Osječki matematički list 23 (2023), 31–44

Slučajni procesi definirani integralom u odnosu na slučajnu mjeru

Danijel Grahovac[*], Dominik Mihalčić[†]

Sažetak

U ovom radu najprije je objašnjen pojam beskonačne djeljivosti za slučajne varijable i procese. Kao poseban oblik slučajnog procesa, definirane su slučajne mjere te su dani najvažniji primjeri. Integral u odnosu na slučajnu mjeru najprije je definiran za jednostavne, a potom za općenite funkcije. Navedeni su nužni i dovoljni uvjeti na podintegralnu funkciju koji osiguravaju da je integral dobro definiran te eksplicitni izrazi za karakterističnu trojku beskonačno djeljive slučajne varijable definirane integralom. U zadnjem dijelu dani su primjeri procesa definiranih integralom i njihova najvažnija svojstva.

Ključne riječi: *beskonačna djeljivost, slučajna mjera, Lévy-Khintchineova formula, Lévyjevi procesi*

Stochastic processes defined by the integral with respect to a random measure

Abstract

This paper first explains the concept of infinite divisibility for random variables and processes. As a special form of stochastic process, random measures are defined and the most important examples are given. The integral with respect to a random measure is first defined

[*]Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayerau Osijeku, email: dgrahova@mathos.hr
[†]Odjel za matematiku, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: dmihalci@mathos.hr

for simple and then for general functions. Necessary and sufficient conditions for the integrand that ensure the integral is well defined are stated. Explicit expressions are given for the characteristic triplet of an infinitely divisible random variable defined by the integral. In the last part, examples of processes defined by the stochastic integral and their most important properties are given.

Keywords: *infinite divisibility, random measure, Lévy-Khintchine formula, Lévy processes*

1 Uvod

Pojam slučajne mjere prisutan je već nekoliko desetljeća i osnova je za modernu teoriju vjerojatnosti. Slučajnu mjeru možemo shvatiti kao svojevrsni oblik slučajnog procesa koji više nije indeksiran brojevima, već skupovima σ-algebre. Ona ima slična svojstva kao i mjera u klasičnom smislu, ali njezine vrijednosti više nisu brojevi, nego slučajne varijable. Prema toj analogiji, integral neke funkcije po slučajnoj mjeri je slučajna varijabla. Ako podintegralna funkcija f ovisi i o nekom parametru t iz parametarskog prostora T, integralom u odnosu na slučajnu mjeru Λ

$$\int_S f(t,s)\Lambda(ds), \quad t \in T,$$

definiran je slučajni proces $(X(t),\ t \in T)$. Procesi definirani integralom u odnosu na slučajnu mjeru nisu ni u kojem smislu zasebna vrsta procesa. Naprotiv, velika većina poznatih procesa ima integralnu reprezentaciju među kojima su i Lévyjevi procesi. Takav zapis procesa ponekad je prikladniji za korištenje, nego, primjerice, karakteristične funkcije.

Doduše, nećemo promatrati bilo kakve slučajne mjere, nego ćemo se fokusirati na beskonačno djeljive slučajne mjere. U poglavlju 2 najprije ćemo uvesti pojam beskonačne djeljivosti za slučajne varijable i procese te potom za slučajne mjere. Posebna karakteristika beskonačno djeljivih objekata jest specijalan oblik njihove karakteristične funkcije.

Glavna ideja iza integrala u odnosu na slučajnu mjeru bit će razjašnjena u poglavlju 3 kada ćemo dati nužne i dovoljne uvjete za podintegralnu funkciju da bi integral bio dobro definiran. Zadnje poglavlje posvećeno je primjerima procesa definiranima integralom.

2 Beskonačna djeljivost

Pojam beskonačne djeljivosti navodimo najprije za slučajne varijable, zatim za slučajne procese te konačno za slučajne mjere.

2.1 Beskonačno djeljive slučajne varijable

Definicija 2.1. Za slučajnu varijablu X kažemo da je *beskonačno djeljiva* ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih varijabli $X_i^{(n)}$, $i = 1, \ldots, n$, takav da je

$$X \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{n} X_i^{(n)}.$$

Često kažemo i da je distribucija slučajne varijable X beskonačno djeljiva. Engleski naziv je *infinitely divisible* pa ćemo umjesto „beskonačno djeljiva" ponekad kraće pisati ID. S $\phi_X(\theta) = Ee^{i\theta X}$, $\theta \in \mathbb{R}$, ćemo označavati karakterističnu funkciju slučajne varijable X. Beskonačnu djeljivost možemo ekvivalentno iskazati pomoću karakterističnih funkcija [1].

Propozicija 2.1. *Slučajna varijabla X je ID ako i samo ako za svaki $n \in \mathbb{N}$, postoji karakteristična funkcija $\phi_X^{(n)}$ slučajne varijable $X^{(n)}$ takva da je*

$$\phi_X(\theta) = \left(\phi_X^{(n)}(\theta)\right)^n, \ \ \theta \in \mathbb{R}.$$

Primjer 1. Ako je $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, onda je $\phi_X(\theta) = e^{i\theta\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2}$ pa je

$$\phi_X^{(n)}(\theta) = \sqrt[n]{\phi_X(\theta)} = e^{i\theta\frac{\mu}{n} - \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{n}\theta^2}, \ \theta \in \mathbb{R},$$

što je karakteristična funkcija $\mathcal{N}\left(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$ distribucije. Dakle, X je ID.

Ostali primjeri uključuju Poissonovu, Cauchyjevu, eksponencijalnu, gama, geometrijsku i druge distribucije, ali ne binomnu i uniformnu. Glavni alat za proučavanje ID slučajnih varijabli je njihova karakteristična funkcija koja se može zapisati u posebnom obliku koji se naziva *Lévy-Khintchineova formula*. Prije nego što ju iskažemo, moramo uvesti pojam Lévyjeve mjere.

Definicija 2.2. Za Borelovu mjeru μ na $\mathbb{R}$ kažemo da je *Lévyjeva* ako zadovoljava $\mu(\{0\}) = 0$ i $\int_{\mathbb{R}} \min\{1, x^2\}\mu(dx) < \infty$.

Za $x \in \mathbb{R}$ definiramo tzv. *centrirajuću funkciju* τ (eng. *centering function, truncation*) s

$$\tau(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1, \\ -1, & x < -1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Teorem 2.1 (Lévy-Khintchineova formula, [5]). *Neka je X ID slučajna varijabla. Tada postoji jedinstvena trojka (b, σ^2, μ) takva da je*

$$\phi_X(\theta) = \exp\left\{ i\theta b - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta\tau(x) \right) \mu(dx) \right\}, \qquad (1)$$

gdje je $b \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$ i μ Lévyjeva mjera na $\mathbb{R}$.

Trojku (b, σ^2, μ) zovemo *karakteristična trojka* beskonačno djeljive slučajne varijable X i pišemo $X \sim ID(b, \sigma^2, \mu)$. Parametar b interpretira se kao parametar pomaka od X iako to nije u potpunosti točno jer stvarni pomak ovisi i o funkciji τ. Parametar σ^2 predstavlja varijancu Gaussovske komponente od X, a mjera μ opisuje Poissonovsku komponentu. Ako je $\sigma^2 = 0$, X je Poissonovog tipa, a ukoliko je $\mu \equiv 0$, X je normalno distribuirana (Gaussovska) s očekivanjem b i varijancom σ^2. Vrijedi i obrat prethodne tvrdnje, u smislu da za danu trojku (b, σ^2, μ) postoji slučajna varijabla X čija je karakteristična funkcija dana s (1). Ponekad je praktičnije koristiti logaritam karakteristične funkcije koji zovemo *funkcija kumulanata*, a označava se s

$$C\{\theta \ddagger X\} = \log\left(Ee^{i\theta X}\right), \ \ \theta \in \mathbb{R}.$$

2.2 Beskonačno djeljivi slučajni procesi

Definicija 2.3. Za slučajni proces $\mathbf{X} = (X(t),\ t \in T)$ kažemo da je *beskonačno djeljiv* ako su mu sve konačnodimenzionalne distribucije beskonačno djeljive.

Najpoznatiji primjer beskonačno djeljivih procesa svakako su Lévyjevi procesi. U njih ubrajamo procese kao što su Brownovo gibanje i složeni Poissonov proces, ali i brojne druge.

Definicija 2.4. Slučajni proces $\mathbf{L} = (L(t),\ t \geq 0)$ je *Lévyjev proces* ako za njega vrijedi:

(i) $L(0) = 0$ g.s.,

(ii) $\mathbf{L}$ ima nezavisne priraste, tj. za svaki $n \geq 2$ i $0 \leq t_1 < \cdots < t_n$ prirasti $L(t_2) - L(t_1), \ldots, L(t_n) - L(t_{n-1})$ su nezavisni,

(iii) $\mathbf{L}$ ima stacionarne priraste, tj. za $0 \leq s < t$ vrijedi $L(t) - L(s) \overset{d}{=} L(t-s)$,

(iv) $\mathbf{L}$ je neprekidan po vjerojatnosti, tj. $\lim_{s \to t} P(|X_t - X_s| > \varepsilon) = 0$,

(v) **L** ima zdesna neprekidne trajektorije koje imaju lijeve limese (*càdlàg*[1] trajektorije).

2.3 Beskonačno djeljive slučajne mjere

Definicija 2.5. Neka je $(S, \mathcal{S})$ izmjeriv prostor. *Slučajna mjera* na $(S, \mathcal{S})$ je svaka familija slučajnih varijabli $\Lambda = (\Lambda(A),\ A \in \mathcal{S})$ na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ koja zadovoljava

(i) $\Lambda(\emptyset) = 0$ g.s.,

(ii) za svaki niz $\{A_n\}$ u $\mathcal{S}$ vrijedi

$$\Lambda\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(A_n) \ \ g.s.$$

Za slučajnu mjeru Λ kažemo da je

- *nezavisno raspršena* ako za sve disjunktne skupove $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{S}$ vrijedi da su $\Lambda(A_1), \ldots, \Lambda(A_n)$ nezavisne slučajne varijable,
- *beskonačno djeljiva* ako je $\Lambda(A)$ beskonačno djeljiva slučajna varijabla, za svaki $A \in \mathcal{S}$.

Za fiksan $A \in \mathcal{S}$, $\Lambda(A) = \Lambda(A, \cdot)$ je slučajna varijabla, no za fiksan $\omega \in \Omega$ preslikavanje $\Lambda(\cdot, \omega)$ nije nužno mjera na S. Slučajna mjera poseban je oblik slučajnog procesa kod kojega prostor parametara ima strukturu σ-algebre što znači da beskonačno djeljive slučajne mjere možemo okarakterizirati pomoću karakterističnih trojki. Tako je za svaki $A \in \mathcal{S}$,

$$\Lambda(A) \sim ID(\beta_A, \gamma_A, \nu_A),$$

za neku karakterističnu trojku $(\beta_A, \gamma_A, \nu_A)$. Međutim, funkcija kumulanata češće se zapisuje pomoću *lokalnih karakteristika*:

$$\begin{aligned} C\{\theta \ddagger \Lambda(A)\} = \int_A \Big[& i\theta b(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s)\theta^2 \\ & + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta\tau(x)\right) \rho(s, dx)\Big] m(ds) \end{aligned} \tag{2}$$

Za ID slučajnu mjeru Λ na $(S, \mathcal{S})$ ćemo tada reći da ima

- *kontrolnu mjeru m*,

[1]akronim od francuskog *continue à droite, limite à gauche*

- *lokalne pomake* $(b(s),\ s \in S)$,
- *lokalne Gaussovske varijance* $(\sigma^2(s),\ s \in S)$ i
- *lokalne Lévjeve mjere* $(\rho(s,\cdot),\ s \in S)$.

Označimo li izraz unutar uglatih zagrada u (2) s $K(\theta,s)$, funkciju kumulanata kraće možemo zapisati u obliku

$$C\{\theta \ddagger \Lambda(A)\} = \int_A K(\theta,s)m(ds).$$

Međutim, mi ćemo se fokusirati na slučaj kada lokalne karakteristike ne ovise o s (pa samim time ni funkcija K). Tada kažemo da je slučajna mjera *homogena*, a funkcija kumulanata je

$$C\{\theta \ddagger \Lambda(A)\} = m(A)K(\theta). \tag{3}$$

Primjer 2 (*Lévyjev proces*). Uzmimo homogenu slučajnu mjeru Λ na izmjerivom prostoru $(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ s kontrolnom Lebesgueovom mjerom λ. Lévyjev proces $(L(t),\ t \geq 0)$ možemo definirati pomoću takve slučajne mjere na način

$$L(t) = \Lambda\big((0,t]\big),\ \ t \geq 0.$$

Funkcija kumulanata od $L(t)$ je

$$\begin{aligned} C\{\theta \ddagger L(t)\} &= \lambda\big((0,t]\big)K(\theta) \\ &= i\theta tb - \frac{1}{2}t\sigma^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta\tau(x)\right)(t\rho)(dx), \end{aligned}$$

tj. $L(t) \sim ID(tb, t\sigma^2, t\rho)$, za $t \geq 0$. Uočimo da je $L(1) \sim ID(b,\sigma^2,\rho)$.

Primjer 3 (*Gaussovska slučajna mjera*). Neka je Λ homogena slučajna mjera na $(\mathbb{R}_+,\mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ takva da je $\rho \equiv 0$ s kontrolnom Lebesgueovom mjerom λ. Takvu slučajnu mjeru zovemo *Gaussovska*. Funkcija kumulanata ima poznati oblik (Primjer 1)

$$C\{\theta \ddagger \Lambda\big((0,t]\big)\} = t\left(i\theta b - \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2\right),$$

pa je $\Lambda\big((0,t]\big) \sim \mathcal{N}(tb, t\sigma^2)$. Za Gaussovsku slučajnu mjeru kažemo da je *centrirana* ako je $b = 0$. Takva slučajna mjera generira *Brownovo gibanje* (vidi primjerice [5]).

Primjer 4 (*Stabilne slučajne mjere*). Neka je $\alpha \in (0,2]$ i Λ homogena slučajna mjera na $(S,\mathcal{S})$ s kontrolnom mjerom m te lokalnim karakteristikama $b = \sigma^2 = 0$ i

$$\rho(dx) = \left(w_+ x^{-(1+\alpha)} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) + w_- |x|^{-(1+\alpha} \mathbf{1}_{(-\infty,0)}\right) dx,$$

gdje su $w_+, w_- \geq 0$. Takva slučajna mjera zove se *α-stabilna*. Ako je dodatno $w_+ = w_-$, govorimo o *simetričnoj* α-stabilnoj ($S\alpha S$) slučajnoj mjeri. Funkcija kumulanata $S\alpha S$ slučajne mjere je oblika $C\{\theta \ddagger \Lambda(A)\} = -\tilde{m}(A)|\theta|^{\alpha}$, $A \in \mathcal{S}$, gdje je $\tilde{m}$ *modificirana* kontrolna mjera [4]. Gaussovska slučajna mjera specijalan je slučaj $S\alpha S$ slučajne mjere za $\alpha = 2$.

3 Integral u odnosu na slučajnu mjeru

Prethodno definirane ID slučajne mjere nisu toliko važne same po sebi, ali integriranjem odgovarajućih funkcija u odnosu na takvu mjeru mogu se dobiti razni primjeri ID slučajnih varijabli pa i procesa. Glavna ideja ovog poglavlja jest da ID proces $(X(t),\ t \in T)$ možemo zapisati u obliku

$$X(t) = \int_S f(t,s)\Lambda(ds),$$

gdje je $(f(t,\cdot),\ t \in T)$ familija determinističkih izmjerivih funkcija i Λ ID slučajna mjera. Integral ćemo najprije definirati za jednostavnu funkciju prema [2].

Definicija 3.1. Neka je $\Lambda = (\Lambda(A),\ A \in \mathcal{S})$ ID slučajna mjera i $f : S \to \mathbb{R}$ jednostavna funkcija oblika

$$f(s) = \sum_{j=1}^{k} a_j \mathbf{1}_{A_j}(s), \ \ s \in S,$$

gdje su $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ i $A_1, \ldots, A_k \in \mathcal{S}$ disjunktni skupovi. Za svaki $A \in \mathcal{S}$, definiramo integral funkcije f u odnosu na slučajnu mjeru Λ s

$$\int_A f(s)\Lambda(ds) = \sum_{j=1}^{k} a_j \Lambda(A \cap A_j).$$

Definiciju možemo proširiti na općenitu izmjerivu funkciju f tako da uzmemo niz jednostavnih funkcija (f_n) koji konvergira prema f m-skoro svuda i stavimo

$$\int_A f(s)\Lambda(ds) = \lim_{n\to\infty} \int_A f_n(s)\Lambda(ds),$$

gdje limes shvaćamo u smislu konvergencije po vjerojatnosti. Sljedeći teorem (vidjeti [3]) daje karakterizaciju Λ-integrabilne funkcije.

Teorem 3.1. *Neka je $f : S \to \mathbb{R}$ izmjeriva funkcija i Λ ID slučajna mjera. Tada je funkcija f Λ-integrabilna ako i samo ako vrijedi*

(*i*) $\int_S \left| f(s)b + \int_{\mathbb{R}} \left(\tau(xf(s)) - f(s)\tau(x)\right)\rho(dx) \right| m(ds) < \infty$,

(*ii*) $\int_S f(s)^2 \sigma^2 m(ds) < \infty$,

(*iii*) $\int_S \int_{\mathbb{R}} \min\left\{1, \left(xf(s)\right)^2\right\} \rho(dx) m(ds) < \infty$.

Uočimo da se svojstvo Λ-integrabilnosti zapravo svodi na integrabilnost u odnosu na kontrolnu mjeru m. U [2] je pokazano da integral Λ-integrabilne funkcije f ima funkciju kumulanata

$$C\left\{\theta \ddagger \int_S f(s)\Lambda(ds)\right\} = \int_S K(\theta f(s)) m(ds), \ \ \theta \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

gdje je K kao u (3). Iz takvog oblika nije na prvu vidljivo da se radi o beskonačno djeljivoj slučajnoj varijabli jer uz elemente karakteristične trojke stoji faktor $f(s)$. Međutim, jednostavnom transformacijom ovog izraza može se doći do oblika kao u Lévy-Khintchineovoj formuli. O tome govori sljedeća tvrdnja koja daje eksplicitne izraze za karakterističnu trojku, a čiji se dokaz može pronaći u [2].

Teorem 3.2. *Ako je f Λ-integrabilna, funkcija kumulanata od $\int_S f(s)\Lambda(ds)$ može se zapisati u obliku*

$$C\left\{\theta \ddagger \int_S f(s)\Lambda(ds)\right\} = i\theta b_f - \frac{1}{2}\sigma_f^2\theta^2 + \int_{\mathbb{R}} \left(e^{i\theta x} - 1 - i\theta\tau(x)\right) \nu_f(dx),$$

gdje karakterističnu trojku čine

$$\begin{aligned} b_f &= \int_S \left(f(s)b + \int_{\mathbb{R}} \left(\tau(xf(s)) - f(s)\tau(x)\right)\rho(dx) \right) m(ds), \\ \sigma_f^2 &= \int_S f(s)^2\sigma^2 m(ds), \\ \nu_f(B) &= \nu_S\left(\{(s,x) \in S \times \mathbb{R} : \ f(s)x \in B\backslash\{0\}\}\right), \ \ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Ponekad je prikladnije proučavati svojstva ID procesa koristeći integralnu reprezentaciju, nego karakterističnu funkciju opisanom formulom (1). Na sreću, ispostavlja se da svaki ID proces možemo zapisati kao integral u odnosu na ID slučajnu mjeru. Tu činjenicu smo naveli na početku ovog poglavlja, a sada ju iskazujemo nešto preciznije prema [2].

Teorem 3.3. *Neka je $(X(t),\ t \in T)$ beskonačno djeljiv slučajni proces sa σ-konačnom Lévyjevom mjerom. Tada postoje izmjeriv prostor $(S, \mathcal{S})$, beskonačno djeljiva slučajna mjera Λ na njemu s kontrolnom mjerom m te lokalnim karakteristikama $(b, \sigma^2, \rho(\cdot))$ i familija Λ-izmjerivih funkcija $(f(t,\cdot),\ t \in T)$ na S takvi da je*

$$(X(t),\ t \in T) \stackrel{d}{=} \left(\int_S f(t,s)\Lambda(ds) \right).$$

4 Primjeri procesa definiranih kao stohastički integral

Ovdje ćemo navesti najvažnije primjere slučajnih procesa definiranih kao integral u odnosu na ID slučajnu mjeru. Kao što smo vidjeli, takvih procesa ima mnogo jer praktički svaki ID proces ima takvu reprezentaciju. Najjednostavniji primjer je Lévyjev proces $(L(t),\ t \geq 0)$ koji smo definirali i kao homogenu ID slučajnu mjeru Λ na $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ s kontrolnom Lebesgueovom mjerom λ. Taj proces očito ima integralnu reprezentaciju jer se može zapisati u obliku

$$L(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \mathbf{1}_{(0,t]}(s)\Lambda(ds).$$

Na taj način Lévyjev proces možemo reprezentirati integriranjem familije funkcija $(\mathbf{1}_{(0,t]}(\cdot),\ t \geq 0)$ u odnosu na homogenu ID slučajnu mjeru.

4.1 Linearno frakcionalno stabilno gibanje

Linearna frakcionalna stabilna gibanja čine široku familiju stabilnih procesa koji imaju integralnu reprezentaciju. Kraće ćemo pisati LFSG. Određena su sa četiri parametra što daje zaista velik broj različitih procesa. Najprije ćemo definirati LFSG koristeći stabilnu slučajnu mjeru (Primjer 4), a potom ćemo specificiranjem njegovih parametara svesti razmatranje na nešto poznatije procese.

Definicija 4.1. Neka je $\alpha \in (0,2],\ H \in (0,1)$ takav da $H \neq 1/\alpha$ i $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $|a| + |b| > 0$. Nadalje, neka je Λ α-stabilna slučajna mjera na $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ s kontrolnom Lebesgueovom mjerom. *Linearno frakcionalno stabilno gibanje* je slučajni proces $(L_{\alpha,H}(a,b;t),\ t \geq 0)$ dan s

$$L_{\alpha,H}(a,b;t) = \int_{\mathbb{R}_+} f_{\alpha,H}(a,b;t,s)\Lambda(ds), \tag{5}$$

gdje je

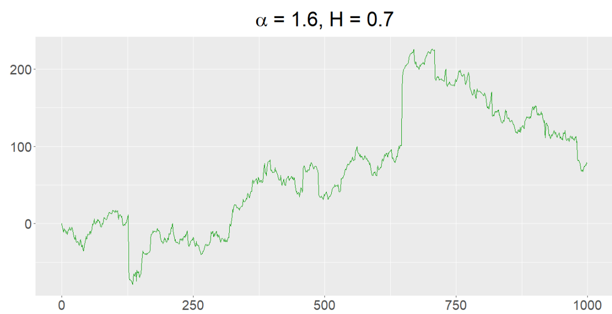
$$f_{\alpha,H}(a,b;t,s) = a\left[(t-s)_+^{H-1/\alpha} - (-s)_+^{H-1/\alpha}\right] + b\left[(t-s)_-^{H-1/\alpha} - (-s)_-^{H-1/\alpha}\right],$$

pri čemu $x_+ = \max\{x,0\}$ označava pozitivni dio, a $x_- = \max\{-x,0\}$ negativni dio od x.

Za $H = 1$, LFSG nije definirano, stoga je uvjet $H \in (0,1)$ nužan za njegovo postojanje. Pokazuje se da LFSG ima stacionarne priraste te je H-sebi-sličan proces što znači da procesi $(L_{\alpha,H}(a,b;ct),\ t \geq 0)$ i $(c^H L_{\alpha,H}(a,b;t),\ t \geq 0)$ imaju iste konačnodimenzionalne distribucije za svaki $c > 0$ (vidjeti [4]). U slučaju kada je $H > 1/\alpha$, kažemo da prirasti imaju svojstvo *dugoročne zavisnosti*, a kada je $H < 1/\alpha$, imaju svojstvo *negativne zavisnosti*. Ako u (5) uzmemo $a = b = 1$, podintegralna funkcija postaje

$$f_{\alpha,H}(1,1;t,s) = |t-s|^{H-1/\alpha} - |s|^{H-1/\alpha}$$

te LFSG dobiva epitet *dobro balansirano*. Ono općenito ne mora imati nezavisne priraste pa samo poznavanje distribucijskih svojstava nije dovoljno za simuliranje trajektorija takvog procesa. U programskom jeziku R razvijen je paket `rlfsm` (Mazur i Otryakhin, 2022.) koji služi za simuliranje LFSG i statističko zaključivanje o njemu. Slika 1 prikazuje LFSG u slučaju kada je $H > 1/\alpha$, a Slika 2 obrnuti slučaj. U prvom slučaju prirasti imaju svojstvo dugoročne zavisnosti, a u drugom svojstvo negativne zavisnosti.



Slika 1. Trajektorija dobro balansiranog LFSG za $\alpha = 1.6$ i $H = 0.7$

Suzili smo priču na vrlo specifičan oblik linearnog frakcionalnog stabilnog gibanja kod kojega je $a = b = 1$. Kao proizvoljne parametre još imamo α i H koji nam i dalje daju veliku fleksibilnost. Za $\alpha = 2$, slučajna mjera Λ postaje Gaussovska što nas dovodi do poznate familije procesa.

Slika 2. Trajektorija dobro balansiranog LFSG za $\alpha = 1.8$ i $H = 0.2$

4.2 Frakcionalno Brownovo gibanje

Definicija 4.2. Gaussovski H-sebi sličan proces sa stacionarnim prirastima zove se *frakcionalno Brownovo gibanje* (FBG) i označava s $(B_H(t),\ t \geq 0)$. Kažemo da je *standardno* ako je Var $B_H(1) = 1$.

FBG možemo ekvivalentno definirati i tako da kažemo da je to Gaussovski proces s očekivanjem 0 i funkcijom autokovarijanci

$$\Sigma(t_1, t_2) = \frac{\sigma^2}{2}\left(t_1^{2H} + t_2^{2H} - |t_1 - t_2|^{2H}\right), \quad t_1, t_2 \geq 0.$$

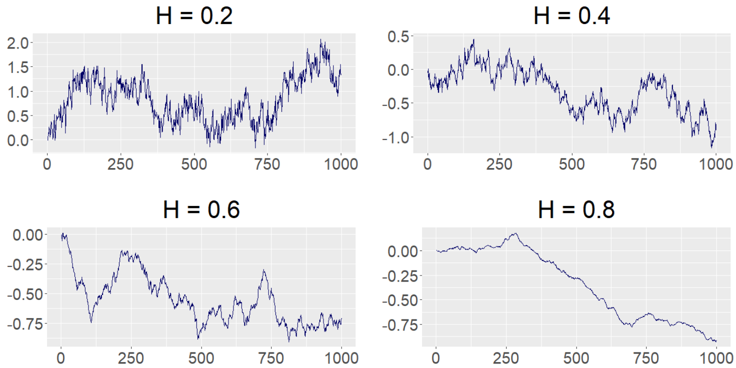
Za više detalja vidjeti [4]. Frakcionalno Brownovo gibanje je specijalan slučaj prethodno opisanog LFSG te se prema tome može zapisati u integralnom obliku na sljedeći način

$$B_H(t) = \int_{\mathbb{R}_+} \left(|t-s|^{H-1/2} - |s|^{H-1/2}\right) \Lambda(ds),$$

gdje je Λ Brownovo gibanje. Uočimo da za $H = 1/2$ pridjev *frakcionalno* postaje suvišan. Na Slici 3 prikazane su trajektorije FBG za $H = 0.2, 0.4, 0.6$ i 0.8.

4.3 Ornstein-Uhlenbeckov proces

U ovom potpoglavlju ćemo radi preglednosti integral funkcije f u odnosu na slučajnu mjeru Λ pisati u formi Riemannovog integrala: $\int_a^b f(s)\, d\Lambda(s)$. Naime, slučajna mjera Λ će biti vezana uz Brownovo gibanje $(B(t),\ t \geq 0)$ (Primjer 3) pa će ponekad biti prikladnije pisati $dB(s)$ umjesto $B(ds)$. Treba imati na umu da je to samo oznaka za prethodno definirani $\int_{[a,b]} f(s)\Lambda(ds)$.



Slika 3. FBG za različite izbore H

Definicija 4.3. Ornstein-Uhlenbeckov proces je stacionarno rješenje stohastičke diferencijalne jednadžbe

$$dX(t) = \lambda(\mu - X(t)) + \sigma dB(t),$$

gdje su $\lambda, \sigma > 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ i $(B(t),\ t \geq 0)$ Brownovo gibanje.

Mi ćemo se radi jednostavnosti fokusirati na slučaj kada je $\mu = 0$ i $\sigma = 1$. Tada je rješenje prethodne jednadžbe dano u integralnom obliku

$$X(t) = \int_0^\infty e^{-\lambda t + s} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(\lambda t - s) dB(s).$$

Koristeći jednadžbu (4), slijedi da je funkcija kumulanata OU procesa dana formulom

$$C\{\theta \ddagger X(t)\} = \int_{\mathbb{R}_+} K\Big(\theta e^{-\lambda t + s} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(\lambda t - s)\Big) ds.$$

Za proizvoljni $h > 0$ tada vrijedi

$$\begin{aligned} C\{\theta \ddagger X(t+h)\} &= \int_{\mathbb{R}_+} K\Big(\theta e^{-\lambda t - \lambda h + s} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(\lambda t + \lambda h - s)\Big) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} K\Big(\theta e^{-\lambda t + u} \mathbf{1}_{[0,\infty)}(\lambda t - u)\Big) ds \\ &= C\{\theta \ddagger X(t)\}. \end{aligned}$$

Time smo pokazali da je $X(t+h) \stackrel{d}{=} X(t)$, za svaki $t \geq 0$. Slično se pokazuje da su i konačnodimenzionalne distribucije OU procesa invarijantne na vremenske pomake, što znači da se radi o *strogo stacionarnom* procesu.

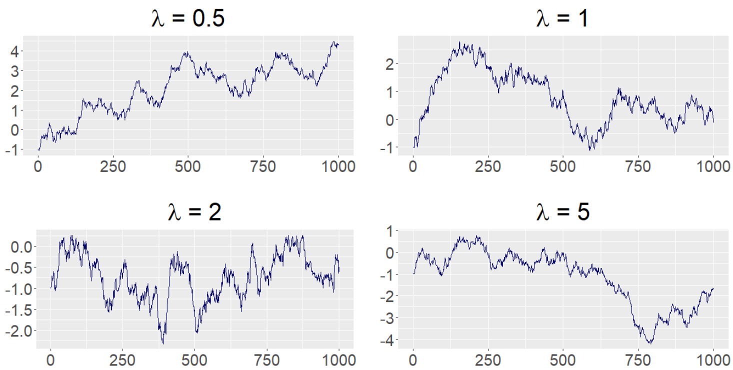
Za slučajni proces $(X(t),\ t \geq 0)$ kažemo da je *proces pomičnih prosjeka* ako ima integralnu reprezentaciju

$$X(t) = \int_{\mathbb{R}_+} f(t-s)\Lambda(ds),$$

za Λ-integrabilnu funkciju f. Ako stavimo $f(s) = e^{-\lambda s}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(s)$, slijedi da OU proces ima to svojstvo. Ako je dodatno OU proces $(X(t),\ t \geq 0)$ kvadratno integrabilan s očekivanjem 0, tada je njegova autokorelacijska funkcija r dana s [4]

$$r(u) = e^{-\lambda u}, \quad u \geq 0.$$

Na Slici 4 prikazane su trajektorije OU procesa za $\lambda = 0.5, 1, 2$ i 5.



Slika 4. Trajektorije OU procesa za različite λ

Literatura

[1] D. Applebaum, *Lévy Processes and Stochastic Calculus*, Cambridge University Press, 2009.

[2] B. S. Rajput, J. Rosinski, *Spectral representations of infinitely divisible processes*, Probability Theory and Related Fields, 1989.

[3] G. Samorodnitsky, *Stochastic Processes and Long Range Dependence*, Springer, 2016.

[4] G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu, *Stable Non-Gaussian Random Processes: Stochastic Models with Infinite Variance*, CRC press, 1994.

[5] K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.