Argentina		1	1	3	96
Švedska		1	1	3	96
Sirija			2	4	95
Norveška			2	4	94
Belgija			2	4	92
Finska		1	1	4	91
Litva		1	1	4	91
Novi Zeland			1	5	91
Slovenija			1	5	91
Maroko			1	5	83
Turkmenistan			1	4	83
Šri Lanka			1	5	80
Kirgistan				6	79
Kolumbija			2	3	78
Tađikistan			1	4	75
Portugal			1	4	73
Tunis			1	4	72
Kostarika			1	4	69
Irska			1	2	63
Island			1	4	58
Bolivija				4	53
Albanija				4	48
Pakistan			1	1	42
Paragvaj (4)				4	41
Urugvaj (3)				3	37
UAE			1	1	36
Ruanda				3	35
Salvador				3	35
Kosovo				2	34
Mianmar				2	32
Panama (3)				3	31
Ekvador				1	27
Oman			1		27
Nepal				1	26
Mauritanija				1	24
Portoriko (4)				1	24
Nikaragva (3)				2	22
Crna Gora (4)				1	20
Čile (3)				2	20
Honduras (2)				1	17
Lihtenštajn (2)				2	17
Bocvana				1	15
Luksemburg (3)				1	14
Dominikanska Republika					13
Gana (2)					12
Kuba (2)				1	11
Irak (4)					11
Venecuela (3)				1	11
Burkina Faso					8
Uganda (5)					7
Kamerun					6
Gvatemala (2)					5
Kenija					4
Tanzanija (1)					0

Broj u zagradi je broj natjecatelja kada je on manji od 6.