Osječki matematički list 23 (2023), 45–61

Što je poluderivacija funkcije?

Marija Pavković Kordić*, Maja Andrić†

Sažetak

Razlomljeni infinitezimalni račun podrazumijeva korištenje integrala i derivacija realnog ili kompleksnog reda. Rad prikazuje osnovne pojmove i svojstva Riemann–Liouvilleovog razlomljenog integrala i njegove razlomljene derivacije, primijenjene na neke funkcije. Posebno se naglašava slučaj razlomljene derivacije reda $1/2$, tj. poluderivacije.

Ključne riječi: *razlomljeni infinitezimalni račun, poluderivacija*

What is semi-derivation of function?

Abstract

Fractional calculus implies the use of integrals and derivatives of real or complex order. The paper presents the basic terms and properties of the Riemann–Liouville fractional integral and its fractional derivative, applied to some functions. The case of the fractional derivative of order $1/2$, i.e. half-derivative, is especially emphasized.

Keywords: *fractional calculus, half-derivative*

*Fakultet prirodoslovno matematičkih znanosti, Sveučilište u Mostaru, Bosna i Hercegovina, email: marijapc@gmail.com

†Fakultet građevinarstva, arhitekture i geodezije, Sveučilište u Splitu, Hrvatska, email: maja.andric@gradst.hr

1 Uvod

Derivacije i integrali uglavnom su promatrani kao diskretne operacije, u smislu da funkciju deriviramo ili integriramo n puta, gdje je n cijeli broj. Razlomljeni infinitezimalni račun podrazumijeva korištenje integrala i derivacija realnog ili kompleksnog reda. Početak njegovog razvoja smatra se 1695. godina kada L'Hôpital šalje pismo Leibnizu pitajući ga koje bi bilo značenje tada popularne Leibnizove notacije $\frac{d^n y}{dx^n}$ za derivaciju reda $n \in \mathbb{N}_0$, ako bi n bio $1/2$.

Gulliame de l'Hôpital, 1661.–1704.


Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646.–1716.

U svom odgovoru, datiranom 30. rujna 1695. godine, Leibniz je napisao:

> *Ovo je prividni paradoks iz kojeg će se jednog dana izvući korisne posljedice.*

Sljedeća tri stoljeća mnogi se poznati matematičari u svojim djelima osvrću na razlomljeni diferencijalni i integralni račun, razvijajući ovo područje kao čisto teorijsko područje matematike:

- Euler - 1730.
- Lagrange - 1772.
- Lacroix - 1802.
- Laplace - 1812.
- Fourier - 1822.
- Liouville - 1832.

- Riemann - 1847.
- Greer - 1859.
- Holmgren - 1865.
- Grünwald - 1867.
- Letnikov - 1868.
- Sonin - 1869.
- Laurent - 1884.
- Nekrassov - 1888.
- Krug - 1890.
- Weyl - 1917.

Na primjer, Sylvestre François Lacroix (1765–1843) u svom djelu *Traité du Calcul Différentiel et du Calcul Intégral* iz 1802. godine, razlomljenom infinitezimalnom računu posvećuje dvije stranice (409–410), navodeći da vjerojatno vrijedi

$$\frac{d^{\frac{1}{2}}x}{dx^{\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

Za gornju razlomljenu derivaciju koristimo termin *poluderivacija* funkcije.

Posljednjih desetljeća ukazuje se na važnost razlomljenog infinitezimalnog računa kao jednog od načina koji omogućava uklanjanje nedostataka klasičnog infinitezimalnog računa pri opisivanju fenomena koje opažamo. Koristi za razvoj matematičkih modela koji se odnose na realne probleme stvarnog svijeta, omogućavajući usvajanje teorijskog modela na temelju eksperimentalnih podataka. Među brojnim primjenama teorije razlomljenog infinitezimalnog računa u gotovo svim primijenjenim znanostima, posebno se ističu primjene u numeričkoj analizi te raznim područjima fizike, kemije, bioloških procesa i tehnike. Veoma je pogodan pri opisivanju svojstava različitih tvari i procesa, pojavljuje se u teoriji upravljanja dinamičkim sustavima, opisujući sustav razlomljenom diferencijalnom jednadžbom. Tu su nam od velike važnosti nejednakosti koje uključuju razlomljene derivacije, a imaju primjenu u razlomljenim diferencijalnim jednadžbama, posebno u utvrđivanju jedinstvenosti i egzistencije rješenja početnih i rubnih problema za obične i parcijalne diferencijalne jednadžbe, te davanje ocjena na rješenja. Teorija razlomljenog infinitezimalnog računa donosi nove mogućnosti, i bilo bi zgodno prikazati neke od navedenih primjera, no njihovo rješavanje nadilazi težinu ovog rada. Detaljnije o ovome može se naći u [1, 3].

Ovaj rad je podijeljen u četiri dijela. Nakon uvodnog dijela, u drugom navodimo potrebne prostore funkcija te definicije i svojstva Eulerove gama i beta funkcije. U trećem su opisani osnovni pojmovi i svojstva Riemann–Liouvilleovog razlomljenog integrala i razlomljene derivacije. Zadnji dio je posvećen razlomljenom infinitezimalnom računu nekih funkcija, s naglaskom na njihove poluintegrale i poluderivacije.

2 Osnovni pojmovi

Pobliže ćemo opisati prostore funkcija koje ćemo koristiti u ovom radu, a zatim prikazati svojstva dviju važnih funkcija (za više detalja pogledati [2, 4]).

2.1 Prostor integrabilnih, neprekidnih i apsolutno neprekidnih funkcija

Neka je $[a,b]$ interval u $\mathbb{R}$, gdje je $-\infty \leq a < b \leq \infty$. S $L_p[a,b]$, $1 \leq p < \infty$, označavamo Lebesgueov prostor izmjerljivih funkcija f za koje vrijedi $\int_a^b |f(t)|^p \, dt < \infty$, uz normu

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p},$$

a s $L_\infty[a,b]$ prostor izmjerljivih i gotovo svuda omeđenih funkcija na $[a,b]$ uz normu

$$\|f\|_\infty = \text{ess sup}\{|f(x)| : x \in [a,b]\}.$$

Prostor funkcija na $[a,b]$ koje imaju neprekidne derivacije do uključivo reda n označavamo s $C^n[a,b]$, $n \in \mathbb{N}_0$, tj.

$$C^n[a,b] = \left\{ f : [a,b] \to \mathbb{R} : f^{(k)} \in C[a,b],\ k = 0,1,...,n \right\}.$$

Posebno, $C^0[a,b] = C[a,b]$, tj. prostor neprekidnih funkcija na $[a,b]$.

Prostor apsolutno neprekidnih funkcija na konačnom intervalu $[a,b]$, tj. $-\infty < a < b < \infty$ označavamo s $AC[a,b]$. Poznato je da se $AC[a,b]$ podudara s prostorom primitivnih funkcija prostora $L_1[a,b]$, tj. vrijedi

$$f \in AC[a,b] \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi(t)dt, \ \ \varphi \in L_1[a,b],$$

te stoga za apsolutno neprekidnu funkciju f vrijedi $f'(x) = \varphi(x)$ gotovo svuda na $[a,b]$. S $AC^n[a,b]$, $n \in \mathbb{N}$, označavamo prostor

$$AC^n[a,b] = \left\{ f \in C^{n-1}[a,b] \ : \ f^{(n-1)} \in AC[a,b] \right\}.$$

Očito je $AC^1[a,b] = AC[a,b]$.

2.2 Eulerova gama i beta funkcija

U 18. stoljeću Leonhard Euler (1707.–1783.) je pokušao riješiti problem faktorijela za pozitivne realne brojeve, potaknuvši istraživanja koja su dovela do otkrića gama i beta funkcije.

Gama funkcija Γ je funkcija kompleksne varijable definirana Eulerovim integralom druge vrste

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt, \ \ \Re(z) > 0.$$

Ovaj integral je konvergentan za svaki $z \in \mathbb{C}$ uz $\Re(z) > 0$. Vrijedi

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \ \ \Re(z) > 0. \tag{1}$$

Odavde slijedi

$$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Posebno vrijedi

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Proširenje gama funkcija na područje $\Re(z) \leq 0$ dano je s

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+n)}{(z)_n}, \quad \Re(z) > -n; \, n \in \mathbb{N}; \, z \notin \mathbb{Z}_0^- := \{0, -1, -2, \ldots\}, \tag{2}$$

gdje je $(z)_n$ *Pochhammerov simbol* definiran za $z \in \mathbb{C}$ i $n \in \mathbb{N}_0$ s

$$(z)_0 = 1; \quad (z)_n = z(z+1)\cdots(z+n-1), \ n \in \mathbb{N}.$$

Gama funkcija je analitička u cijeloj kompleksnoj ravnini osim u točkama $0, -1, -2, \ldots$ koji su polovi prvog reda.

Beta funkcija je funkcija dviju kompleksnih varijabli definirana Eulerovim integralom prve vrste

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1} dt, \ \ \Re(z), \Re(w) > 0.$$

Veza između gama i beta funkcije dana je relacijom

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)} \ \ z,w \notin \mathbb{Z}_0^-.$$

Primjer 2.1. *Neka su $\alpha, \beta > 0$ i $x \in [a,b]$. Tada, uz supstituciju $t = x - s(x - a)$ vrijedi*

$$\begin{aligned} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta-1}dt &= \int_0^1 (x-a)^{\alpha+\beta-1}s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1}ds \\ &= B(\alpha,\beta)(x-a)^{\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

Uz supstituciju $t = x + s(b-x)$ vrijedi:

$$\int_x^b (t-x)^{\alpha-1}(b-t)^{\beta-1}dt = B(\alpha,\beta)(b-x)^{\alpha+\beta-1}.$$

3 Razlomljeni infinitezimalni račun

Postoje nekoliko dobro poznatih oblika razlomljenih operatora (razlomljenih integrala i razlomljenih derivacija) koji su opsežno proučavani u svrhu primjene: Riemann–Liouville, Weyl, Erdély–Kober, Hadamard, Katugampola samo su neki od njih. Ovdje ćemo definirati i prikazati neka svojstva Riemann-Liouvilleovih operatora. Razlomljene integrale i derivacije promatrat ćemo u realnoj domeni.
Neka je $[a,b] \subset \mathbb{R}$ konačan interval, tj. $-\infty < a < b < \infty$. Za cijeli dio realnog broja α koristimo oznaku $[\alpha]$.

3.1 Riemann–Liouvilleov razlomljeni integral

Neka je $x \in [a,b]$. Razlikujemo lijevi razlomljeni integral $\int_a^x$, tj. integral s čvrstom donjom granicom a i promjenjivom gornjom granicom x, te desni razlomljeni integral $\int_x^b$ kod kojeg je promjenjiva donja granica.

Definicija 3.1. [1] *Neka je $\alpha > 0$ i $f \in L_1[a,b]$. Za $I^\alpha_{a+}f$ kažemo da je Riemann–Liouvilleov lijevi razlomljeni integral definiran s*

$$I^\alpha_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}f(t)dt, \ \ x \in (a,b],$$

a $I^\alpha_{b-}f$ Riemann–Liouvilleov desni razlomljeni integral

$$I^\alpha_{b-}f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_x^b (t-x)^{\alpha-1}f(t)dt, \ \ x \in [a,b).$$

Navedeni razlomljeni integrali, definirani za funkciju $f \in L_1[a,b]$, postoje gotovo svuda na $[a,b]$ i vrijedi $I^\alpha_{a+}f, I^\alpha_{b-}f \in L_1[a,b]$.

Za $\alpha = n \in \mathbb{N}$, razlomljeni integrali se podudaraju s n-terostrukim integralom, tj.

$$\begin{aligned} I^n_{a+}f(x) &= \int_a^x dt_1 \int_a^{t_1} dt_2 \cdots \int_a^{t_{n-1}} f(t_n)dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)dt \end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned} I^n_{b-}f(x) &= \int_x^b dt_1 \int_{t_1}^{b} dt_2 \cdots \int_{t_{n-1}}^{b} f(t_n)dt_n \\ &= \frac{1}{(n-1)!}\int_x^b (t-x)^{n-1} f(t)dt. \end{aligned}$$

Primjer 3.1. *Promotrimo funkcije opće potencije. Neka su $\alpha, \beta > 0$, $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$ i $g(x) = (b-x)^{\beta-1}$. Koristeći Primjer 2.1, za Riemann–Liouvilleov lijevi razlomljeni integral funkcije f vrijedi*

$$\begin{aligned} I^\alpha_{a+}(x-a)^{\beta-1} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^x (x-t)^{\alpha-1}(t-a)^{\beta-1}dt \\ &= \frac{(x-a)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,\beta). \end{aligned}$$

Kako je navedeno u 2. poglavlju, veza između gama i beta funkcije dana je relacijom $B(\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ iz čega slijedi

$$I^\alpha_{a+}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(x-a)^{\alpha+\beta-1}. \tag{3}$$

Konkretno, za $\beta = 1$ i za $\beta = 2$ se dobiju razlomljeni integrali konstantne i afine funkcije, tj.

$$I^\alpha_{a+}1 = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)}(x-a)^\alpha = \frac{(x-a)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

i

$$I^\alpha_{a+}(x-a) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(\alpha+2)}(x-a)^{\alpha+1} = \frac{(x-a)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}.$$

Analogno slijedi desni razlomljeni Riemann–Liouvilleov integral funkcije g

$$I^{\alpha}_{a+}(b-x)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}(b-x)^{\alpha+\beta-1}.$$

Navedimo neka bitna svojstva Riemann–Liovilleovih razlomljenih integrala:

- razlomljeni integral (apsolutno) neprekidne funkcije je (apsolutno) neprekidna funkcija

- integralne jednadžbe $I^{\alpha}_{a+}f = 0$ i $I^{\alpha}_{b-}f = 0$ imaju samo trivijalno rješenje $f = 0$ (gotovo svuda)

- razlomljeni integrali su omeđeni u $L_p[a,b]$, tj. vrijedi

$$||I^{\alpha}_{a+}f||_p \leq K||f||_p\,, \quad ||I^{\alpha}_{b-}f||_p \leq K||f||_p\,,$$

  gdje je $K = \frac{(b-a)^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}$.

Dokazi navedenih tvrdnji mogu se naći u [1]. Kao primjer, prikazat ćemo dokaz sljedeće tvrdnje o kompoziciji razlomljenih integrala:

Lema 3.1. *Neka je $\alpha, \beta > 0$ i $f \in L_p[a,b]$, $1 \leq p \leq \infty$. Tada za gotovo svaki $x \in [a,b]$ vrijedi*

$$I^{\alpha}_{a+}I^{\beta}_{a+}f(x) = I^{\alpha+\beta}_{a+}f(x)\,, \qquad I^{\alpha}_{b-}I^{\beta}_{b-}f(x) = I^{\alpha+\beta}_{b-}f(x)\,. \tag{4}$$

Ako je $f \in C[a,b]$ ili $\alpha+\beta > 1$, onda jednakosti (4) *vrijede za svaki x iz $[a,b]$* ([1]).

Dokaz. Koristeći zamjenu granica dvostrukog integrala, supstituciju varijabli i Primjer 2.1, slijedi

$$\begin{aligned}
I^{\alpha}_{a+} I^{\beta}_{a+} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} I^{\beta}_{a+} f(t)\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \int_a^t (t-s)^{\beta-1} f(s)\, ds\, dt \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_{s=a}^x f(s) \int_{t=s}^x (x-t)^{\alpha-1} (t-s)^{\beta-1}\, dt\, ds \\
&= \left| \begin{array}{l} x-t = u \in [x-s, 0] \\ -dt = du \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_a^x f(s) \int_0^{x-s} u^{\alpha-1} (x-u-s)^{\beta-1}\, du\, ds \\
&= \left| \begin{array}{l} \frac{u}{x-s} = v \in [0,1] \\ du = (x-s)\, dv \end{array} \right| \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) \int_0^1 v^{\alpha-1} (1-v)^{\beta-1}\, dv\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} B(\alpha,\beta) \int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s)\, ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^x (x-s)^{\alpha+\beta-1} f(s)\, ds \\
&= I^{\alpha+\beta}_{a+} f(x)\,.
\end{aligned}$$

Analogno se za desne razlomljene integrale dobije

$$I^{\alpha}_{b-} I^{\beta}_{b-} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_x^b (s-x)^{\alpha+\beta-1} f(s)\, ds = I^{\alpha+\beta}_{b-} f(x)\,.$$

Time smo dokazali prvi dio tvrdnje. Promotrimo neprekidne funkcije. Ako je $f \in C[a,b]$, onda je $I^{\beta}_{a+} f \in C[a,b]$, $I^{\alpha}_{a+} I^{\beta}_{a+} f \in C[a,b]$ te $I^{\alpha+\beta}_{a+} f \in C[a,b]$. Dakle, dvije funkcije $I^{\alpha}_{a+} I^{\beta}_{a+} f$ i $I^{\alpha+\beta}_{a+} f$ podudaraju se gotovo svuda na $[a,b]$, pa zbog neprekidnosti slijedi da se podudaraju na cijelom intervalu $[a,b]$.
Ako je $f \in L_p[a,b]$ i $\alpha + \beta > 1$, onda je

$$I^{\alpha}_{a+} I^{\beta}_{a+} f = I^{\alpha+\beta}_{a+} f = I^{\alpha+\beta-1}_{a+} I^{1}_{a+} f$$

gotovo svuda na $[a,b]$. S obzirom na to da je $I^{1}_{a+} f$ neprekidna funkcija, slijedi $I^{\alpha+\beta}_{a+} = I^{\alpha+\beta-1}_{a+} I^{1}_{a+} f \in C[a,b]$, tj. opet se zbog neprekidnosti podudaraju na cijelom intervalu $[a,b]$.

Analogno vrijedi i za Riemann–Liouvilleov desni razlomljeni integral, pa zaključujemo da u slučaju neprekidnih funkcija jednakosti (4) vrijede za svaki x iz $[a, b]$. $\square$

3.2 Riemann–Liouvilleova razlomljena derivacija

Definicija 3.2. [1] *Neka je $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ i $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Za $D^{\alpha}_{a+}f$ kažemo da je Riemann–Liouvilleova lijeva razlomljena derivacija definirana s*

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a+}f(x) &= \frac{d^n}{dx^n} I^{n-\alpha}_{a+} f(x) \\ &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_a^x (x-t)^{n-\alpha-1} f(t)dt, \end{aligned}$$

a $D^{\alpha}_{b-}f$ je Riemann–Liouvilleova desna razlomljena derivacija definirana s

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{b-}f(x) &= (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} I^{n-\alpha}_{b-} f(x) \\ &= \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dx^n} \int_x^b (t-x)^{n-\alpha-1} f(t)dt. \end{aligned}$$

Posebno, za $\alpha = n \in \mathbb{N}_0$ vrijedi

$$D^0_{a+}f(x) = D^0_{b-}f(x) = f(x),$$

$$D^n_{a+}f(x) = f^{(n)}(x),$$

$$D^n_{b-}f(x) = (-1)^n f^{(n)}(x).$$

Ako je $0 < \alpha < 1$, onda je

$$D^{\alpha}_{a+}f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_a^x \frac{f(t)}{(x-t)^{\alpha}} dt,$$

$$D^{\alpha}_{b-}f(x) = -\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_x^b \frac{f(t)}{(t-x)^{\alpha}} dt.$$

Primjer 3.2. *Izračunajmo razlomljene derivacije funkcija općih potencija. Neka je $\alpha \geq 0$, $\beta > 0$, $f(x) = (x-a)^{\beta-1}$ i $g(x) = (b-x)^{\beta-1}$. Koristeći Primjer 3.1* *slijedi Riemann–Liouvilleova lijeva razlomljena derivacija funkcije f*

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta-1} &= \frac{d^n}{dx^n} I^{n-\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta-1} \\ &= \frac{d^n}{dx^n}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}(x-a)^{n-\alpha+\beta-1} \\ &= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\frac{\Gamma(\beta)(n-\alpha+\beta-1)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}(x-a)^{n-\alpha+\beta-2}\right] \\ &= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta-1)}(x-a)^{n-\alpha+\beta-2}\right]. \end{aligned}$$

Ponavljajući postupak dobijemo

$$D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\beta-1} = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(-\alpha+\beta)}(x-a)^{-\alpha+\beta-1}. \tag{5}$$

Analogno, za desnu Riemann–Liouvilleovu razlomljenu derivaciju funkcije g vrijedi

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{b-}(b-x)^{\beta-1} &= (-1)^n\frac{d^n}{dx^n} I^{n-\alpha}_{b-}(b-x)^{\beta-1} \\ &= (-1)^n\frac{d^n}{dx^n}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(n-\alpha+\beta)}(b-x)^{n-\alpha+\beta-1} \\ &= \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(-\alpha+\beta)}(b-x)^{-\alpha+\beta-1}. \end{aligned}$$

Za $\beta = 2$ dobijemo razlomljene derivacije afine funkcije

$$D^{\alpha}_{a+}(x-a) = \frac{(x-a)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)},\ \ D^{\alpha}_{b-}(b-x) = \frac{(b-x)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

Ako je $\beta = 1$, onda za konstantnu funkciju vrijedi

$$D^{\alpha}_{a+}1 = \frac{(x-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)},\ \ D^{\alpha}_{b-}1 = \frac{(b-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Time pokazujemo da za razliku od klasičnih derivacija, Riemann–Liouvilleove razlomljene derivacije konstantne funkcije općenito nisu jednake nuli.
S druge strane, za $j = 1, 2, \ldots, [\alpha]+1$,

$$D^{\alpha}_{a+}(x-a)^{\alpha-j} = \frac{\Gamma(\alpha-j+1)}{\Gamma(1-j)}(x-a)^{-j} = 0,\ \ D^{\alpha}_{b-}(b-x)^{\alpha-j} = 0 \tag{6}$$

s obzirom da gama funkcija ima polove prvog reda u točkama $0, -1, -2, \ldots$.

Iz navedenog zaključujemo: funkcije oblika $(x-a)^{\alpha-j}$, odnosno $(b-x)^{\alpha-j}$, imaju istu ulogu za razlomljene derivacije kao konstante kod običnih derivacija.

Napomena 3.1. *U prethodnom primjeru kod izračunavanja identiteta* (5), *može se pojaviti negativna vrijednost argumenta gama funkcije, no kako smo već naveli, gama funkciju je moguće proširiti na područje* $\Re(z) \leq 0$ *koristeći* (2). *Pogledajmo slučaj negativnih realnih brojeva: ako za* $z > 0$ *znamo vrijednost* $\Gamma(z)$ *te ako identitet* (1) *zapišemo u obliku*

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}, \tag{7}$$

onda je desna strana gornje jednakosti dobro definirana ne samo za $z > 0$, *već i za* $-1 < z < 0$. *Stoga desnu stranu jednakosti* (7) *u ovom slučaju možemo koristiti za definiranje lijeve strane. U sljedećem koraku, vraćamo se ponovno na jednakost* (7), *te kako je* Γ *definirana za* $-1 < z < 0$, *slijedi da je desna strana* (7) *definirana za* $-2 < z < -1$. *To ćemo iskoristiti kako bi i lijevu stranu definirali za* $-2 < z < -1$.
Na ovaj način možemo proširiti definiciju gama funkcije na negativne realne brojeve, ali ne sve. Problem su negativni cijeli brojevi, jer već iz jednakosti (7) *slijedi da gama funkcija nije definirana u nuli. Nadalje, kako je*

$$\Gamma(-1) = \frac{\Gamma(0)}{-1},$$

slijedi da Γ *nije definirana ni u* -1, *a samim time ni u* -2 *s obzirom na to da vrijedi*

$$\Gamma(-2) = \frac{\Gamma(-1)}{-2}.$$

Dakle, gama funkcija nije definirana ni za koji $z \in \mathbb{Z}_0^-$, *iz čega nam slijede jednakosti* (6).

Promotrimo međusobni odnos razlomljenog integriranja i deriviranja. Poznato je da za obične derivacije i integrale vrijedi $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$, dok je $\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$, tj. integral s lijeve strane se razlikuje od f za konstantu $-f(a)$.

Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\frac{d^n}{dx^n} I_{a+}^n f \equiv f$, ali $I_{a+}^n f^{(n)} \neq f$, razlikujući se od f za polinom stupnja $n-1$. Također, za $\alpha > 0$ vrijedi $D_{a+}^\alpha I_{a+}^\alpha f \equiv f$, ali $I_{a+}^\alpha D_{a+}^\alpha f \neq f$, s obzirom da se uz f može javiti i linearna kombinacija funkcija $(x-a)^{\alpha-k}$, $k = 1, 2, \ldots, [\alpha] + 1$.
Slično vrijedi i za uzastopnu primjenu razlomljene derivacije:

$$D_{a+}^{\alpha_1} D_{a+}^{\alpha_2} f \neq D_{a+}^{\alpha_1+\alpha_2} f.$$

Više o samo teoriji razlomljenog infinitezimalnog računa može se naći u $[1, 3]$.

Slučaj poluderivacije je posebno zanimljiv jer je tada Riemann–Liouvilleova poluderivacija jednaka derivaciji Riemann–Liouvilleovog poluintegrala. Naime, ako je $\alpha = \frac{1}{2}$, onda je $n = [\alpha] + 1 = 1$, pa za lijevu poluderivaciju dobijemo:

$$D_{a+}^{1/2} f(x) = \frac{d}{dx} I_{a+}^{1/2} f(x).$$

Pritom je

$$\begin{aligned} I_{a+}^{1/2} f(x) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\frac{1}{2}-1} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^x \frac{f(t)}{\sqrt{x-t}} dt. \end{aligned}$$

Analogno se dobije za desne Riemann–Liouvilleove poluintegrale i poluderivacije.

4 Poluintegrali i poluderivacije nekih funkcija

U prethodnom poglavlju ilustrirali smo svojstva razlomljenih integrala i derivacija na primjeru funkcije opće potencije. Nastavljajući se na korespondenciju dvoje velikih matematičara s početka članka, izračunat ćemo Riemann–Liouvilleove poluderivacije, tj. razlomljene derivacije reda $\alpha = 1/2$, kvadratnih, afinih i konstantnih funkcija na intervalu $\mathbb{R}^+$. Pritom promatramo lijeve integrale i derivacije, dok za desne rezultati slijede analogno.

U Primjerima 3.1 i 3.2 smo izračunali Riemann–Liovilleov razlomljeni integral $I_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1}$ i razlomljenu derivaciju $D_{a+}^{\alpha}(x-a)^{\beta-1}$. Uvrštavanjem $\alpha = 1/2$ dobijemo vrijednosti njihovih poluintegrala i poluderivacija. Naravno, rezultati se mogu dobiti i direktnim računom (integriranjem), no to ostavljamo čitateljima za vježbu.

Primjer 4.1. *Promotrimo prvo konstantnu funkciju:*

$$I_{0+}^{\alpha} 1 = \frac{x^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad D_{0+}^{\alpha} 1 = \frac{x^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

Vrijednosti njenog poluintegrala i poluderivacije su tada

$$I_{0+}^{1/2} 1 = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}, \quad D_{0+}^{1/2} 1 = \frac{1}{\sqrt{x\pi}}.$$

Primjer 4.2. *U općem slučaju za funkciju identitete $f(x) = x$ vrijedi*

$$I_{0+}^{\alpha} x = \frac{x^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)}, \quad D_{0+}^{\alpha} x = \frac{x^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}.$$

Potvrdimo Lacroixevu pretpostavku iz 1802. godine o poluderivaciji funkcije identitete:

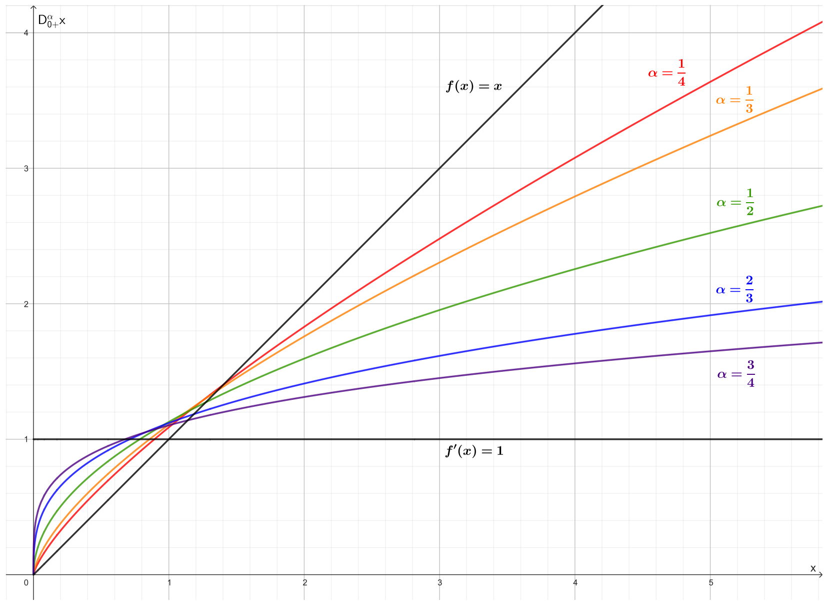
$$I_{0+}^{1/2} x = \frac{x^{3/2}}{\Gamma(5/2)} = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} x^{3/2},$$

$$\frac{d^{\frac{1}{2}} x}{dx^{\frac{1}{2}}} = D_{0+}^{1/2} x = \frac{x^{1/2}}{\Gamma(3/2)} = 2\sqrt{\frac{x}{\pi}}.$$

Tablica 1. Tablica posebnih slučajeva za $\alpha \in (0,1)$

α	$I_{0+}^{\alpha} x$	$D_{0+}^{\alpha} x$
$\frac{1}{4}$	$\approx 0.883 x^{\frac{5}{4}}$	$\approx 1.088 x^{\frac{3}{4}}$
$\frac{1}{3}$	$\approx 0.840 x^{\frac{4}{3}}$	$\approx 1.108 x^{\frac{2}{3}}$
$\frac{1}{2}$	$\approx 0.752 x^{\frac{3}{2}}$	$\approx 1.128 x^{\frac{1}{2}}$
$\frac{2}{3}$	$\approx 0.665 x^{\frac{5}{3}}$	$\approx 1.120 x^{\frac{1}{3}}$
$\frac{3}{4}$	$\approx 0.622 x^{\frac{7}{4}}$	$\approx 1.103 x^{\frac{1}{4}}$

Rezultati $D_{0+}^{\alpha} x$ prikazani su na donjoj slici. Vidimo da se grafovi razlomljenih derivacija nalaze između obične derivacije $f'(x) = 1$ i same funkcije (tj. nulte derivacije) $f(x) = x$, osim na jednom malom intervalu. Što je veći red razlomljene derivacije, to je njen graf bliži grafu prve derivacije, odnosno, što je manji red razlomljene derivacije, to je njen graf bliži grafu same funkcije.



Slika 1. Riemann–Liouvilleove razlomljene derivacije funkcije identitete

Primjer 4.3. *Promotrimo kvadratnu funkciju $f(x) = x^2$:*

$$I^{\alpha}_{0+}\, x^2 = \frac{2x^{\alpha+2}}{\Gamma(\alpha+3)}, \quad D^{\alpha}_{0+}\, x^2 = \frac{2x^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)}.$$

Za poluintegral i poluderivaciju vrijedi

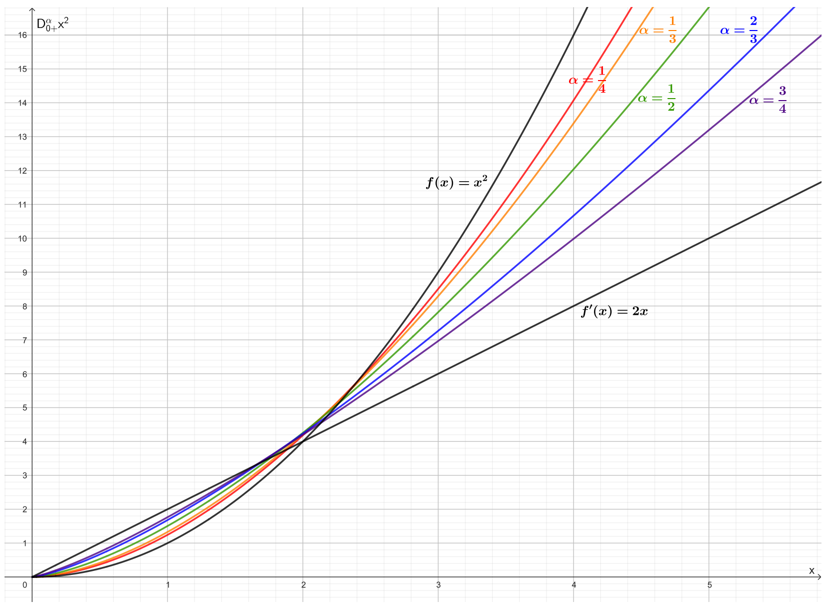
$$I^{1/2}_{0+}\, x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(7/2)} x^{5/2} = \frac{16}{15\sqrt{\pi}} x^{5/2},$$

$$D^{1/2}_{0+}\, x^2 = \frac{\Gamma(3)}{\Gamma(5/2)} x^{3/2} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} x^{3/2}.$$

Tablica 2. Tablica posebnih slučajeva za $\alpha \in (0,1)$

α	$I_{0+}^{\alpha}\, x^2$	$D_{0+}^{\alpha}\, x^2$
$\frac{1}{4}$	$\approx 0.785x^{\frac{9}{4}}$	$\approx 1.244x^{\frac{7}{4}}$
$\frac{1}{3}$	$\approx 0.720x^{\frac{7}{3}}$	$\approx 1.329x^{\frac{5}{3}}$
$\frac{1}{2}$	$\approx 0.602x^{\frac{5}{2}}$	$\approx 1.505x^{\frac{3}{2}}$
$\frac{2}{3}$	$\approx 0.498x^{\frac{8}{3}}$	$\approx 1.680x^{\frac{4}{3}}$
$\frac{3}{4}$	$\approx 0.452x^{\frac{11}{4}}$	$\approx 1.765x^{\frac{5}{4}}$

Kao i za funkciju identitete, i ovdje za kvadratnu funkciju vrijedi analogno: što je veći red razlomljene derivacije, to je njen graf bliži grafu prve derivacije, i obrnuto.



Slika 2. Riemann–Liouvilleove razlomljene derivacije kvadratne funkcije

Literatura

[1] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, J. J. Trujillo, *Theory and Applications of Fractional Differential Equations*, Elsevier, Amsterdam, Netherlands, 2006.

[2] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru I i II*, Školska knjiga, Zagreb, 1977.

[3] K. B. Oldham, J. Spanier, *The Fractional Calculus: Theory and Applications of Differentiation and Integration to Arbitrary Order,* Dover Publication, New York, 2006.

[4] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1970.