Osječki matematički list 23 (2023), 13–29

Upravljanje rizikom pri trgovanju dionicama

Dominik Mihalčić*, Nenad Šuvak†

Sažetak

U radu su ukratko obrađene neke strategije trgovanja dionicama na financijskom tržištu i uz to vezan rizik. Objašnjeno je kako se kreira i rebalansira portfelj te kako se njegova vrijednost mijenja prilikom kupovine i prodaje dionica. Naglasak je na strategijama trgovanja koje uključuju opcije, tj. instrumente čija je svrha upravljanje rizikom pri trgovanju dionicama.

Ključne riječi: *dionica, opcija, portfelj, rizik, strategija trgovanja*

Risk management in stock trading

Abstract

The paper briefly discusses some strategies for stock trading and related risk on financial market. It is explained how a portfolio is created and rebalanced and how its value changes with buying and selling stocks. The focus is placed on trading strategies that include options, i.e. instruments whose purpose is risk management in stock trading practice.

Keywords: *stock, option, portfolio, risk, trading strategy*

*Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: dmihalci@mathos.hr
†Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: nsuvak@mathos.hr

1 Uvod

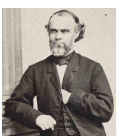
Financijska imovina dijeli se na rizičnu i nerizičnu. Nerizičnu imovinu najlakše je shvatiti kao novac uložen u banku uz fiksnu kamatnu stopu. Uz poznavanje fiksne kamatne stope poznata nam je vrijednost uloženog novca u svakom budućem trenutku, tj. kamatna stopa u potpunosti određuje buduću vrijednost uloga.

Promjenu vrijednosti imovine nazivamo **povrat**, a definiramo ga kao postotnu promjenu vrijednosti imovine u trenutku t s obzirom na njezinu vrijednost u točno određenom trenutku u prošlosti. Za razliku od nerizične, rizičnu financijsku imovinu karakterizira nepredvidivost povrata koji mogu biti i negativni, pa se postavlja pitanje motiva za ulaganje u takvu imovinu. Odgovor na to pitanje je jednostavan - investitor očekuje veći povrat nego od ulaganja u nerizičnu imovinu i zato je spreman preuzeti određeni rizik. Neki od najpoznatijih rizičnih financijskih instrumenata su sirovine, obveznice te, u ovom radu najznačajnije, **dionice** i **izvedenice**.

Definicija 1.1. *Dionica je vrijednosni papir koji predstavlja udio u osnovnom kapitalu poduzeća, a njezino posjedovanje vlasniku donosi zaradu putem dividendi koje poduzeće isplaćuje svim dioničarima.*

Logo tvrtke Dutch East India Company

Trgovanje dionicama kakvo imamo danas prvi put se pojavilo 1611. u Amsterdamu kada je tvrtka *Dutch East India Company* izdala prve dionice. Dvjestotinjak godina kasnije, skupina trgovaca sklopila je *Buttonwoodski* sporazum koji je postavio temelje onoga što će postati New York Stock Exchange, jedna od najaktivnijih i najpoznatijih dioničkih burzi današnjice. Članovi tog sporazuma su međusobno trgovali obveznicama i dionicama, a klijentima su naplaćivali provizije pa ih se smatra prvim brokerima. Prva verzija danas najtrgovanijeg burzovnog indeksa S&P 500, jednog od glavnih indikatora koji opisuje dinamiku američkog gospodarstva, prvi put se pojavila 1923., a kreirala ju je tvrtka *Poor's Publishing* čiji je vlasnik bio Henry Varnum Poor.



Henry Varnum Poor (1812.-1905.) američki financijski analitičar

Kretanje cijena dionica na financijskim tržištima je nepredvidivo, stoga trgovanje dionicama nosi rizik. Upravo je to glavni motiv proučavanja matematičkih modela, temeljenih na teoriji vjerojatnosti, kojima se pokušavaju opisati kretanja povijesnih cijena dionica i predvidjeti njihov dugoročni trend. Suvremena financijska matematika usmjerena je na modeliranje rizika i na proučavanje novih financijskih instrumenata za upravljanje rizikom, tj. izvedenica. U ovom radu obradit ćemo nekoliko jednostavnih strategija trgovanja dionicama, u njih uključiti posebnu vrstu izvedenica (opcije) te na primjerima pokazati efekte koje opcije imaju na vrijednost imovine.

2 Osnovni vjerojatnosni pojmovi

Da bismo opisali matematičke koncepte trgovanja dionicama i opcijama, bit će nam potrebni osnovni pojmovi teorije vjerojatnosti. U ovom poglavlju dajemo njihov kratak pregled, a više o njima može se pronaći u [2].

Osnovni vjerojatnosni koncept je **slučajni pokus**, primjerice bacanje novčića ili igraće kockice. Slučajni pokus karakteriziran je time što, prije samog njegovog izvođenja, ne možemo sa sigurnošću reći koji od mogućih ishoda će se realizirati. Tako su pri bacanju novčića mogući ishodi *pismo* i *glava*, a pri bacanju kockice brojevi 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Skup svih mogućih ishoda slučajnog pokusa zove se **skup elementarnih događaja** i označava s Ω. U ovom radu, Ω će uvijek biti prebrojiv, štoviše konačan skup. Svaki podskup skupa Ω je **događaj** pa je familija skupova koja sadrži sve događaje upravo partitivni skup od Ω, što označavamo s $\mathcal{P}(\Omega)$.

Često nas zanima vjerojatnost nekog događaja, primjerice, ako bacamo igraću kockicu, može nas zanimati kolika je vjerojatnost da je pala šestica ili kolika je vjerojatnost da nije pao paran broj. Vjerojatnost P je funkcija koja nam omogućuje da kvantificiramo stupanj uvjerenja u realizaciju takvih događaja. Formalno, vjerojatnost je funkcija $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,1]$ takva da je za svaki događaj $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ vjerojatnost $P(A)$ nenegativan broj, $P(\Omega) = 1$ i vjerojatnost unije disjunktnih događaja jednaka je zbroju njihovih vjerojatnosti. Uređenu trojku $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ zovemo **diskretni vjerojatnosni prostor**.

Ishod pokusa a priori ne znamo te ga u određenom smislu modeliramo **slučajnom varijablom** X na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$. Slučajna varijabla na diskretnom vjerojatnosnom prostoru je svaka funkcija

$$X\colon \Omega \to \mathbb{R}$$

koja elementarnim događajima pridružuje realne brojeve. Primjerice, za slučajni pokus bacanja novčića možemo definirati slučajnu varijablu X koja se realizira s 0 ako je palo pismo, a s 1 ako je pala glava, tj. slučajnu varijablu s vrijednostima $X(\omega) \in \{0, 1\}$, gdje je $\omega \in \{pismo, glava\}$. Ako s $p \in [0,1]$ označimo vjerojatnost da se X realizira s 1, a s $(1-p)$ vjerojatnost da se X realizira s 0, onda je tablicom

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

zadana distribucija slučajne varijable X. Općenito, za slučajnu varijablu X s konačnim skupom vrijednosti $\{x_1, \ldots, x_n\}$, distribuciju zadajemo tablicom

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & \ldots & x_n \\ p_1 & \ldots & p_n \end{pmatrix}, \tag{1}$$

gdje je p_k vjerojatnost da se slučajna varijabla X realizira realnim brojem x_k, $p_k \geq 0$ i $\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$. Uz distribuciju slučajne varijable, vežu se njezine mjere sredine i mjere raspršenosti. Najpoznatija mjera sredine je **očekivanje** koje se za slučajnu varijablu s distribucijom (1) računa na sljedeći način

$$EX = x_1 p_1 + \cdots + x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k.$$

Raspršenost vrijednosti slučajne varijable oko njezinog očekivanja opisuje se **varijancom**:

$$\mathrm{Var}(X) = E\,(X - EX)^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - EX)^2\, p_k.$$

Kvadratni korijen varijance naziva se **standardna devijacija**. Standardna devijacija zarada i gubitaka na financijskom tržištu jedna je od najpoznatijih mjera rizika i zove se **volatilnost**.

Prethodno uvedeni pojmovi daju beskonačne mogućnosti modeliranja svijeta oko nas. Slučajne varijable služe za opisivanje različitih obilježja koje imaju karakter slučajnosti (visina osobe, cijena automobila, krvni tlak, broj prodanih proizvoda i sl.), a ukoliko im dodamo i vremensku dimenziju, dolazimo do koncepta **slučajnih procesa**. Jedna od najjednostavnijih klasa slučajnih procesa su nizovi slučajnih varijabli. U ovom radu ćemo konstruirati specifičan niz slučajnih varijabli kojim ćemo modelirati kretanje vrijednosti dionice kroz vrijeme. Vjerojatnosni kontekst ovog problema analogan je kao u slučajnom pokusu bacanja novčića - financijsko tržište opskrbit ćemo odgovarajućim vjerojatnosnim prostorom, a vrijednost dionice u danom trenutku t bit će modelirana slučajnom varijablom $S(t)$ na njemu. Ako tržište promatramo u trenucima $0, 1, \ldots, T$, vrijednost dionice u vremenu modeliramo slučajnim procesom, tj. nizom slučajnih varijabli

$$(S(t),\, t = 0, 1, \ldots, T).$$

3 Portfelj i arbitraža

Označimo sa $S_0(t)$ iznos novca koji posjedujemo u trenutku t. Uz poznavanje efektivne kamatne stope r', znamo da će iznos $S_0(t)$ u trenutku $t > 0$ vrijediti

$$S_0(t) = S_0(0)(1 + r')^t.$$

Dakle, vrijednost novca poznata je u svakom budućem trenutku pa ga smatramo **nerizičnom financijskom imovinom**.

Za razliku od novca, dionica nema to svojstvo pa spada u **rizičnu financijsku imovinu**. Vrijednost dionice slučajnog je karaktera zbog raznih ekonomskih utjecaja, stoga njezinu vrijednost u trenutku t modeliramo nenegativnom slučajnom varijablom $S(t)$, a kretanje njezine vrijednosti u vremenu nenegativnim slučajnim procesom $(S(t),\ t = 0, 1, \ldots, T)$. Uvijek ćemo pretpostavljati da je vrijednost dionice u trenutku 0 poznata.

Novac i dionice koje investitor posjeduje čine njegov portfelj. U slučaju kada posjeduje $d \in \mathbb{N}$ različitih dionica, vrijednost i-te dionice u trenutku t modeliramo slučajnom varijablom $S_i(t)$, $i \in \{1, \ldots, d\}$, a broj tih dionica u trenutku t označavamo $\varphi_i(t)$, $i = 1, \ldots, d$. Analogno, $\varphi_0(t)$ označava količinu novca, tj. novčanih jedinica $S_0(t) = 1$, u trenutku 0.

Definicija 3.1. *Vektor*

$$\varphi(t) = \big(\varphi_0(t), \varphi_1(t), \ldots, \varphi_d(t)\big) \in \mathbb{R}^{d+1}$$

*zove se **portfelj** u trenutku t. Vrijednost portfelja u trenutku t opisana je nenegativnom slučajnom varijablom*

$$V_\varphi(t) = \sum_{i=0}^{d} \varphi_i(t) S_i(t).$$

Kako tržište promatramo u diskretnim vremenskim trenucima

$$t \in \{0, 1, \ldots, T\},$$

pretpostavit ćemo da investitor u trenutku 0 za početni imetak $\varphi(0)$ formira portfelj $\varphi(1)$. Općenito, portfelj $\varphi(t)$ formira se u trenutku $(t-1)$. Ako je za neku dionicu $\varphi_i(t) \neq \varphi_i(t+1)$, $i = 1, \ldots, d$, kažemo da smo portfelj φ *rebalansirali* u trenutku t. Rebalansiranje podrazumijeva kupovinu ili prodaju određenog broja dionica, a glavna svrha mu je održavanje vrijednosti ili povećanje buduće vrijednosti portfelja. Ako sredstva za kupovinu novog portfelja $\varphi(t+1)$ mogu doći samo iz vrijednosti portfelja $V_\varphi(t)$, onda vrijedi

$$\sum_{i=0}^{d} \varphi_i(t) S_i(t) = \sum_{i=0}^{d} \varphi_i(t+1) S_i(t)$$

i za takav portfelj kažemo da je **samofinancirajući**.

Na financijskom tržištu se povremeno javljaju samofinancirajući portfelji koji jamče sigurnu zaradu investitora. Zarada na takvim portfeljima obično ovisi o informacijama koje nisu istovremeno dostupne svim sudionicima na financijskim tržištima. Takvi se portfelji zovu arbitraže.

Definicija 3.2. *Samofinancirajući portfelj je **arbitraža** ako zadovoljava sljedeće zahtjeve:*

- $V_\varphi(0) = 0$,
- $V_\varphi(t) \geq 0, \ \forall t \in \{0, 1, \ldots, T\}$,
- $P(V_\varphi(T) > 0) > 0$.

Riječima, arbitraža je samofinancirajući portfelj koji na početku ne košta ništa, vrijednost mu je uvijek nenegativna, a s pozitivnom vjerojatnošću u trenutku T donosi zaradu. Matematički modeli financijskih tržišta grade se pod mnogim pretpostavkama, a jedna od njih je i jednaka dostupnost informacija svim sudionicima na tržištu. Upravo zbog te pretpostavke s tržišta ćemo izuzeti arbitraže i promatrati tzv. nearbitražno financijsko tržište.

4 Opcije - instrumenti upravljanja rizikom

Vrijednost portfelja se, zbog slučajne prirode vrijednosti dionica koje ga čine, mijenja iz trenutka u trenutak. Međutim, na vrijednost portfelja možemo utjecati na različite načine. Jedan od načina je prodaja dionica iz portfelja i kupovina novih dionica. Ta praksa počiva na specifičnim strategijama trgovanja u kojima veliku ulogu imaju financijski instrumenti koji služe upravljanju rizikom pri trgovanju, a zovu se **opcije**.

Definicija 4.1. *Opcija je ugovor koji vlasniku daje pravo, ali ne i obvezu, da kupi ili proda dionicu do točno određenog dana ili na točno određeni dan u budućnosti po cijeni dogovorenoj u sadašnjosti.*

Dan kupovine ili prodaje dionice iz prethodne definicije zove se **trenutak dospijeća** opcije, oznaka T. Unaprijed dogovorena cijena zove se **cijena izvršenja** opcije, oznaka K. Opcija koja se odnosi na kupovinu dionice zove se **call** opcija, a opcija koja se odnosi na prodaju dionice zove se **put** opcija.

Općenito, postoje dvije velike kategorije opcija: **plain vanilla** i **egzotične** opcije. U okvirima ovog rada bavit ćemo se prvom kategorijom opcija u koju spadaju **europske** call i put opcije.

Definicija 4.2. ***Europska call opcija*** *(ECO) vlasniku daje pravo, ali ne i obvezu, da **kupi** dionicu po cijeni izvršenja K u trenutku dospijeća T.*

Ako u trenutku dospijeća T dionica na tržištu vrijedi više od K, tj. $S(T) > K$, vlasnik koristi svoju ECO i dionicu umjesto za $S(T)$ kupuje za K. U tom slučaju za njega opcija vrijedi $(S(T) - K)$. Međutim, ako je $S(T) <$

K, vlasnik neće iskoristiti ECO i ona mu je u tom kontekstu bezvrijedna. Prema tome, ECO u trenutku dospijeća vrijedi

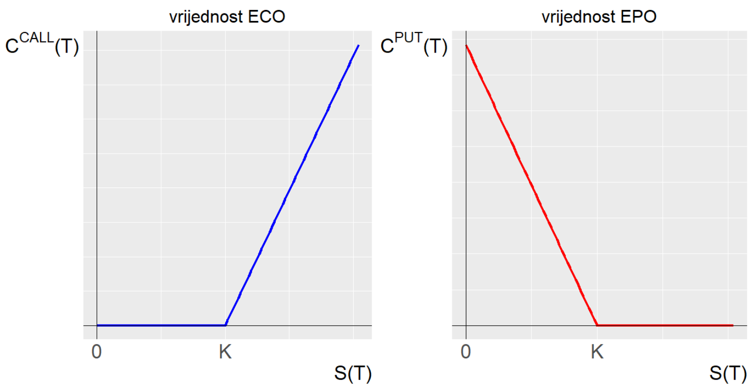
$$C^{CALL}(T) = \max\{S(T) - K, 0\} = (S(T) - K)_+.$$

Definicija 4.3. ***Europska put opcija*** *(EPO) vlasniku daje pravo, ali ne i obvezu, da* ***proda*** *dionicu po cijeni izvršenja K u trenutku dospijeća T.*

Analognim razmatranjem kao kod ECO slijedi da je vrijednost EPO u trenutku dospijeća

$$C^{PUT}(T) = \max\{K - S(T), 0\} = (K - S(T))_+.$$

Grafički prikazi vrijednosti ECO i EPO dani su na Slici 1.



Slika 1. Vrijednost ECO i EPO u trenutku dospijeća T

Primijetimo da su vrijednosti ECO i EPO u potpunosti određene vrijednošću dionice u trenutku dospijeća T i cijenom izvršenja opcije K. Ilustrirajmo to primjerom.

Primjer 4.1 (europska call opcija). *Pretpostavimo da neka dionica na današnji dan ($t = 0$) vrijedi 200 \$ i želimo ju kupiti za 30 (radnih) dana. Svjesni smo da zbog nepredvidive prirode cijena dionica na tržištu za 30 radnih dana ta dionica može značajno poskupjeti. Želimo se zaštiti od tog rizika pa kupujemo ECO s trenutkom dospijeća $T = 30$ i cijenom izvršenja $K = 210$ \$, koju smo spremni platiti za tu dionicu. Ako je u trenutku dospijeća vrijednost dionice veća od 210 \$, iskoristit ćemo kupljenu ECO i kupiti dionicu po cijeni povoljnijoj od tržišne. U tom slučaju vrijednost ECO jednaka je razlici tržišne cijene dionice i cijene izvršenja ECO. Ako je u trenutku dospijeća vrijednost dionice manja od 210 \$, kupljenu*

ECO ne koristimo i u tom slučaju ona nam je bezvrijedna. Dakle, vrijednost ECO u trenutku dospijeća $T = 30$ je

$$C^{CALL}(30) = \max\{S(30) - 210, 0\} = (S(30) - 210)_+.$$

U slučaju europske put opcije, scenarij je sljedeći.

Primjer 4.2 (europska put opcija). *Pretpostavimo da dionicu iz Primjera 4.1 u $t = 0$ posjedujemo te da ju želimo prodati za 30 radnih dana. Zbog rizika od pada cijene dionice, spremni smo ju prodati za najmanje 190 \$. Za to kupujemo odgovarajuću EPO s trenutkom dospijeća $T = 30$ i cijenom izvršenja $K = 190$ \$. Ako cijena dionice u trenutku dospijeća bude niža od 190 \$, iskoristit ćemo EPO i prodati dionicu po cijeni višoj od tržišne. U tom slučaju je vrijednost EPO jednaka razlici tržišne cijene dionice i cijene izvršenja EPO. U suprotnom, EPO ne koristimo jer nam ne donosi nikakvu zaradu. Njezina vrijednost u trenutku dospijeća $T = 30$ je*

$$C^{PUT}(30) = \max\{190 - S(30), 0\} = (190 - S(30))_+.$$

Iz primjera 4.1 i 4.2 možemo naslutiti da je opcija financijski instrument koji za investitora u $t = 0$ ne može biti besplatan, nego se za nju plaća određena premija. Određivanje visine premije nije nimalo jednostavan zadatak i ovisi o matematičkom modelu za cijenu dionice.

5 Matematički modeli financijskog tržišta

Ukratko ćemo obraditi dva modela financijskog tržišta u diskretnom vremenu te u njihovim okvirima objasniti način računanja premije za opciju.

Osnova za izgradnju ovih modela bit će povrat kojeg investitoru generira posjedovanje dionice, pri čemu zanemarujemo eventualne isplate dividendi.

Definicija 5.1. ***Jednoperiodni relativni povrat*** *kojeg svom vlasniku generira dionica u trenutku $t \in \{0, 1, \dots, T\}$ je postotna promjena njezine vrijednosti u trenutku t s obzirom na njezinu vrijednost u trenutku $(t - 1)$, tj.*

$$R(t) = \frac{S(t) - S(t-1)}{S(t-1)}.$$

U kontekstu Definicije 5.1, efektivnu kamatnu stopu r' možemo doživjeti kao jednoperiodni relativni povrat kojeg vlasniku generira nerizični depozit.

5.1 Jednoperiodni binarni model

Pretpostavimo za sada da je $T = 1$ te da u trenutku $t = 0$ posjedujemo $S_0(0)$ novca i jednu dionicu koja vrijedi $S_1(0)$. Neka je poznata efektivna kamatna stopa r'. Tada u trenutku $t = 1$ imamo $S_0(1) = S_0(0)(1 + r')$ novca i dionicu koja vrijedi $S_1(1) = S_1(0)(1 + R(1))$. Osnovna pretpostavka modela tržišta u diskretnom vremenu je da se između dva uzastopna trenutka cijena dionice može relativno promijeniti ili za a s vjerojatnošću $(1 - p)$ ili za b s vjerojatnošću $0 < p < 1$, pri čemu je $-1 < a < b$, odnosno

$$R(1) \sim \begin{pmatrix} a & b \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Vjerojatnosni prostor $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ na kojemu se gradi ovakav model financijskog tržišta definiran je na sljedeći način:

- $\Omega = \{a, b\}$,
- $\mathcal{P}(\Omega) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\big\}$,
- $P \colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$, $P(\{a\}) = 1 - p$, $P(\{b\}) = p$.

Takav model financijskog tržišta u diskretnom vremenu zove se **jednoperiodni binarni model**. Da bi ovaj model bio bez arbitraže, nužno je da vrijedi (vidjeti [4])

$$a < r' < b. \tag{2}$$

Ako iznos novca u trenutku $t = 1$ pomnožimo faktorom $(1 + r')^{-1}$, dobit ćemo vrijednost tog novca u trenutku $t = 0$. Kažemo da smo novac **diskontirali**. Postavlja se pitanje možemo li diskontiranjem cijene dionice na isti način dobiti njezinu vrijednost u prethodnom trenutku, tj. je li

$$\frac{S_1(1)}{1 + r'} = S_1(0).$$

Pokazuje se da je odgovor na to pitanje negativan. Međutim, moguće je vjerojatnost P definiranu kao u $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ zamijeniti novom vjerojatnošću $P^* \colon \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ uz koju je očekivana diskontirana cijena dionice u trenutku $t = 1$ jednaka upravo njezinoj početnoj cijeni, tj.

$$E^* \left[\frac{S_1(1)}{1 + r'} \right] = S_1(0).$$

Iz toga slijedi da je

$$\begin{aligned} S_1(0) &= E^*\left[\frac{S_1(0)(1+R(1))}{1+r'}\right] = \frac{S_1(0)}{1+r'}E^*(1+R(1)) \\ &= \frac{S_1(0)}{1+r'}\Big((1+a)P^*(\{a\}) + (1+b)P^*(\{b\})\Big) \\ &= \frac{S_1(0)}{1+r'}\Big((1+a)(1-p^*) + (1+b)p^*\Big) \\ &= \frac{S_1(0)}{1+r'}\Big(1+a+(b-a)p^*\Big), \end{aligned}$$

odnosno,

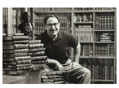
$$p^* = P^*(\{b\}) = \frac{r'-a}{b-a}.$$

Vjerojatnost $P^* \colon \mathcal{F} \to [0,1]$ definirana s $P^*(\{a\}) = 1 - p^*$, $P^*(\{b\}) = p^*$ zove se **vjerojatnost neutralna na rizik**.

5.2 Cox-Ross-Rubinsteinov model

John C. Cox (1943.–) professor emeritus na sveučilištu MIT

Stephen A. Ross (1944.–2017.) američki ekonomist i financijski matematičar



Mark E. Rubinstein (1944.–2019.) američki financijski matematičar i inženjer

Pretpostavimo sada da promatramo tržište u trenutcima $\{0, 1, \ldots, T\}$ te da u trenutku $t = 0$ posjedujemo $S_0(0)$ novca i jednu dionicu koja vrijedi $S_1(0)$. Oponašajući prethodno opisani postupak, vrijednost novca u trenutku t je $S_0(t) = S_0(0)(1+r')^t$, dok je vrijednost dionice modelirana na sljedeći način:

$$S(t) = S(0)\prod_{j=1}^{t}\big(1+R(j)\big). \tag{3}$$

U izrazu (3) su jednoperiodni relativni povrati

$$R(j) \sim \begin{pmatrix} a & b \\ 1-p & p \end{pmatrix}$$

nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$, gdje je:

- $\Omega = \{a, b\}^T$,
- $\mathbb{P} \colon \mathcal{F} \to [0,1]$,

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{\omega}) = \mathbb{P}\big((\omega_1, \ldots, \omega_T)\big) = \prod_{j=1}^{T} P(\{\omega_j\}), \;\; \boldsymbol{\omega} \in \Omega,$$

  gdje je P vjerojatnost iz jednoperiodnog binarnog modela, a $\omega_j \in \{a, b\}$ za svaki $j \in \{1, 2, \ldots, T\}$.

Ovako definiran model financijskog tržišta zove se **Cox-Ross-Rubinstein-ov** (CRR) model. Nužan uvjet za nepostojanje arbitraže na financijskom tržištu u okviru CRR modela je isti je kao i kod jednoperiodnog binarnog modela, tj. dan je uvjetom (2).

Uočimo da u svakom trenutku na financijskom tržištu saznajemo nove cijene imovine iz promatranog portfelja. To znači da se količina informacija koje imamo o cijenama portfelja stalno povećava. Matematički, ovako opisan rastući niz informacija modelirat ćemo **filtracijom**

$$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t,\ t \in \{0, 1, \ldots, T\}),$$

gdje $\mathcal{F}_t$ interpretiramo kao skup svih informacija o cijenama portfelja na financijskom tržištu od trenutka 0 do trenutka t.

Vjerojatnost neutralna na rizik $\mathbb{P}^* \colon \mathcal{F} \to [0, 1]$ definira se pomoću P^* iz jednoperiodnog binarnog modela na sljedeći način:

$$\mathbb{P}^*(\boldsymbol{\omega}) = \mathbb{P}^*\big((\omega_1, \ldots, \omega_T)\big) = \prod_{j=1}^{T} P^*(\{\omega_j\}),\ \ \boldsymbol{\omega} \in \Omega.$$

Pokazuje se da je uz tako definiranu vjerojatnost proces diskontiranih cijena

$$\left(\frac{S_1(t)}{(1+r')^t},\ t \in \{0, 1, \ldots, T\} \right)$$

martingal, tj. za svaki $t \in \{0, \ldots, T\}$ vrijedi

$$E^* \left[\frac{S_1(t+1)}{(1+r')^{t+1}} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \frac{S_1(t)}{(1+r')^t}.$$

Dakle, s obzirom na vjerojatnost P^* neutralnu na rizik i uvjetno na poznate informacije o cijeni dionice zaključno s trenutkom t ($\mathcal{F}_t$), očekivana diskontirana cijena u trenutku $(t+1)$ jednaka je diskontiranoj cijeni u trenutku t.

Sada imamo sve što je potrebno za izračun premije za ECO (izvod se može pronaći u [4]). Premija za ECO s trenutkom dospijeća T i cijenom izvršenja K u trenutku $t \in \{0, \ldots, T\}$ dana je sljedećim izrazom:

$$\begin{aligned} C^{CALL}(t) = \frac{1}{(1+r')^{T-t}} \sum_{j=0}^{T-t} \tbinom{T-t}{j} (1-p^*)^j (p^*)^{T-t-j} \cdot \\ \Big(S(t)(1+a)^j(1+b)^{T-t-j} - K \Big)_+ . \end{aligned} \tag{4}$$

Odgovarajući izraz za EPO može se dobiti iz *call-put pariteta* (za detalje pogledati [4]):

$$C^{CALL}(t) - C^{PUT}(t) = S(t) - K(1+r')^{-(T-t)}.$$

Posebno ćemo se usmjeriti na slučaj $t = 0$ jer je to iznos premije koju kupac plaća u trenutku kupovine opcije.

Napomena 5.1. *U konkretnim primjerima, a i b ćemo računati kao prosječni negativni, odnosno pozitivni relativni povrat. Međutim, ti se parametri mogu učiniti i vremenski ovisnima. Uzmemo li ekvidistantnu subdiviziju*

$$\left\{0, \frac{T}{n}, \frac{2T}{n}, \dots, \frac{(n-1)T}{n}, T\right\}$$

segmenta $[0, T]$ na kojemu kontinuirano promatramo tržište, parametre a i b možemo računati kao

$$a = -\sigma/\sqrt{n}, \qquad b = \sigma/\sqrt{n},$$

gdje je σ standardna devijacija povrata.

6 Strategije trgovanja

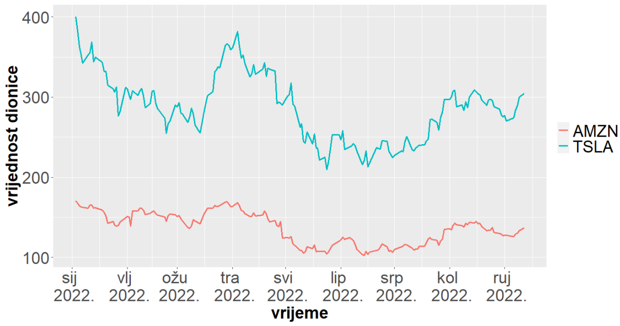
Na konkretnom primjeru, ilustrirat ćemo kako korištenjem opcija možemo povećati vrijednost portfelja. Koristit ćemo podatke preuzete s web portala [6].

Pretpostavimo da na dan 1. 1. 2022. u portfelju imamo 12 500 \$ nerizične financijske imovine koja se ukamaćuje po dnevnoj kamatnoj stopi $r' = 0.0001$. Osim gotovine, u portfelju imamo 25 dionica Tesle i 50 dionica Amazona.

	Min.	Donji kvartil	Medijan	Prosjek	Gornji kvartil	Max.
TSLA	209.4	252.9	288.9	287.6	309.8	399.9
AMZN	102.3	116.9	139.1	136.5	153.2	170.4
portfelj	23 063	24 745	26 855	26 624	28 043	31 018

Tablica 1. Deskriptivna statistika vrijednosti dionica i portfelja u USD

Cijena dionice Tesle u prosjeku je dvostruko veća od cijene dionice Amazona, stoga smo portfelj kreirali u skladu s tim. Vrijednost portfelja je u posljednjih 9 mjeseci varirala između 23 000 \$ i 31 000 \$ s prosjekom 26 624 \$. Najveći dnevni povrat ostvaren je 3. veljače, a iznosio je 4.49 %, dok je najmanji −4.77 % ostvaren 25. travnja.



Slika 2. Kretanje vrijednosti dionica u USD

6.1 Europska call opcija

Najprije ćemo razmotriti korištenje ECO radi povećanja vrijednosti portfelja. Idealno vrijeme za kupovinu takve opcije bi bilo neposredno prije rasta cijena dionice. Na taj način bismo ju mogli iskoristiti da kupimo dionicu po cijeni manjoj od tržišne. Na dan 25.5. cijena dionice Tesle iznosila je 219.6 \$, što je znatno manje od prosjeka. Odlučujemo se na kupnju 25 ECO s cijenom izvršenja $K = 220$ \$ i trenutkom dospijeća 11. 7. U ovom slučaju je $T = 30$ jer od 25. 5. do 11. 7. brojimo samo radne dane kojima je burza otvorena.

Parametre a i b računamo kao prosječni negativni, odnosno pozitivni relativni povrat te oni u ovom slučaju iznose $a = -0.0331$ i $b = 0.02976$. Uočimo da je $a < r' < b$ pa tržište ne dopušta arbitražu. Vjerojatnost jednoperiodnog relativnog porasta cijene za b, tj. vjerojatnost p^* koja određuje vjerojatnost neutralnu na rizik je

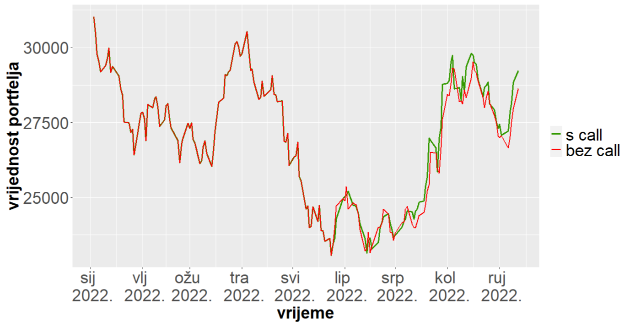
$$p^* = \frac{r' - a}{b - a} = 0.5277.$$

Korištenjem izraza (4), dobiveni iznos premije je 5.88 \$ pa kupujemo 25 opcija po cijeni od 147 \$. Na dan dospijeća 11. 7. cijena dionice iznosi 234.34 \$. Dakle, tržišna cijena dionice je veća od 220 \$ pa koristimo sve kupljene ECO i kupujemo 25 dionica Tesle po cijeni od 220 \$.

Uključivanje ECO u portfelj i njihovo korištenje generiralo je sljedeću zaradu:

$$25 \cdot (-5.88 + 234.34 - 220) \$ = 211.5 \$.$$

Na slici 3 uočavamo da je vrijednost portfelja na dan 11.7. naglo porasla, što je efekt korištenja ECO.



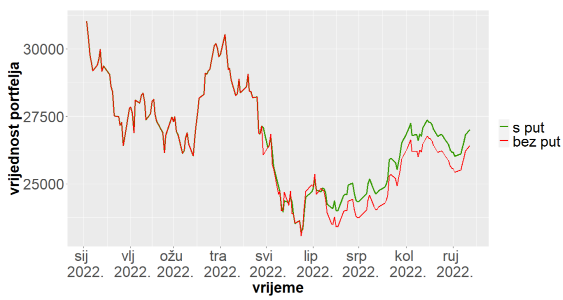
Slika 3. Vrijednost portfelja uz korištenje call opcije

6.2 Europska put opcija

EPO poželjno je posjedovati u trenutku kada su cijene dionice visoke, a predviđa se njihov skori pad. Koristimo ju da bismo dionicu tada prodali po cijeni višoj od tržišne. Promotrimo korištenje EPO za prodaju dionica Amazona. Na dan 28. 4. dionica Amazona vrijedi 144.59 \$, što je za 8 \$ više od prosjeka. Želimo si osigurati prodaju dionica po sličnoj cijeni pa se odlučujemo na kupnju 25 EPO s cijenom izvršenja $K = 140$ \$ i trenutkom dospijeća 10. 6. ($T = 30$). Dobiveni parametri su $a = -0.0244$ i $b = 0.0231$. Pripadna vjerojatnost neutralna na rizik je određena vrijednošću

$$p^* = \frac{r' - a}{b - a} = 0.5153.$$

Uvrštavanjem u izraz (4) i koristeći call-put paritet slijedi da premija na ovu EPO iznosi 13.22 \$. Kupovina 25 takvih opcija košta nas 330.5 \$.



Slika 4. Vrijednost portfelja uz korištenje put opcije

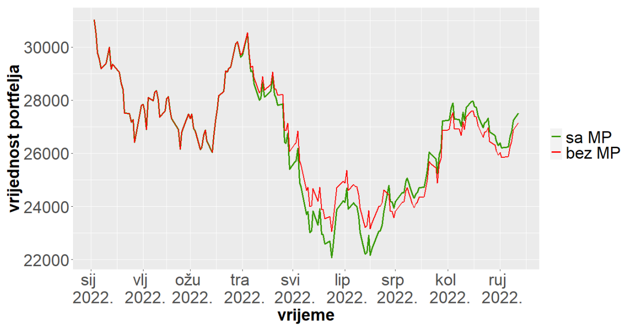
Na dan dospijeća 10.6. cijena dionice Amazona je 109.65 \$ pa iskorištavamo sve opcije i prodajemo 25 dionica Amazona po cijeni od 140 \$. Ukupna zarada iznosi

$$25 \cdot (-13.22 + 140 - 109.65)\ \$ = 428.25\ \$.$$

Na slici 4 uočavamo da je uključivanje EPO u portfelj i njihovo korištenje povećalo vrijednost portfelja.

6.3 Married put

Pretpostavimo da 29. 3. kupujemo 15 dionica Amazona po cijeni 166.3 \$. Njihove cijene su relativno stabilne, no kupujemo i 15 EPO kao osiguranje u slučaju njihovog iznenadnog pada. EPO imaju cijenu izvršenja 150 \$ i trenutak dospijeća 11.5. $(T = 30)$. Koristeći iste a, b i p^* iz prethodnog primjera, slijedi da premija na tu opciju iznosi 9.28 \$. Takva strategija trgovanja zove se **married put strategija** i u ovom slučaju ona se pokazuje korisnom. Naime, na dan izvršenja, cijena dionice Amazona pala je na 105.37 \$ pa odlučujemo prodati 25 dionica po cijeni 44.63 \$ višoj od tržišne, što nam omogućuje posjedovanje EPO.



Slika 5. Vrijednost portfelja uz married put strategiju

Ova strategija generirala je sljedeću zaradu:

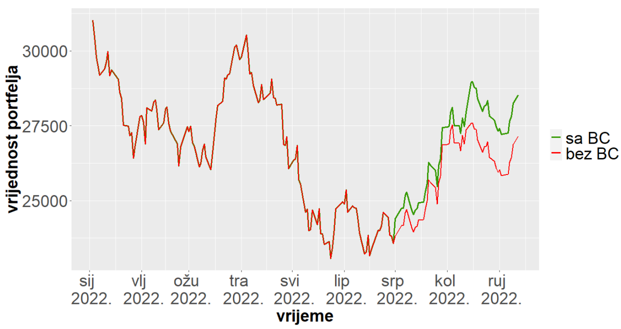
$$15 \cdot (44.63 - 9.28)\ \$ = 530.25\ \$.$$

Slika 5 pokazuje da, iako smo na samom početku perioda pada cijene pretrpjeli veće gubitke nego bez strategije, u konačnici se provedba ove strategije isplatila.

6.4 Bull call spread

Za kraj ćemo opisati strategiju trgovanja koja se odnosi na preprodaju ECO. Prije toga, navest ćemo dva najčešća oblika financijskih tržišta. Financijsko tržište na kojemu se očekuje rast cijena zovemo **bull**, a ono na kojemu se očekuje pad cijena **bear** tržište. Strategija koja podrazumijeva istovremenu kupnju ECO s nižom cijenom izvršenja i prodaju istog broja ECO s višom cijenom izvršenja zove se **bull call spread strategija**.

Pretpostavimo da na dan 30.6. posjedujemo 25 dionica Tesle jedinične cijene 224.47 \$ te 50 ECO s cijenom izvršenja 270 \$ i trenutkom dospijeća 12.8. ($T = 30$). Kako očekujemo rast cijena, želimo prodati ECO i kupiti ECO s istim trenutkom dospijeća, ali nižom cijenom izvršenja, primjerice 230 \$. Za računanje premija koristit ćemo a, b i p^* iz poglavlja 6.1. Za opciju koju posjedujemo premija iznosi 6.47 \$, a za one koje želimo kupiti premija je 17.99 \$. Kupovinom i prodajom 50 opcija potrošili smo $50 \cdot (17.99 - 6.47)\ \$ = 576\ \$$.



Slika 6. Vrijednost portfelja uz bull call spread strategiju

Međutim, u konačnici se ta odluka isplatila. U trenutku dospijeća dionica Tesle vrijedi 304.42 \$ pa kupujemo 50 dionica za 74.42 \$ povoljnije nego da smo ih kupili po tržišnoj cijeni. S obzirom na to da smo prodali EPO, dužni smo našem kupcu prodati upravo kupljene dionice po cijeni od 270 \$. U konačnici, naša zarada iznosi

$$-576\ \$ + 50 \cdot (74.42 - 40)\ \$ = 1\,145\ \$.$$

Analogon ove strategije u slučaju bear tržišta zove se **bear put spread strategija**, a podrazumijeva istovremenu prodaju EPO s nižom cijenom izvršenja i kupovinu istog broja EPO s višom cijenom izvršenja. Primjeri primjene ove i drugih strategija trgovanja koje uključuju ECO i EPO mogu se naći u [3].

Literatura

[1] B. Basrak, *Matematičke financije*, PMF - Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2009.

[2] M. Benšić, N. Šuvak, *Uvod u vjerojatnost i statistiku*, Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2014.

[3] M. Jovanović, M. Milošević, *Financijska matematika*, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Nišu, Niš, 2016.

[4] Z. Vondraček, *Financijsko modeliranje*, PMF - Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, 2018.

[5] *https://www.investopedia.com*

[6] *https://finance.yahoo.com*