

# NUMERIČKA SIMULACIJA PROMETNOG TOKA

## Numerical Simulation of Traffic Flow

Iva Brkić\*, Bojan Crnković\*\*

### Sažetak

*U radu se razmatra pojam prometnog toka koji se opisuje pomoću hiperboličkih diferencijalnih jednadžbi. Model koji se koristi je Lighthill-Whitham-Richardsov model (LWR model). Navedeni model koristi dva parametra za opisivanje prometnog toka – gustoću i prosječnu brzinu vozila. Numerička aproksimacija LWR modela je formulirana preko zakona očuvanja. Također, kod numeričkih rezultata je korišten model konačnih volumena. Opisan je pojam udarnog vala i vala razrjeđenja u prometnom toku te prikazana simulacija prometnog toka koji na određenoj udaljenosti ima postavljen semafor. Dobiveni rezultati u radu su uspoređeni s rezultatima prethodnih istraživanja.*

**Ključne riječi:** model prometnog toka, diferencijalne jednadžbe, metoda konačnih volumena, Roeova linearizacija

### Abstract

*The paper discusses the concept of traffic flow described by hyperbolic differential equations. In this paper the Lighthill-Whitham-Richards model (LWR model) is used to describe traffic flow. The said model uses two parameters to describe the traffic flow – density and average speed of vehicles. Numerical approximation of the LWR model is formulated through scalar conservation laws. The finite volume method is used for numerical results. The term of shock wave and propagation of rarefaction wave in traffic flow are described. This paper focuses on numerical simulation of traffic flow via fluid dynamics model for a single road with a traffic light. The results obtained in this paper are compared with previous studies.*

**Key words:** traffic flow model, differential equations, Finite volume method, Roe linearization

---

\* Županijska uprava za ceste Primorsko-goranske županije, Nikole Tesle 9/X, 51000 Rijeka  
E-mail: [ibrkic2@student.uniri.hr](mailto:ibrkic2@student.uniri.hr)

\*\* Fakultet za matematiku Sveučilišta u Rijeci, Ul. Radmile Matejčić 2, 51000 Rijeka  
E-mail: [bojan.crnkovic@uniri.hr](mailto:bojan.crnkovic@uniri.hr)

## 1. Uvod

Prema autorima [1,2], pojam prometnog toka definira se kao istovremeno kretanje više prometnih entiteta na putu u određenom poretku prema određenim zakonitostima. Proučavanje teorije prometnog toka usko je povezano s prevencijom zagušenja prometnog toka. Zagušenje prometnog toka na prometnicama javlja se povećanjem uporabe prometnice, a karakterizirano je manjim brzinama kretanja vozila, duljim vremenom putovanja i prometnim gužvama. Zagušenje prometnog toka će se pojaviti kada je promet toliko velik da će interakcija vozila smanjiti brzinu istih [3]. Za opisivanje prometnog toka koriste se sljedeći parametri: protok vozila, brzina, gustoća, vrijeme putovanja vozila u toku, vremenski interval slijeđenja vozila u toku i razmak slijeđenja vozila [1,2].

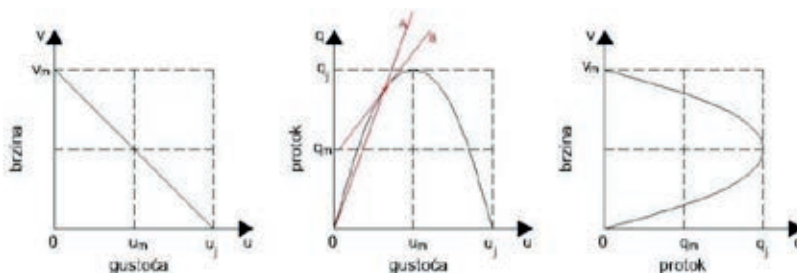
Protok je broj vozila koja prođu kroz promatrani presjek prometnice u jedinici vremena gledano u jednom smjeru za jednosmjernu prometnicu ili u oba smjera za dvosmjernu prometnicu. Gustoća prometnog toka je broj vozila po jedinici duljine. Pojam brzine podrazumijeva prijeđeni put u jedinici vremena. Može se odnositi na brzinu pojedinog vozila ili srednju vrijednost brzina svih vozila u prometnom toku. Interval slijeđenja vozila je vrijeme između prolaska dva uzastopna vozila (čeonni prolazak vozila) kroz presjek promatranog odsječka puta. Razmak slijeđenja vozila je prostorni razmak dva uzastopna vozila u toku. Promatrajući realne prometne tokove, razmak u slijeđenju vozila na odsječku puta predstavlja srednju vrijednost svih razmaka slijeđenja između uzastopnih vozila u promatranom toku [1,2].

Kako bi se teorijske relacije osnovnih parametara prometnog toka primijenile na realne uvjete u prometu, izvršena su brojna empirijska istraživanja koja prikazuju ovisnost brzine vozila o gustoći te brzine i protoka vozila. Matematički modeli prometnog toka dijele se na determinističke i stohastičke matematičke modele, a deterministički na makroskopske i mikroskopske [4]. Makroskopski model promatra prometni tok kao cjelinu te koristi analogiju protjecanja fluida. Najznačajniji makroskopski model je Lighthill-Whitham-Richardsov model (LWR model) koji koristi nelinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe za opisivanje prometnog toka [5, 6]. U ovome radu prikazat će se simulacija prometnog toka u jednoj prometnoj traci pomoću LWR modela, odnosno pomoću hiperboličkih nelinearnih diferencijalnih jednadžbi.

## 2. Pregled područja

Prometni tok može se opisati pomoću različitih matematičkih modela, a kako je prikazano u nastavku.

Greenshields je prvi ustanovio linearni parabolički model protok – gustoća, koji se još naziva fundamentalni dijagram prometnog toka [1]. Dijagram je prikazan na Slici 1. Greenberg [7] je zavisnost osnovnih parametara prometnog toka prikazao pomoću logaritamskog modela. Underwood [8] vezu između brzine i gustoće prikazuje pomoću eksponencijalnog modela. Nedostatak ovog modela je vidljiv kod veće gustoće prometnog toka gdje srednja prostorna brzina ne iznosi nula. Novija istraživanja usmjerena su prema poboljšanju postojećih modela prometnog toka.



**Slika 1.** Fundamentalni dijagrami prometnog toka

Makroskopski model [1,3] kod opisivanja zakonitosti prometnog toka koristi analogiju protjecanja fluida. Pretpostavlja se da se svako pojedinačno vozilo u prometnom toku kreće isključivo po zakonitostima ukupnoga toka. Makroskopski model je baziran na fizikalnom principu zakona očuvanja. Model zanemaruje međusobnu interakciju vozila. Navedeni model je pogodan za promatranje prometnih tokova velikih gustoća. S obzirom na sličnost protjecanja fluida i kretanja prometnog toka, kod opisivanja zakonitosti prometnog toka potrebno je uzeti u obzir polazne uvjete. Prometni tokovi moraju biti jednosmjerni, kontinuirani i homogeni.

Prema autorima [5], fundamentalna hipoteza je da u bilo kojoj točki prometnice protok predstavlja funkciju gustoće (broj vozila po dužini). Teorija koristi hidrodinamička načela gdje se kinematički valovi grupiraju i formiraju kinematičke udarne valove. Teorija [5] koristi parametre protoka ( $q$ ), gustoće ( $u$ ), brzine ( $v$ ), a uzimajući u obzir poziciju ( $x$ ) i vrijeme ( $t$ ). Protok je definiran kao broj vozila ( $n$ ) koja prođu kroz zamišljenu točku ( $x$ ) na odsječku puta ( $dx$ ), u vremenu ( $\tau$ ). Protok se može zapisati na sljedeći način:

$$q = \frac{n}{\tau} \quad (1)$$

Gustoća, ( $u$ ), je definirana kao prosječan broj vozila na promatranom odsječku prometnice, odnosno broj vozila po jedinici duljine, a zapisuje se kao:

$$u = \frac{\sum dt}{\tau \cdot dx}, \quad (2)$$

gdje je  $\sum dt$  suma vremena potrebna svakom vozilu da prijeđe odsječak puta. Također, potrebno je definirati pojam srednje prostorne brzine:

$$v = \frac{q}{u} = \frac{dx}{\frac{1}{n} \sum dt'} \quad (3)$$

koja predstavlja prosječnu vrijednost trenutnih brzina svih vozila uzimajući u obzir vrijeme koje to vozilo provede na promatranom odsječku puta. Prema autorima [5], odnos između protoka ( $q$ ) i gustoće ( $u$ ) može se prikazati krivuljom na Slici 1. Kada gustoća iznosi nula i protok mora biti nula. To znači da na promatranj prometnici nema vozila. Međutim, protok može biti nula i pri vrijednosti  $u = u_j$  ( $j$  predstavlja zagušenje prometnog toka). Protok je jednak nuli jer je koncentracija prometa toliko velika da vozila stoje na prometnici. Između navedenih ekstrema nalazi se vrijednost protoka  $q_m$ , koji se naziva kapacitet prometnice. Kapacitet prometnice je maksimalna vrijednost protoka na promatranj prometnici. Vrijednost gustoće koja odgovara kapacitetu prometnice se označava kao  $u_m$ . Preko grafa protok – gustoća može se odrediti brzina vala i prosječna brzina vozila.

S obzirom na to da makroskopski model (u ovom slučaju LWR model) ne razlikuje pojedinačna vozila u toku, prometni tok se promatra kao val. Val ima svoju brzinu,  $c$ , a može se kretati u smjeru ili u suprotnom smjeru od kretanja vozila u prometnom toku. Kada vozila naiđu na prepreku, tok vozila se zaustavlja i ponovno pokreće nakon određenog vremena. U tom slučaju dolazi do emitiranja sustava valova koji u sebi sadrže određenu vrijednost protoka i gustoće, kao i brzinu vala. Val koji se kreće prema naprijed, odnosno prema semaforu (ako se promatra crvena faza) ima vrijednost brzine  $c = 0$ . Ako je  $c = dq/du$ , odnosno  $0 = dq/du$ , vrijedi  $u = u_m$  i protok je jednak maksimalnoj vrijednosti protoka  $q_m$ .

Zavisnost između srednje prostorne brzine prometnog toka i gustoće toka dana je izrazom:

$$v = v_m \left(1 - \frac{u}{u_m}\right), \quad (4)$$

gdje je  $v_m$  brzina slobodnog toka, a  $q_m$  maksimalna vrijednost protoka [3,6].

Kontinuirane promjene osnovnih parametara prometnog toka (valovi) ne moraju izazvati veće poremećaje u odvijanju prometa. Međutim, ako se uzmu u razmatranje stvarni uvjeti odvijanja prometa, promjena osnovnih parametara prometnog toka uvijek će predstavljati određene poremećaje u odvijanju prometa. Duž prometnog toka mogu se javiti skokovite promjene u osnovnim parametrima prometnog toka, koje izazivaju nepovoljne poremećaje. Slični poremećaji kod fluida će izazvati turbulentna kretanja, a kod prometa zastoje. Ako je povećanje priljeva vozila kontinuirano, tada će biti praćeno pojavom vala, a ako je skokovito, bit će praćeno pojavom udarnog vala [1]. Udarni valovi se pojavljuju na poziciji gdje se dva vala počinju zajedno kretati [5].

Autori [5] razmatraju ponašanje prometnog toka u semaforiziranom raskrižju, tj. opisuju kretanje valova ovisno o crvenoj i zelenoj fazi semafora. Kod iznenadnog zaustavljanja vozila (crvena faza semafora) stvara se udarni val koji se kreće unazad te djeluje na nadolazeći prometni tok. Protok se reducira te poprima vrijednost jednaku nuli, a gustoća poprima vrijednost  $u_j$  (gustoća kod zagušenja prometnice). Kod zelene faze semafora, zbog pojednostavljenja, teorija [5] zanemaruje mogućnost skretanja vozila lijevo ili desno u raskrižju te uzima pretpostavku da se vozila nastavljaju kretati ravno. Vozilo koje se nalazi na čelu kolone počinje nesmetano ubrzavati. Međutim, teorija zanemaruje vrijeme potrebno za prilagodbu brzine prednjeg vozila. Pretpostavlja se da se prednja strana prometnog toka u trenutku ponovnog pokretanja poprima vrijednost slobodne srednje brzine  $v_f$ . Također, brzina vala poprima vrijednost  $v_f$ . U uvjetima gdje je brzina vala najveća na čelu toka ne postoji tendencija da se valovi kreću zajedno i formiraju udarni val. Udarni val se formira kada se na semaforu pojavi crveno svjetlo, a kontinuirani valovi se pojavljuju kada nastupi zelena faza semafora.

Recentna istraživanja [3] koriste LWR model i parcijalne diferencijalne jednačbe kako bi se prikazalo ponašanje prometnog toka. Primijenjena je metoda regresije pomoću koje je dobiven kvadratni odnos između protoka i gustoće. Dobiveni podaci odgovarali su teorijskim vrijednostima LWR modela [5,9].

### 3. Metodologija

Prometni tok se u ovom radu opisuje pomoću parcijalnih diferencijalnih jednačbi (hiperbolička nelinearna). Valovi se šire konačnom brzinom, kao i kod linearnog slučaja. Međutim, za razliku od linearnog modela, ovdje valovi mogu spontano stvarati formacije udarnih valova. Vrijeme nije reverzibilno kao kod linearnih jednačbi, a prošla i

buduća stanja su različita. Kako vrijeme protječe, dolazi do znatnog gubitka informacija, što se može protumačiti povećanjem entropije [10].

### 3.1 Hiperboličke diferencijalne jednačbe

Kod hiperboličkih sustava parcijalnih diferencijalnih jednačbi se primjenjuju zakoni očuvanja koji prate promjenu očuvane varijable  $u$  [11].

Jednodimenzionalni zakon očuvanja zapisuje se u općem diferencijalnom obliku:

$$\frac{\delta u}{\delta t} + \frac{\delta f(u)}{\delta x} = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (5)$$

gdje je  $u = u(x, t): \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$  vektorska funkcija – vektor stanja sustava, a diferencijabilna funkcija  $f(u): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  je fluks. Zakon očuvanja u nekonzervativnom obliku glasi:

$$\frac{\delta u}{\delta t} + A(u) \frac{\delta u}{\delta x} = 0, x \in \mathbb{R}, t > 0, \quad (6)$$

gdje je  $A(u)$  Jacobijeva matrica fluksa. Sustav (5) je hiperbolički ako Jacobijeva matrica  $A(u)$  ima  $n$  realnih svojstvenih vrijednosti  $\lambda^{(p)}, p = 1, \dots, n$  i  $n$  pripadnih linearno nezavisnih lijevih i desnih svojstvenih vektora  $l^{(p)}(u), r^{(p)}(u), p = 1, \dots, n$ . Ukoliko su svojstvene vrijednosti različite, sustav je strogo hiperbolički [11]. s obzirom na primjenu u ovome radu, ograničit ćemo se samo na skalarni slučaj u kojem je  $n = 1$ , što u konačnici pojednostavljuje jednačbe. U nastavku promatramo samo skalarni slučaj.

Integralna forma zakona očuvanja glasi:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u \, dx = f(u(x_2, t)) - f(u(x_1, t)), x_1, x_2 \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (7)$$

Čest pristup kod numeričke metode za hiperboličke zakone ravnoteže predstavlja metoda linija [11]. Kod metode linija razdvaja se prostorna i vremenska diskretizacija kako bi se mogle razmatrati odvojeno. Kod zakona ravnoteže, na desnoj se strani nalaze prostorne derivacije:

$$\frac{\delta u}{\delta t} = -\frac{\delta f(u, x)}{\delta x} + s(u, x). \quad (8)$$

Nakon toga slijedi diskretizacija domene, vektora stanja i desne strane jednačbe (9). Domena se podijeli na  $N + 1$  numeričkih ćelija te se odaberu odgovarajuće numeričke aproksimacije fluksa i izvornih članova. Prostornom diskretizacijom dobije se sustav običnih diferencijalnih jednačbi.

### 3.2 Metoda konačnih volumena

Prostorna diskretizacija desne strane jednadžbe (8) je moguća pomoću metode konačnih volumena [11]. Prostorna domena se podijeli na numeričke ćelije  $I_j = [x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ , a svakoj ćeliji se pridruži funkcija  $u_j(x, t)$  koja predstavlja aproksimaciju vektora stanja. Srednja vrijednost vektora stanja u ćeliji  $I_j$  u trenutku  $t$  se može zapisati na sljedeći način:

$$\bar{u}_j(t) = \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} u(x, t) dx. \quad (9)$$

Da bi se dobio oblik jednadžbe (diskretizacija domene i numerička aproksimacija fluksa) te izvornih članova iz jednadžbe (8),  $\frac{du_j(t)}{dt} = L_j(u_0(t), \dots, u_N(t))$ ,  $j = 0, \dots, N$ , potrebno je jednadžbu (9) podijeliti s  $\Delta x_j$  i integrirati po numeričkoj ćeliji  $I_j$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{u}_j(t)}{dt} = & -\frac{1}{\Delta x_j} \left( f \left( u \left( x_{j+\frac{1}{2}}, t \right), x_{j+\frac{1}{2}} \right) - f \left( u \left( x_{j-\frac{1}{2}}, t \right), x_{j-\frac{1}{2}} \right) \right) + \\ & \frac{1}{\Delta x_j} \int_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} s(u(x, t), x) dx. \end{aligned} \quad (10)$$

Metoda konačnih volumena u konzervativnoj formi glasi:

$$\frac{d\bar{u}_j(t)}{dt} = -\frac{1}{\Delta x_j} \left( f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}} \right) + \frac{1}{\Delta x_j} s_j = L_j(\bar{u}). \quad (11)$$

Numerički fluks na rubu numeričke ćelije se odredi na temelju rješenja lokalnog Riemannovog problema na rubu numeričke ćelije. Kod dovoljno malog  $\Delta t$  na rubu numeričke ćelije mogu se promatrati izolirani lokalni Riemannovi problemi, koje je moguće riješiti egzaktnim ili približnim rješavačem. Kako je egzaktno rješenje često vrlo složeno, uvodi se numerička aproksimacija fluksa. Numerički fluks aproksimira stanje fluksa na rubu numeričke ćelije za tekući vremenski sloj [11]. Numerička aproksimacija fluksa se može zapisati u obliku (gdje je  $F$  monotoni numerički fluks konzistentan s fizikalnim fluksom):

$$f_{j+1/2} = F \left( u_{j+\frac{1}{2}}^-, u_{j+\frac{1}{2}}^+ \right), \quad (12)$$

### 3.3 Model prometnog toka

Razmatra se najjednostavniji makroskopski model – Lighthill-Whitham-Richardsov (LWR) model. Promatra se jedna prometna traka, a međusobno pretjecanje vozila nije moguće. Umjesto promatranja ponašanja svakog pojedinačnog vozila uvodi se pojam gustoće prometnog

toka,  $u(x, t)$ , koji se iskazuje kao broj vozila po metru,  $x \in \mathbb{R}$  u vremenu  $t \geq 0$ . Broj vozila u intervalu  $(x_1, x_2)$  u vremenu  $t$  može se zapisati kao:

$$\int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx. \quad (13)$$

Neka je  $v(x, t)$  brzina vozila u položaju  $x$  i vremenskom trenutku  $t$  koja se iskazuje u metru po sekundi (m/s). Broj vozila koja prođu kroz položaj  $x$  u vremenskom trenutku  $t$  (u jedinici duljine) može se definirati kao  $u(x, t)v(x, t)$ . Potrebno je izvesti jednadžbu koja će pokazati promjenu gustoće prometnog toka u ovisnosti o vremenu i položaju. Broj vozila u promatranom intervalu  $(x_1, x_2)$  mijenja se ovisno o broju vozila koja uđu i izađu iz promatranog odsječka puta:

$$\frac{d}{dt} \int_{x_1}^{x_2} u(x, t) dx = u(x_1, t)v(x_1, t) - u(x_2, t)v(x_2, t). \quad (14)$$

Integriranjem gore navedene funkcije, uzimajući u obzir vrijeme te uz pretpostavku da su  $u$  i  $v$  regularne funkcije dobije se:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \partial_t u(x, t) dx dt &= \int_{t_1}^{t_2} (u(x_1, t)v(x_1, t) - u(x_2, t)v(x_2, t)) dx dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \int_{x_1}^{x_2} \partial_x (u(x, t)v(x, t)) dx dt. \end{aligned} \quad (15)$$

S obzirom na to da su  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, t_1, t_2 > 0$  proizvoljni, može se zaključiti:

$$u_t + (uv)_x = 0, \quad x \in \mathbb{R}, t > 0. \quad (16)$$

Jednadžba (16) je parcijalna diferencijalna jednadžba, a početni uvjet je:

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (17)$$

S obzirom na to da se model sastoji od jedne jednadžbe s dvije zavisne varijable, mora postojati veza između brzine i gustoće ili protoka i gustoće kako bi sustav bio zatvoren. Za deterministički model se pretpostavlja linearna veza između brzine i gustoće koja postoji samo u sustavu ravnoteže prometa, a dana je ranije navedenim izrazom (4). Sustav koji se sastoji od jednadžbi (4) i (16) spada u nelinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe prvoga reda koje opisuju zakon očuvanja gustoće prometnog toka. Broj vozila u sustavu ovisi samo o protoku izvan i unutar promatrane domene. Obzirom da je LWR model zatvoren model koji se sastoji od jedne jednadžbe i jednog algebarskog izraza, klasificira se kao model prvoga reda [3].

Kod LWR modela [5,9] postoji jedinstvena relacija koja povezuje sva tri parametra prometnog toka (gustoću, brzinu i protok). U neprekidnim uvjetima prometnog toka, parametri prometnog toka povezani su izrazom (fundamentalna jednadžba prometnog toka):



$$f = vu. \quad (18)$$

Veličina  $v$  je prosječna brzina vozila, a  $v$  poprima vrijednost  $v_m$  (maksimalna brzina, brzina slobodnog toka) u slučaju kada gustoća iznosi nula. Konačna verzija fluksa  $f$ , predstavlja funkciju gustoće vozila. Brzina  $v$  može se prikazati kao funkcija koja ovisi o gustoći vozila ( $u$ ),  $u \in [0, u_m]$ .

### 3.3 Roeova metoda konačnih volumena

Numerička aproksimacija rješenja Riemannovog problema za nelinearne jednadžbe može se bazirati na lokalnoj linearizaciji fluksa na rubu numeričke ćelije [11]. Za aproksimaciju rješenja nelinearnih sustava potrebno je lokalno linearizirati jednadžbu, odnosno odabrati konstantnu matricu koja će aproksimirati Jacobijevu matricu fluksa na rubu numeričke ćelije. Za aproksimaciju se može koristiti oznaka  $A_{j+1/2}$ , za koju vrijedi

$$A_{j+1/2} \rightarrow \frac{df}{du} \text{ kada je } u_{j+\frac{1}{2}}^- = u_{j+\frac{1}{2}}^+.$$

Linearizacija Jacobijeve matrice fluksa (Roeova linearizacija) se može odrediti iz jednakosti:

$$f_{j+\frac{1}{2}}^+ - f_{j+\frac{1}{2}}^- = A_{j+\frac{1}{2}} \left( u_{j+\frac{1}{2}}^+ - u_{j+\frac{1}{2}}^- \right). \quad (19)$$

Nakon Roeove linearizacije može se odrediti približno rješenje Riemannovog problema. Egzaktno rješenje Riemannovog problema za nelinearne jednadžbe sastoji se od izoliranih šokova i kontaktnih diskontinuiteta između kojih se nalazi glatko rješenje.

Roeova aproksimacija numeričkog fluksa se temelji na linearizaciji derivacije fluksa na rubu numeričke ćelije koja omogućuje uzvodnu (eng. *upwind*) aproksimaciju prostorne derivacije fluksa:

$$F \left( u_{j+\frac{1}{2}}^-, u_{j+\frac{1}{2}}^+ \right) = \frac{1}{2} \left( f_{j+\frac{1}{2}}^- + f_{j+\frac{1}{2}}^+ \right) - \frac{1}{2} \left| A_{j+\frac{1}{2}} \right| \left( u_{j+\frac{1}{2}}^+ - u_{j+\frac{1}{2}}^- \right) \quad (20)$$

Roeova linearizacija se primjenjuje kod nelinearne hiperboličke parcijalne diferencijalne jednadžbe koja opisuje ponašanje prometnog toka u primjeru koji slijedi.

Poznato je da fluks opisan u (20) može stvoriti nefizikalno rješenje u slučaju kada je  $A_j A_{j+1} < 0$ , odnosno kada derivacija fluksa mijenja predznak. U ovom slučaju se može upotrijebiti ispravak entropije koji rješava nedostatak metode. U ovom radu korišten je Roeov ispravak entropije  $\left| A_{j+\frac{1}{2}} \right| = a$ , gdje je  $a$  mala pozitivna konstanta koja unosi

dotatnu numeričku difuziju. Za model prometnog toka koji se analizira u radu koriste se:

$$u_{j+\frac{1}{2}}^- = u_j, u_{j+\frac{1}{2}}^+ = u_{j+1}$$

$$f_{j+\frac{1}{2}}^- = f(u_j^n), f_{j+\frac{1}{2}}^+ = f(u_{j+1}^n)$$

$$A_{j+\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{u_m}\right) \cdot v_m$$

### 3.4 Konačni volumeni bazirani na egzaktom Rimannovom rješavaču

U nastavku je sažeto opisana metoda konačnih volumena prikazana u [6] koja se temelji na egzaktom rješavaču Riemannovog problema:

$$u_{j+1/2}^{n+1/2} = u_j^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left( f_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right), \quad (21)$$

gdje je:

$$f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \left(1 - \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{u_m}\right) \cdot v_m \cdot u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (22)$$

$u_{j+1/2}^{n+1/2}$  je rješenje Riemannovog problema, prikazano u Tablici 1.

**Tablica 1.** Rješenje Riemannovog problema

Slučaj	Struktura rješenja	$u_{j+1/2}^{n+1/2} =$
$u_j^n \geq u_j^n$ i $u_j^n < u_m/2$	Val razrjeđenja se kreće prema desno	$u_j^n$
$u_j^n \geq \frac{u_m}{2}$ i $u_{j+1}^n \leq u_m/2$	Val razrjeđenja se širi na lijevo i desno	$\frac{u_m}{2}$
$u_j^n \geq u_{j+1}^n$ i $u_j^n \geq u_m/2$	Val razrjeđenja se kreće prema lijevo	$u_{j+1}^n$
$u_j^n < u_{j+1}^n$ i $u_j^n + u_{j+1}^n \leq u_m$	Udarni val se kreće prema desno	$u_j^n$
$u_j^n < u_{j+1}^n$ i $u_j^n + u_{j+1}^n > u_m$	Udarni val se kreće prema lijevo	$u_{j+1}^n$

Za stabilnost numeričkog rješenja koristi se Courant-Friedrichs-Lewyjev uvjet (CFL uvjet):

$$\Delta t \leq \min_{j=1,\dots,N} \frac{\Delta x}{\left|1 - \frac{u_j^n}{u_m}\right| \cdot v_m \cdot u_j^n}. \quad (23)$$

## 4. Rezultati i diskusija

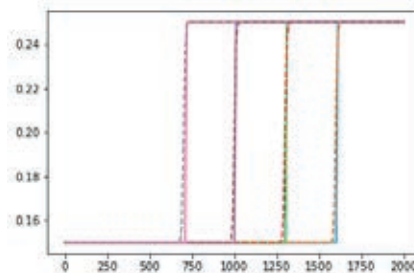
U ovome radu prikazana su dva slučaja koja se mogu javiti u prometnom toku (napredovanje udarnog vala uzrokovanog semaforom i napredovanje vala razrjeđenja).

### 4.1 Slučaj br. 1

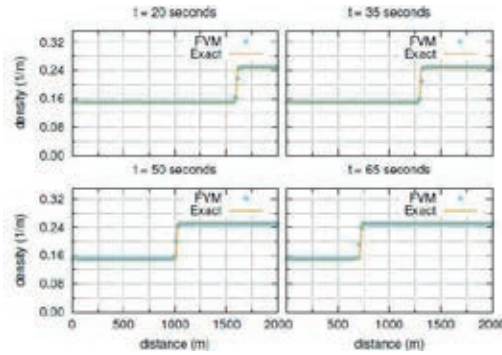
U ovome slučaju prikazana je simulacija napredovanja udarnog vala koji je uzrokovan semaforom. Radi usporedbe rezultata, u razmatranje su uzete veličine kao u radu [6]. Duljina domene iznosi 2000 m, a na udaljenosti  $x = 2000$  m je postavljen semafor (inicijalno je crveno). Vrijednost maksimalne brzine iznosi  $v_m = 33$  m/s, maksimalne gustoće  $u_{max} = 0,25$  1/m te početne gustoće prometnog toka  $v_0 = 0,15$  1/m. Gustoće prometnog toka na lijevoj i desnoj granici iznose  $u_L = 0,15$  1/m, odnosno  $u_D = 0,25$  1/m. Egzaktno rješenje je:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & \text{za } (x - x_0)/t < c_s \\ u_D, & \text{za } (x - x_0)/t > c_s, \end{cases}$$

gdje je  $c_s = [f(u_L) - f(u_R)]/(u_L - u_D)$ . Gustoća prometnog toka s navedenim parametrima prikazana je na Slici 2. Egzaktno rješenje je prikazano punom linijom, a rješenje dobiveno metodom konačnih volumena prikazano je isprekidanom linijom. Rješenja su dana u vremenskim trenucima  $t = 20$  s, 35 s, 50 s i 65 s. Vidljivo je da udarni val koji se formira pojavom crvenog svjetla na semaforu na  $x = 2000$  m napreduje od desne granice prema računskoj domeni. Radi usporedbe, na Slici 3 su prikazani rezultati dobiveni u radu [6].



**Slika 2.** Usporedba egzaktne rješenja i rješenja dobivenog pomoću metode konačnih volumena kod gustoće prometnog toka (slučaj br. 1)



**Slika 3.** Usporedba egzaktnog rješenja i rješenja dobivenog pomoću metode konačnih volumena za slučaj br. 1, prema autorima [6]

#### 4.2 Slučaj br. 2

U ovome slučaju prikazana je simulacija širenja vala razrjeđenja koji nastaje kada je gustoća lijeve granice veća u odnosu na bilo koju drugu poziciju unutar računске domene. Vrijednost maksimalne brzine iznosi  $v_m = 33$  m/s, maksimalne gustoće  $u_m = 0,25$  1/m, početne gustoće prometnog toka  $v_0 = 0,02$  1/m te protoka na lijevoj granici  $q_b = 1,2$  1/s. Iz izraza (4) i (18) lijeva granica postaje:

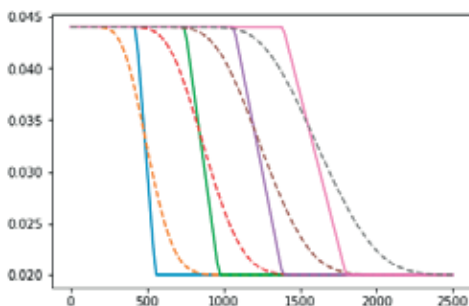
$$u(x=0, t) = \frac{u_m}{2} - \frac{1}{2} \left( u_m^2 - \frac{4u_m q_b}{v_m} \right)^{1/2}.$$

Riemannov problem je prikazan kao  $u_L = u(x=0, t)$ ,  $u_D = 0,02$ ,  $x_0 = 0$ . Egzaktno rješenje Riemannovog problema je:

$$u(x, t) = \begin{cases} u_L, & \text{za } \frac{x-x_0}{t} < \lambda(u_L), \\ \frac{1}{2} u_m \left( 1 - \frac{x-x_0}{v_m t} \right), & \text{za } \lambda(u_R) < \frac{x-x_0}{t} < \lambda(u_L), \\ u_R, & \text{za } \frac{x-x_0}{t} > \lambda(u_R), \end{cases}$$

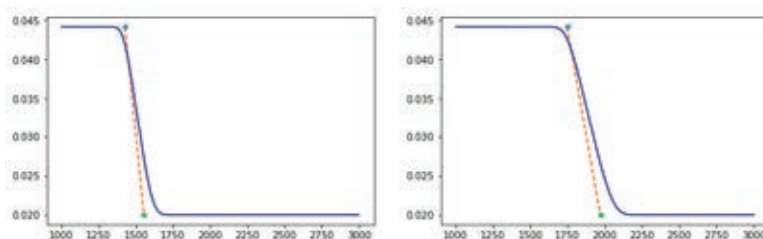
gdje je  $\lambda(u) = \left( 1 - \frac{2u}{u_m} \right) v_m$ .

Gustoća prometnog toka s gore navedenim parametrima je prikazana na Slici 4. Egzaktno rješenje je prikazano punom linijom, dok je rješenje dobiveno metodom konačnih volumena prikazano isprekidanom linijom. Rješenja su dana u vremenskim trenucima  $t = 20$  s,  $35$  s,  $50$  s i  $65$  s. Na apscisi je prikazana duljina u metrima, a na ordinati gustoća (1/m).

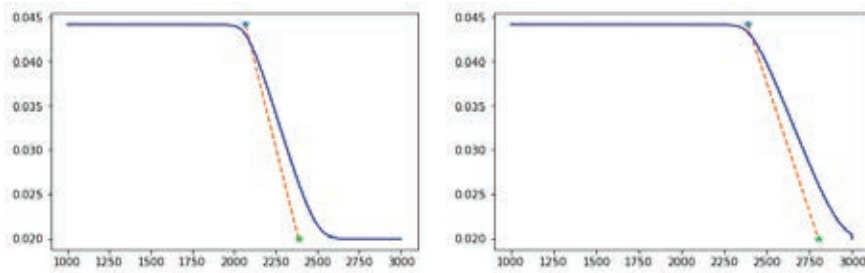


**Slika 4.** Usporedba egzaktnog rješenja i rješenja dobivenog pomoću metode konačnih volumena kod gustoće prometnog toka (slučaj br. 2, prva varijanta izračuna)

Kao što je vidljivo sa Slike 4, val razrjeđenja se pojavljuje kada je brzina vala na granici manja od brzine vala unutar računске domene. Gustoća je, u odnosu na slučaj br. 1, veća na lijevoj strani, odnosno na lijevoj granici. Na Slici 4 je prikazano rješenje dobiveno prema autorima [6]. Za dobivanje rješenja slučaja br. 2 kod prve varijante izračuna korišten je  $cfl = 0,95$  (uvjet stabilnosti za numeričku jednadžbu). Prostorna domena je kao u radu [6], od 0 do 2000, a broj prostornih koraka iznosi 126. Što je veći broj prostornih koraka, to je numerički izračun precizniji. U ovoj varijanti izračuna nije korišten ispravak entropije, što će utjecati na skok kod numeričkog rješenja. Na Slici 5 a) je prikazana druga varijanta izračuna slučaja br. 2 (za  $t = 20$  s). U ovom slučaju  $cfl$  iznosi 0,05 (u odnosu na prethodnu varijantu gdje je iznosio 0,95). Promjena je vidljiva i kod prostorne domene, koja se sada kreće od 1000 do 3000, a broj prostornih koraka iznosi 801. Također,  $\Delta t = 0,01$  s (u odnosu na prijašnji 0,5 s), što produžuje vrijeme numeričkog proračuna. U ovoj varijanti je korišten ispravak entropije, što dovodi do boljeg rješenja, odnosno manjeg skoka. Na Slikama 5 b), 6 a) i 6 b) su redom prikazana rješenja za  $t = 35$  s,  $t = 50$  s,  $t = 65$  s.



**Slika 5.** a) Slučaj br. 2, druga varijanta izračuna ( $t=20$  s), b) Slučaj br. 2, druga varijanta izračuna ( $t=35$  s)



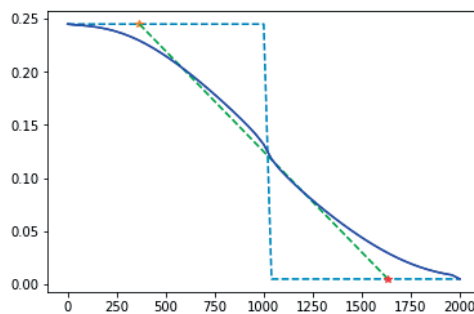
Slika 6. a) Slučaj br. 2, druga varijanta izračuna ( $t=50$  s), b) Slučaj br. 2, druga varijanta izračuna ( $t=65$  s)

Također, za potrebe rada napravljena je i treća varijanta izračuna slučaja br. 2 gdje je gustoća lijevo i gustoća desno dobivena preko formule  $u(x=0, t)$  te iznosi:

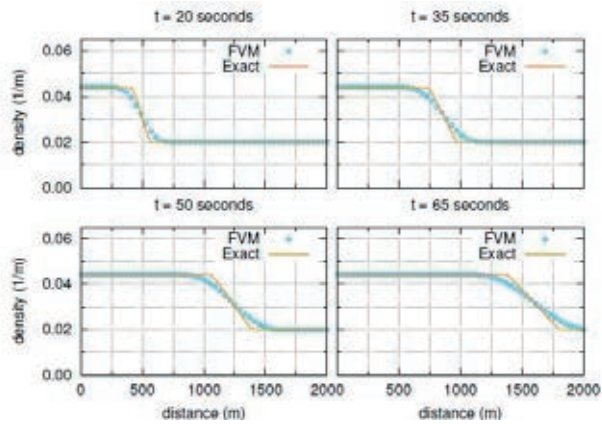
$$u_l = 0,98 \cdot u_m(\text{maksimalna gustoća}),$$

$$u_d = 0,02 \cdot u_m(\text{maksimalna gustoća}).$$

Navedeno upućuje kako je veća gustoća na desnoj strani u odnosu na lijevu stranu. Egzaktno rješenje Riemannovog problema je zadano drugačije u odnosu na rad [6].  $Cfl$  u ovoj varijanti izračuna iznosi 0,1, a prostorna domena je od 0 do 2000 s 51 ekvidistantnih numeričkih čvorova. Također, kao i u prethodnoj varijanti izračuna, korišten je ispravak entropije za popravak rješenja u području skoka. Rješenje je prikazano na Slici 7 za  $t = 20$  s. Radi usporedbe, na Slici 8 je prikazano i rješenje koje je dobiveno u radu [6].

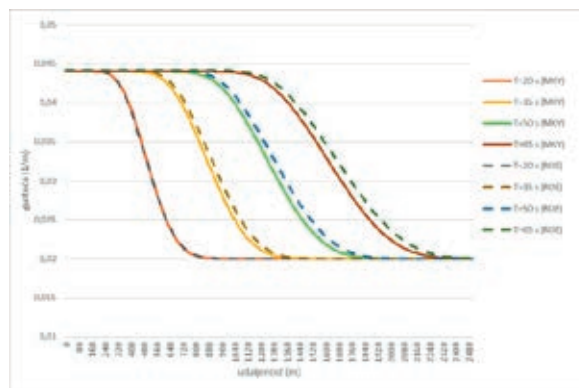


Slika 7. Slučaj br. 2, treća varijanta izračuna ( $t=20$  s)



**Slika 8.** Usporedba egzaktog rješenja i rješenja dobivenog pomoću metode konačnih volumena kod gustoće prometnog toka, po radu [6], slučaj br. 2

Na Slici 9 prikazana je usporedba rješenja dobivenih Roeovom metodom konačnih volumena i rješenja dobivenih metodom konačnih volumena (numeričko rješenje) iz rada [6]. Rješenja dobivena Roeovom metodom konačnih volumena su na grafu prikazana punom linijom, dok su rješenja dobivena metodom konačnih volumena iz rada [6] prikazana isprekidanom linijom. Iz prikazanog se može zaključiti kako je razlika u rješenjima zanemariva za trenutak  $t=20$  s. Što vrijeme dalje odmiče, to je razlika u rješenjima izraženija. Navedeno se najbolje vidi za trenutak  $t=65$  s.



**Slika 9.** Usporedba rješenja dobivenih Roeovom metodom konačnih volumena i metodom konačnih volumena iz rada [6]

## 5. Zaključak

U ovome radu prikazan je pregled područja opisivanja zakonitosti prometnog toka. Prometni tok se može promatrati na mikroskopskoj ili makroskopskoj razini. Također, postoji nekoliko vrsta modela koji opisuju ponašanje prometnog toka, kao što su Greenshieldsov model, Lighthill-Whitham-Richardsov model (LWR model), deterministički model, itd. Makroskopski model kod opisivanja zakonitosti prometnog toka koristi analogiju protjecanja fluida. Ovaj model pretpostavlja da se svako pojedinačno vozilo u prometnom toku kreće isključivo po zakonitostima ukupnoga toka. Prometni tok se opisuje pomoću sustava parcijalnih diferencijalnih jednačbi koje uključuju varijable protoka, gustoće i brzine, uzimajući u obzir vrijeme i prostor.

U ovome je radu pomoću računalnog programa Python prikazana simulacija prometnog toka, odnosno prikazana je simulacija udarnog vala i vala razrjeđenja koji se pojavljuju u prometnom toku. Korištena je metoda konačnih volumena koja je uspoređena s egzaktnim rješenjem.

Prikazana su rješenja dobivena Roeovom metodom konačnih volumena i verzija konačnih volumena opisana u radu [6]. Usporedbom rezultata može se vidjeti da Roeova metoda rezultira aproksimacijama koje su jednake ili bolje kvalitete za istu gustoću numeričke mreže. Usporedbom rješenja dobivenih Roeovom metodom konačnih volumena i metodom konačnih volumena iz rada [6] može se zaključiti kako su razlike najizraženije kod  $t=65$  s. Protjecanjem vremena je razlika u rezultatima veća. Implementacija Roeove metode je vrlo jednostavna, ne zahtjeva analizu Riemannovog problema za konkretni model i može se generalizirati na probleme u više dimenzija, zbog čega se i vrlo često koristi u primjenama.

Prikazana je simulacija u kojoj je na određenoj udaljenosti postavljen semafor koji uzrokuje pojavu udarnog vala. Dana su dva slučaja; u prvom se prikazuje simulacija udarnog vala u slučaju kada je gustoća prometnog toka veća na desnoj strani u odnosu na promatranu domenu, a u drugom slučaju se razmatra simulacija prometnog toka, odnosno vala razrjeđenja u slučaju kada je gustoća prometnog toka veća na lijevoj strani u odnosu na promatranu računsku domenu. Za opisivanje gustoće i prosječne brzine prometnog toka usvojen je Lighthill-Whitham-Richardsov model (LWR model). Kroz prikazane slučajeve, metoda konačnih volumena je pokazala dobra slaganja s egzaktnim rješenjem, a razlika je vidljiva kod skoka gdje se uočava manje odstupanje u nagibu krivulje grafa gustoća-udaljenost-vrijeme.



**Zahvala.** Ovaj rad je nastao uz potporu projekta uniri-prirod-18-9 Sveučilišta u Rijeci i projekta IP-2019-04-1239 Hrvatske zaklade za znanost i UNIRI projekt 2018 (uniri-prirod-18-9).

## Literatura

- [1] Ševrović M., Kos G., Dadić I., 2014., *Teorija prometnog toka*, Fakultet Prometnih znanosti Sveučilišta u Zagrebu, 3. dopunjeno izdanje, Zagreb
- [2] Batinić M., 2017., Definiranje parametara za analizu prometnih tokova u funkciji sigurnosti cestovnog prometa, diplomski rad, Fakultet Prometnih znanosti Sveučilišta u Zagrebu
- [3] Addison E.A., 2016., *Modelling Vehicle Traffic Flow with Partial Differential Equations*, diplomski rad, Presbyterian University Collage, Ghana, DOI: 10.13140/RG.2.2.23618.99521
- [4] Seibold B., 2015., *A Mathematical Introduction to Traffic Flow Theory*, Tutorials Traffic Flow, prezentacija, Institute for Pure and Applied Mathematics, UCLA
- [5] Lighthill, M.J., Whitham G.B., 1955., On Kinetic Waves, II. A Theory of Traffic Flow on Long Crowded Roads, Department of Mathematics, University of Manchester, *Royal Society*, Vol. 229, Issue 1178, <https://doi.org/10.1098/rspa.1955.0089>
- [6] Setiawan E.B., Tarwidi D., Umbara F.R., 2016., Numerical Simulation of Traffic Flow via Fluid Dynamics Approach, *International Journal of Computing and Optimization*, Vol. 3, no. 1, 93 – 104, URL: <http://dx.doi.org/10.12988/ijco.2016.6613>
- [7] Greenberg, H., 1959., An Analysis of Traffic Flows, *Operations Research*, Vol. 7, ORSA, Washington, DC
- [8] Underwood, Speed R., 1961., *Volume and Density Relationships, Quality and Theory of Traffic Flow*, Yale Bureau of Highway Traffic, New Haven, CT
- [9] Richards P.I., 1956., Shock Waves on the Highway, *Operations Research*, Vol. 4, No. 1, 42.-51. URL: <http://dx.doi.org/10.1287/opre.4.1.42>
- [10] Lax, P. D.: *Hyperbolic Partial Differential Equations*, *American Mathematical Society*, SAD, 2006.
- [11] Crnković, B.: *Poopćenje težinskih esencijalno neoscilirajućih aproksimacija s primjenama*, doktorska disertacija, Prirodoslovno-matematički fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Matematički odsjek, Zagreb, 2021.
- [12] Korade I., 2009., *Izračun otpora krovne kutije montirane na osobni automobil*, diplomski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje Sveučilišta u Zagrebu