Osječki matematički list 23 (2023), 73–81

Kratka povijest prijateljskih brojeva

Franka Miriam Brückler*

Sažetak

U ovom članku pratimo povijest prijateljskih brojeva, tj. parova prirodnih brojeva koji su svaki jednaki zbroju pravih djelitelja drugog, od njihovog prvog razmatranja u doba antičke Grčke do danas. Posebna je pažnja posvećena doprinosima dvaju matematičara koji su dokazali značajne opće rezultate o njima, Tābitu ibn Kuri i Leonhardu Euleru.

Ključne riječi: *prijateljski brojevi, savršeni brojevi, teorija brojeva, pitagorejci, Tābit ibn Kura, Marin Mersenne, Pierre de Fermat, René Descartes, Leonhard Euler, Nicolo Paganini*

A Short History of Amicable Numbers

Abstract

In this paper we describe the history of amicable numbers, i.e. pairs of positive integers such that each is the sum of all proper divisors of the other, from their first mention in ancient Greece up to the present. Special attention is given to the results of the two mathematicians who proved important general theorems on amicable numbers, Thābit ibn Qurra and Leonhard Euler.

Keywords: *amicable numbers, perfect numbers, number theory, pythagoreans, Thābit ibn Qurra, Marin Mersenne, Pierre de Fermat, René Descartes, Leonhard Euler, Nicolo Paganini*

*Matematički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, email: bruckler@math.hr

Svatko od vas, dragi čitatelji, zasigurno zna što su to **savršeni brojevi**. Mnogi od nas su još u doba obveznog školovanja čuli za te prirodne brojeve koji su zbrojevi svih svojih pravih djelitelja, primjerice $6 = 1 + 2 + 3$ i $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. No, iako su i njima vrlo bliski prijateljski brojevi poznati od davnina, s njima se malo tko susretne ako se ne zanima za teoriju brojeva ili ju mora učiti. Prijateljski brojevi su poopćenje savršenih brojeva: Savršeni brojevi su oni koji su prijateljski sami sa sobom.

Definicija prijateljskih brojeva je sljedeća: Par prirodnih brojeva nazivamo **prijateljskim brojevima** ako je svaki od njih jednak zbroju pravih djelitelja drugog. Najstariji i ujedno najmanji par prijateljskih brojeva čine 220 i 284:

$$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142;$$

$$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110.$$

Kako smo spomenuli u prethodnom članku [6], ranoj povijesti prijateljskih brojeva su doprinijeli pitagorejci te matematičar tzv. zlatnog doba arapske matematike, Tābit ibn Kura. U ovom ćemo članku uz njihove doprinose opisati i najznačajnije rezultate o prijateljskim brojevima do današnjih dana.

1 Prijateljski brojevi u antičkoj Grčkoj

Nerijetko se navodi da su se za prijateljske brojeve prvi zanimali pitagorejci, pod čime mislimo na pripadnike zajednice koju je u Krotonu u 6. st. pr. Kr. oko sebe okupio **Pitagora sa Samosa** i u kojoj su postavljeni temelji matematičkog dokazivanja. Tome u prilog ide činjenica da su pitagorejci općenito proučavali prirodne brojeve, ali ih i kategorizirali u razne podvrste kao i dodjeljivali im simboliku. Pitagorejci su vrlo vjerojatno proučavali savršene brojeve i dokazali prve teoreme o njima; tome u prilog ide činjenica da se sadržaj VII., VIII. i IX. knjige Euklidovih *Elemenata* (oko 300. pr. Kr.) uglavnom pripisuje pitagorejcima. Ipak, [9] ističe da nije sačuvan ikakav zapis definicije savršenih brojeva prije Euklida.

Definiciju savršenih brojeva nalazimo u VII. knjizi *Elemenata*: „Savršen broj je onaj koji je jednak zbroju svojih dijelova".[1] Na kraju pak IX. knjige *Elemenata* nalazimo znamenitu propoziciju o parnim savršenim brojevima [11]:

[1] Napominjemo da je u pitagorejskom, a tako i euklidskom i općenito starogrčkom smislu broj isključivo prirodan broj. Također, jedinica nije broj nego osnova od čijih kopija se sastoje drugi brojevi.

Teorem 1.1. *Ako ma koliko brojeva počevši od jedinice se uzmu neprekidno u dvostrukoj proporciji dok im ukupni zbroj ne postane prost, te ako taj zbroj pomnožen sa zadnjim čini neki broj, onda je umnožak savršen.*

Suvremenim jezikom rečeno: Ako je $s = 1 + 2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$ prost broj, onda je $2^{n-1}s$ savršen.

Iako su prijateljski brojevi prirodno poopćenje savršenih, Euklid ih ne spominje. Glavni izvor za tvrdnju da su ih proučavali još pitagorejci je neoplatonistički filozof arapskih korijena **Jamblih** (oko 250.–330. n. e.). On je otkriće prijateljskih brojeva pripisao Pitagori, zapisavši da kod parova poput 220 i 284 „dijelovi svakog generiraju drugog, u skladu s riječju o prijateljstvu koju je otkrio Pitagora. Jer, kad je bio upitan 'što je prijatelj?' odgovorio je 'drugo ja' — kako se vidi u tim brojevima" [5, 7, 9, 12, 13].

Ipak, Jambliha treba uzeti s rezervom, jer je dobro poznato da su pitagorejci svoje rezultate pripisivali Pitagori pa nije moguće razlučiti što je stvarno on dokazao ili rekao, a što neki pripadnik njegove škole. S druge strane, Jamblih nije poznat po ikakvoj matematičkoj originalnosti, te je praktički sigurno da su prijateljski brojevi bili definirani i razmatrani prije njega [10]. Ono što je svakako očito iz Jamblihovog navoda je:

- Prijateljski brojevi prvi put su razmatrani u doba antičke Grčke, najkasnije u doba posthelenizma.
- Antičkim Grcima bio je poznat jedan par prijateljskih brojeva: 220 i 284.

Nakon Jambliha preko pola tisućljeća, čini se, pali su u zaborav …

2 Prijateljski brojevi u zlatno doba arapske matematike

Prvi novi i ujedno za dugo vremena jedini opći rezultat o prijateljskim brojevima potječe od znamenitog matematičara zlatnog doba arapske matematike (9.–13. st.), **Tābita ibn Kure** (vjerojatno 836.–901.). Tābit je poznat po svojim prijevodima starogrčkih klasičnih matematičkih tekstova na arapski i vlastitim rezultatima u astronomiji, teoriji konika, elementarnoj algebri, o magičnim kvadratima te, o čemu smo pisali u [6], poopćenju Pitagorina poučka. U svom tekstu, koji u prijevodu nosi naslov *Traktat o jednostavnom izvodu prijateljskih brojeva*, Tābit je iskazao i dokazao [5, 10, 12, 14]:

Teorem 2.1 (Tābit). *Ako su za neki prirodan broj n brojevi* $p = 3 \cdot 2^n - 1$, $q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$ *i* $r = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1$ *prosti brojevi, onda su* $2^n\,p\,q$ *i* $2^n\,r$ *prijateljski brojevi.*

Očigledna je sličnost Tābitovog rezultata s Euklidovim teoremom o savršenim brojevima. Također, starogrčki par prijateljskih brojeva (220 i 284) se dobije za slučaj kad je $n = 2$ u Tābitovom teoremu, što mu je zasigurno bilo poznato. Vjerojatno mu je bilo poznato i da se za $n = 3$ ne dobiva par prijateljskih brojeva, jer u tom slučaju r nije prost broj.

Tābit nije naveo kako je otkrio to pravilo, ali poziva se na starogrčke rezultate o savršenim brojevima (konkretno, na Euklidov teorem 1.1 i njegov ponovni iskaz oko 100. g. n. e. u *Uvodu u aritmetiku* neopitagorejca Nikomaha iz Geraze).[2] Pripisujući otkriće prijateljskih brojeva Pitagori, vjerojatno na temelju spomenutog Jamblihovog navoda, Tābit navodi da ni Euklid ni Nikomah nisu spominjali dotične, te navodi da želi „popuniti tu rupu" nalazeći opće pravilo za njih. To je pravilo dokazao u svojem tekstu, koji se sastoji od deset propozicija od kojih je zadnja Tābitov teorem 2.1. Kod Tābita taj teorem izgleda ovako:[3]

> Želimo naći po volji mnogo prijateljskih brojeva. Stoga ispisujemo naše brojeve u neprekidnoj dvostrukoj proporciji,[4] počevši od jedinice; jedinica im prethodi i uzima se skupa s njima. Neka su to brojevi A, B, G, D, E i W. Zbrajamo ih uzastopno, uključivši jedinicu, kao što to činimo u izvodu savršenih brojeva. Neka je zbroj A, B, G, D i E broj Z. Broju Z pribrajamo zadnji od zbrojenih brojeva, dakle broj E. Neka je zbroj $E + Z$ broj H. Od broja Z oduzima broj koji prethodi broju E, dakle broj D. Neka je ostatak $Z - D$ broj T.
>
> Ako su oba broja H, T prosti brojevi različiti od broja dva, onda je to ono što želimo. Ako nisu, onda nastavljamo s nizom brojeva koji su se zbrajali (tj. $A, B, G, \dots$) dok ne dođemo do nekog broja takvog da su ti tako iz njih izvedeni brojevi prosti. Stoga neka su H i T prosti i neka nijedan od njih nije broj dva. Pomnožimo jednog s drugim , neka je rezultat broj K. Pomnožimo broj K sa zadnjim od zbrojenih brojeva, to je E. Neka je rezultat (tj. K puta E) broj L. Onda je to jedan od brojeva u paru prijateljskih brojeva, pa stanemo i zapamtimo ga.
>
> Opet, zbrojimo broj koji slijedi iza E u nizu brojeva u dvostrukoj proporciji — to je broj W — s drugim brojem prije zadnjeg u nizu zbrojenih brojeva — to je broj G. Neka je njihov zbroj

[2] Zanimljivo je reći da je upravo Tābit objavio revidirani stariji prijevod *Elemenata* te preveo *Uvod u aritmetiku* na arapski jezik.

[3] Ovo je prijevod engleskog prijevoda iz [10].

[4] Misli se na geometrijski niz s kvocijentom 2.

> $W + G$ broj M i neka je umnožak broja M i broja W broj N. Oduzmemo jedan od toga, neka je ostatak broj S.
>
> Ako je S prost, onda je to ono što želimo. Ako ne, nastavljamo niz brojeva koji su zbrajani dok ne dođemo do broja takvog da je taj broj (tj. onaj koji odgovara S) prost. Stoga neka je S prost broj. Pomnožimo ga s brojem E, neka je rezultat broj O. Tvrdim da su brojevi L i O prijateljski.

Kako vidimo, Tābit ovdje ističe sličnost sa savršenim brojevima, a i stil iskaza (kao i dokaza) je čisto euklidski: iako se radi o općem dokazu, napisan je s konkretnim $n = 4$. Naime, prema tekstu vidimo da bi bilo $A = 1 = 2^0$, $B = 2$, $G = 4 = 2^{n-2}$, $D = 8 = 2^{n-1}$, $E = 16 = 2^n$, $W = 32 = 2^{n+1}$, $Z = 1+2+\ldots+2^n = 1+2+4+8+16 = 31 = 2^{n+1}-1$, $H = 2^n + 2^{n+1} - 1 = 3 \cdot 2^n - 1 = 16 + 31 = 47$, $T = 2^{n+1} - 1 - 2^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} - 1 = 23$, $L = H \cdot T \cdot E = 17296$, $M = W + G = 2^{n+1} + 2^{n-2} = 9 \cdot 2^{n-2} = 36$, $N = M \cdot W = 9 \cdot 2^{2n-1} = 1152$, $S = N - 1 = 9 \cdot 2^{2n-1} - 1 = 1151$, $O = S \cdot E = 18416$. I stvarno, par 17296 i 18416 je par prijateljskih brojeva. Otkriće tog para se često pripisuje Fermatu (vidi sljedeći odjeljak), no Fermat zasigurno nije prvi koji ga je otkrio. Perzijski matematičar kasnijeg arapskog doba, **Kamāl al-Dīn al-Fārisī** (1267.–1319.) konkretno je za taj par početkom 14. stoljeća provjerio da je prijateljski [3, 14]. Štoviše, vrlo je izvjesno da je već i sam Tābit bio svjestan tog para, jer se, kako smo upravo vidjeli, isti krije kao konkretan primjer unutar njegovog dokaza i nije vjerojatno da je dao dokaz na primjeru konkretnog $n = 4$ bez da je provjerio da u tom slučaju stvarno dobije par prijateljskih brojeva [10].

Za prijateljske brojeve zanimalo se i više drugih znanstvenika zlatnog arapskog doba, primjerice znameniti al-Karadži (10. st.), kojemu se pripisuje konačno odvajanje algebre od geometrije, al-Bagdadi (10./11. st.), koji je dobio više rezultata iz teorije brojeva koji se inače pripisuju europskim matematičarima 17. stoljeća, ... [14]. Kao zanimljivost navodimo i da je arapski znanstvenik s Iberskog poluotoka, Maslama Al-Madžriti (poznat i pod latiniziranim imenom Methilem, rođen oko 950., umro 1007.), inače najpoznatiji po svojim doprinosima astronomiji, navodno proveo eksperiment da testira erotičnost para 220 i 284 tako što je jednoj osobi dao 220, a drugoj 284 kolača da pojedu, no nije poznat ishod tog eksperimenta [13].

3 Prijateljski brojevi u 17. stoljeću

Kao što je dobro poznato, u Europi je interes za teoriju brojeva izvan razine koja se na starogrčki način podučavala u srednjovjekovnim (a i renesansnim) školama pod nazivom 'aritmetika' nakon antike zamro. Za obnovu interesa za tu disciplinu ponajviše su zaslužni dva francuska matematičara 17. stoljeća, Marin Mersenne i Pierre de Fermat. Među mnoštvom drugih rezultata iz teorije brojeva, **Pierre de Fermat** (1607.–1665.) je 1636. ponovno otkrio, zasigurno ne znajući za Tābita, Tābitov teorem te u pismu Mersenneu navodi već spomenuti par 17296, 18416 koji se iz tog teorema dobije za $n = 4$. Dvije godine kasnije, 1638., znameniti **René Descartes** (1596.–1650.), koji je s Fermatom bio sve samo ne u prijateljskim odnosima (o tome više u sljedećem članku), također je ponovno otkrio Tābitovo pravilo te dobio novi par prijateljskih brojeva 9363584 i 9437056, koji se dobiju za $n = 7$ i kojeg je — kao i Fermat — naveo u jednom pismu Mersenneu.[5] Ipak, kao što Fermat nije znao da je njegov par znao već al-Fārisī, a vjerojatno i Tābit, tako Descartes očito nije znao da je 'njegov' nekoliko desetljeća ranije otkrio iranski matematičar **Muhamad Bakir Jazdi** (16./17. st.) [12, 14]. Dakle, u 17. stoljeću jedini opći rezultat o prijateljskim brojevima ostao je Tābitov teorem i bila su poznata samo tri para prijateljskih brojeva:

1. Tzv. Pitagorin par 220, 284;

2. Tzv. Fermatov par 17296, 18416;

3. Tzv. Descartesov par 9363584, 9437056.

4 Prijateljski brojevi od Eulera do danas

Veliki švicarski matematičar **Leonhard Euler** (1707.–1783.) doprinio je mnogim područjima matematike, a neka je i utemeljio. Među poznatijim njegovim doprinosima nalazi se niz rezultata iz teorije brojeva. Primjerice, dokazao je da vrijedi obrat Euklidovog teorema 1.1, tj. da su njime u potpunosti karakterizirani svi parni savršeni brojevi.[6]

Dok su prije Eulera bila, kako smo vidjeli, poznata samo tri para prijateljskih brojeva, on je našao novih čak 58. Svoju metodu opisao je u članku *De numeris amicabilibus* (O prijateljskim brojevima, 1750.). Njegova se metoda temelji na uvođenju Eulerove σ-funkcije: Za prirodan broj n, $\sigma(n)$ je zbroj svih djelitelja broja n (dakle, zbroj svih pravih djelitelja od n je $\sigma(n) - n$).[7] U nastavku ćemo ju ukratko opisati, prateći njezin detaljniji opis iz [8].

Euler je dokazao razna svojstva σ-funkcije, među ostalim dobro poznati

Teorem 4.1. *Ako su brojevi m i n relativno prosti, onda je $\sigma(m\,n) = \sigma(m)\sigma(n)$.*

[5] Za $n = 5$ i $n = 6$ nisu zadovoljeni uvjeti Tābitovog teorema.

[6] Jedan još uvijek otvoreni problem u teoriji brojeva je postoje li neparni savršeni brojevi.

[7] U navedenom članku Euler ju je označio s $\int n$. Mi ćemo koristiti danas uobičajenu notaciju.

Euler je zatim razmatrajući definiciju prijateljskih brojeva uočio da je par M, N prijateljski točno ako je $\sigma(M) - M = N$ i $\sigma(N) - N = M$. Supstitucija druge u prvu jednakost daje karakterizaciju para prijateljskih brojeva u obliku jednakosti

$$\sigma(M) = M + N = \sigma(N).$$

Pretpostavivši da ima par prijateljskih brojeva, iskoristio je tu jednakost da dokaže nužni uvjet prijateljstva brojeva. Posebno, dobio je (za detalje upućujemo na članak [8]) da ako je $M = a\,p\,q$ i $N = a\,r$, gdje je a najveći zajednički djelitelj od M i N, a p, q, r različiti prosti brojevi, onda ako uzmemo maksimalno skraćen oblik $\frac{b}{c}$ razlomka

$$\frac{a}{2a - \sigma(a)},$$

te faktoriziramo b^2 kao $(c\,x - b)(c\,y - b)$ (nađemo sve moguće faktorizacije), onda je $p = x - 1$, $q = y - 1$, $r = x\,y - 1$. Drugim riječima, ako krenemo od a i ako su tako dobiveni brojevi p, q, r prosti, onda su M i N kandidati za par prijateljskih brojeva, što naravno treba na kraju provjeriti.

Primjer 4.1. *Uzmimo $a = 4$. Tada je $\sigma(a) = 1 + 2 + 4 = 7$, dakle je $\frac{a}{2a-\sigma(a)} = \frac{4}{8-7} = \frac{4}{1}$, dakle je $b = 4$ i $c = 1$. Moguće faktorizacije $(c\,x - b)(c\,y - b) = (x - 4)(y - 4)$ od $b^2 = 16$ su $1 \cdot 16$, $2 \cdot 8$ i $4 \cdot 4$, dakle su moguće vrijednosti za (x, y) redom $(5, 20)$, $(6, 12)$ i $(8, 8)$. Za njih se redom dobivaju trojke (p, q, r) $(19, 4, 99)$ (q nije prost pa nas ta trojka ne zanima), $(11, 5, 71)$ i $(7, 7, 63)$ (posljednja isto otpada je r nije prost). Dakle, uz $a = 4$ jedina mogućnost je $p = 11$, $q = 5$, $r = 71$, koja daje $M = 220$, $N = 284$, tj. Pitagorin par.*

Opisanom metodom Euler je dobio, kako smo već rekli, 58 novih parova prijateljskih brojeva, od kojih se mnogi ne mogu dobiti iz Tābitovog teorema. Euler je našao i neke druge metode za nalaženje parova prijateljskih brojeva, a još prije navedenog članka je 1747. objavio sljedeće poopćenje Tābitovog teorema [4, 13]:

Teorem 4.2 (Euler-Tābit). *Ako su za neke prirodne brojeve $m < n$ brojevi $p = 2^m \cdot (2^{n-m} + 1) - 1$, $q = 2^n \cdot (2^{n-m} + 1) - 1$ i $r = 2^{n+m} \cdot (2^{n-m} + 1)^2 - 1$ prosti brojevi, onda su $2^n\,p\,q$ i $2^n\,r$ prijateljski brojevi.*

Ono što je zanimljivo je da je čak i Euler propustio naći drugi najmanji par prijateljskih brojeva, 1184 i 1210. Njega je 1866. našao tada šesnaestogodišnji Nicolò Paganini (ne, to nije znameniti violinist!) [10, 12].

Eulerovi rezultati označavaju početak sustavne potrage za parovima prijateljskih brojeva. Do 1946. bilo je poznato već 390 parova [1], a zatim se pojavom kompjutera potraga ubrzala. Do danas je poznato 1227828026 parova, pri čemu su poznati svi s 18 ili manje znamenaka [2].

5 Par riječi za kraj

Kao i kod mnogih naizgled jednostavnih pojmova i ideja iz teorije brojeva, tako i oko prijateljskih brojeva postoje pitanja na koja još nije nađen odgovor. Uzevši u obzir da se tijekom osnovnog i srednjeg školovanja matematika često prikazuje kao 'zatvorena' disciplina te mnogi, čak i dobro obrazovani, ljudi misle da se u matematici nema što više otkriti, sljedeća tri pitanja lako su razumljiva i mogu svakom nastavniku ili popularizatoru matematike poslužiti kao primjer da ne znamo sve:

- Stalno se pronalaze sve veći parovi prijateljskih brojeva, ali postoji li ih beskonačno mnogo?
- U svim dosad poznatim parovima prijateljskih brojeva oba broja su ili parni ili neparni. Postoji li par prijateljskih brojeva od kojih je jedan paran, a jedan neparan?
- Svi dosad poznati parovi prijateljskih faktora imaju zajednički djelitelj veći od 1. Postoji li par prijateljskih brojeva koji su relativno prosti?

Za kraj, dajemo tablicu parova prijateljskih brojeva s pet ili manje znamenki i imena onih koji su ih otkrili i kad:

Pitagora(?)	6.st. pr. Kr. (?)	220	284
N. Paganini	1866.	1184	1210
L. Euler	1747.	2620	2924
L. Euler	1747.	5020	5564
L. Euler	1750.	6232	6368
L. Euler	1747.	10744	10856
B. H. Brown	1939.	12285	14595
Al-Farisi	14. st.	17296	18416
L. Euler	1747.	63020	576084
L. Euler	1750.	66928	66992
L. Euler	1747.	67095	71145
L. Euler	1747.	69615	87633
H. L. Rolf	1964.	79759	88730

Literatura

[1] J. Alanen, O. Ore, J. Stemple, *Systematic Computations on Amicable Numbers*, Mathematics of Computation, **21**(98) (1967), 242–245.

[2] Amicable Pairs List, `https://sech.me/ap/index.html` (pristupljeno 3. srpnja 2023.)

[3] M. Annaby, *On the Extraction of Amicable Pairs Between Ibn Sīnā, al-Baghdādī and al-Kāshī*. DOI: `https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-2698073/v1`

[4] W. Borho, *On Thabit ibn Kurrah's Formula for Amicable Numbers*, Mathematics of Computation, **26**(118) (1972), 571–578.

[5] S. Brentjes, J. P. Hogendijk, *Notes on Thābit ibn Qurra and His Rule for Amicable Numbers*, Historia Mathematica, **16** (1989), 373–378.

[6] F. M. Brückler, *Nekoliko povijesnih dokaza Pitagorinog poučka*, Osječki matematički list, **22**(2) (2022), 171–183.

[7] L. E. Dickson, *Perfect and Amicable Numbers*, The Scientific Monthly **12**(4) (1921), 349–354.

[8] W. Dunham, *Euler's Amicable Numbers*, Math Horizons **15**(2) (2007), 5–7.

[9] T. Heath, *A History of Greek Mathematics, Volume I*, Oxford at the Clarendon Press, 1921.

[10] J. P. Hogendijk, *Thābit ibn Qurra and the Pair of Amicable Numbers* 17296, 18416, Historia Mathematica 12, (1985), 269–273.

[11] D. E. Joyce, *Euclid's Elements*,`http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/java/elements/` (pristupljeno 1. srpnja 2023.)

[12] Prime Glossary, *Amicable Numbers*, `https://t5k.org/glossary/page.php?sort=AmicableNumber` (pristupljeno 28. lipnja 2023.)

[13] M. S. Petković, *Famous Puzzles of Great Mathematicians*, American Mathematical Society, 2009.

[14] R. Rashed, *The Development Of Arabic Mathematics Between Arithmetic And Algebra*, Springer, 1994.