Osječki matematički list 23 (2023), 101–114

Elementarne funkcije i elementarna polja

Marija Miloloža Pandur*, Ivan Vuković†

Sažetak

U ovome radu poopćujemo standardnu definiciju elementarnih realnih funkcija realne varijable. Nova definicija uključuje i kompleksne funkcije realne varijable.

Ključne riječi: *analitičke funkcije, meromorfne funkcije, polje, elementarno polje, elementarne funkcije*

Elementary functions and elementary fields

Abstract

In this paper, we generalize the standard definition of elementary real functions of a real variable. The new definition includes also complex functions of a real variable.

Keywords: *analytic functions, meromorphic functions, field, elementary field, elementary functions*

*Fakultet primijenjene matematike i informatike, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: mmiloloz@mathos.hr

†Fakultet primijenjene matematike i informatike, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, email: ivukovic@mathos.hr

1 Uvod

U svim visokoškolskim udžbenicima matematike koja se predaje na prvoj godini preddiplomskih studija nalazi se gradivo o funkcijama, te se navode elementarne funkcije i njihova osnovna svojstva. Prvo su navedene tzv. osnovne elementarne funkcije, a onda je dana definicija elementarnih funkcija kao onih funkcija koje se jednostavno „slože“ iz tih osnovnih funkcija. U ovom radu cilj nam je poopćiti definiciju elementarnih realnih funkcija realne varijable koja uključuje kompleksne funkcije realne varijable.

Definicija 1.1. ***Osnovne elementarne funkcije*** *(realne funkcije realne varijable) su:*

1. *konstantne funkcije* $x \mapsto c, \quad x \in \mathbb{R} \quad (c \in \mathbb{R}),$
2. *opće potencije*[1] $x \mapsto x^\alpha, \quad x > 0 \quad (\alpha \in \mathbb{R}),$
3. *eksponencijalne funkcije* $x \mapsto a^x, \quad x \in \mathbb{R} \quad (a > 0,\, a \neq 1),$
4. *logaritamske funkcije* $x \mapsto \log_a x, \quad x > 0 \quad (a > 0,\, a \neq 1),$
5. *trigonometrijske funkcije* sin, cos, tg, ctg,
6. *ciklometrijske funkcije* arcsin, arccos, arctg, arcctg.

Elementarne funkcije definiraju se induktivno: ***elementarne funkcije*** n***-tog tipa***, $n \in \mathbb{N}$, *dobivaju se primjenom konačno mnogo osnovnih algebarskih operacija (zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja) te konačnog broja kompozicija elementarnih funkcija* $(k-1)$*-vog tipa, za* $k = 1, 2, \ldots, n$, *pri čemu su osnovne elementarne funkcije tipa* 0. *Elementarne funkcije proizvoljnog tipa zajedno zovemo* ***elementarnim funkcijama***.

Na primjer, funkcija $3\sin$ definirana s

$$(3\sin)(x) := \sin x + \sin x + \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

je elementarna prvog tipa jer je dobivena kao zbroj tri osnovne elementarne funkcije sin. Naravno, to možemo kraće zapisati:

$$(3\sin)(x) = 3 \cdot \sin x, \quad x \in \mathbb{R}\,. \tag{1}$$

Zbog toga možemo također reći da je funkcija $3\sin$ elementarna funkcija jer je dobivena kao umnožak osnovne elementarne funkcije $x \mapsto 3$, $x \in \mathbb{R}$

[1] Za određene izbore broja α, domena opće potencije se može proširiti. Primjerice, za $\alpha \in \mathbb{N}$ domena se može proširiti na čitav $\mathbb{R}$. Stoga ćemo i takve funkcije nazivati osnovnim elementarnim funkcijama.

(konstantne funkcije) i osnovne elementarne funkcije sin. U nekim udžbenicima se, nažalost pogrešno, konstantne funkcije ne navode kao osnovne elementarne funkcije. U tome slučaju, i dalje bismo mogli zaključiti da je funkcija 3 sin elementarna koristeći (1): konstantnu funkciju $x \mapsto 3$, $x \in \mathbb{R}$ možemo dobiti tako da opću potenciju $x \mapsto x^\alpha$, $x \in \mathbb{R}$ za $\alpha = 0$, uz dogovor $0^0 := 1$, zbrojimo tri puta. No, ako umjesto broja 3 uzmemo iracionalni broj, npr. $\sqrt{2}$ ili π, ne možemo pomoću zbrajanja, oduzimanja, množenja niti dijeljenja spomenute opće potencije $x \mapsto 1, x \in \mathbb{R}$ dobiti iracionalnu konstantu. Zbog toga i konstantne funkcije navodimo kao osnovne elementarne funkcije.

Navedimo još nekoliko primjera elementarnih funkcija *prvog tipa* (ovdje je $x \in \mathbb{R}$, osim ako nije drugačije naznačeno):

1. polinomi $\quad x \mapsto a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \quad a_i \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}$
2. hiperbolne funkcije $\quad \operatorname{sh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}, \operatorname{ch} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}, \operatorname{th} x = \dfrac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$, $\operatorname{cth} x = \dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}$ za $x \neq 0$ (ovdje je $x \mapsto e^{-x} = (1/e)^x$ osnovna elementarna funkcija),
3. $x \mapsto \underbrace{\sin(\sin(\cdots(\sin}_{n \text{ puta}} x))), \quad n \in \mathbb{N}$,
4. $x \mapsto \sqrt{x} + 3x \arcsin x - e^{x^2},\ x \in [0,1]$,
5. $x \mapsto \ln(\cos x),\ x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi)$.

Ubuduće nećemo eksplicite navoditi domenu funkcije nego podrazumijevati da je promatrana funkcija definirana na nekom otvorenom intervalu na kojem izraz kojim je definirana ima smisla.

Dakle, u prvom tipu smijemo koristiti osnovne algebarske operacije i komponiranje samo osnovnih elementarnih funkcija. Navedimo sada nekoliko primjera elementarnih funkcija *drugog tipa*:

1. racionalne funkcije (kvocijenti dvaju polinoma koji su prvog tipa),
2. $x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$ (osnovna plus kompozicija funkcije prvog tipa i osnovne),
3. $x \mapsto \operatorname{sh}(\operatorname{ch} x) - \ln(\cos x + x^3)$ (kompozicija funkcija prvog tipa minus kompozicija funkcije prvog tipa i osnovne).

Dakle, u drugom tipu smijemo koristiti osnovne algebarske operacije i komponiranje osnovnih elementarnih funkcija i elementarnih funkcija prvog tipa. Konačno, slijedi i nekoliko primjera elementarnih funkcija *trećeg tipa*.

1. $x \mapsto \underbrace{\operatorname{tg}(x^3+5)}_{2.\text{ tip}}\underbrace{\log_3(x+4)}_{2.\text{ tip}} + \underbrace{x^2 e^x}_{1.\text{ tip}} - \underbrace{\sin x}_{0.\text{ tip}}$,

2. area funkcije

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arsh} x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\\
\operatorname{arch} x &= \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right),\\
\operatorname{arth} x &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\\
\operatorname{arcth} x &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right).
\end{aligned}
$$

Da bismo mogli dati općenitiju definiciju elementarnih funkcija prelazimo na **kompleksne funkcije realne varijable**. Jedan od razloga je taj da se sve trigonometrijske i ciklometrijske funkcije mogu prikazati preko kompleksnih eksponencijalnih i logaritamskih funkcija, primjerice:

$$
\sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \qquad \cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \tag{2}
$$

$$
\arcsin x = -i\ln(ix+\sqrt{1-x^2}) \qquad \arccos x = -i\ln(x+i\sqrt{1-x^2}). \tag{3}
$$

Prisjetimo se, kompleksnu funkciju realne varijable $f\colon \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{C}$, I otvoren interval, možemo zapisati pomoću njezinog realnog i imaginarnog dijela:

$$
f(x) = u(x) + iv(x),
$$

gdje su $u, v\colon \mathbb{R} \supseteq I \to \mathbb{R}$ realne funkcije realne varijable. Tada je f neprekidna/derivabilna/integrabilna[2] ako su u i v neprekidne/derivabilne/integrabilne. Za kompleksnu funkciju realne varijable f kažemo da je **analitička** ako su joj realni i imaginarni dio analitičke funkcije kao realne funkcije realne varijable[3]. Naglašavamo da se ovdje *ne radi* o kompleksnim funkcijama kompleksne varijable te da pojmovi „analitička" i „meromorfna" ne znače ono što normalno znače u kolegijima i knjigama poput „Kompleksna

[2] $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$ i $\int f(x)\mathrm{d}x = \int u(x)\mathrm{d}x + i\int v(x)\mathrm{d}x$

[3] Neka je g realna funkcija realne varijable. Za beskonačno puta derivabilnu funkciju g kažemo da je analitička u točki x_0 ako postoji interval (a,b), koji sadrži točku x_0 takav da njen Taylorov red u točki x_0 konvergira broju $g(x)$ za svaki $x \in (a,b)$. Funkciju koja je analitička u svakoj točki svoje domene nazivamo analitičkom funkcijom.

analiza“, „Analitičke funkcije“ i slično. Svojstvo analitičnosti na otvorenom intervalu se čuva pri uobičajenim operacijama s funkcijama (suma, produkt, kvocijent, kompozicija, deriviranje, integriranje, inverzna funkcija s neiščezavajućom derivacijom). Ako je g realna analitička funkcija, onda su npr. $x \mapsto \cos(g(x))$ i $x \mapsto \operatorname{arcctg}(g(x))$ analitičke funkcije na nekom otvorenom intervalu. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ je funkcija $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ (kao inverzna funkciji $x \mapsto x^n$) analitička na $(0, +\infty)$, pa je onda i $x \mapsto \sqrt[n]{g(x)}$ analitička za pozitivnu analitičku funkciju g. Također je analitička i kompleksna funkcija realne varijable $x \mapsto e^{f(x)}$, uz uobičajenu definiciju kompleksne eksponencijalne funkcije $e^{u(x)+iv(x)} = e^{u(x)}(\cos v(x) + i \sin v(x))$.

1.1 Pomoćne oznake

Prisjetimo se definicije polja.

Definicija 1.2. *Neka je K neprazan skup uz zadane binarne operacije zbrajanja i množenja. Kažemo da je $(K, +, \cdot)$ **polje** ako vrijedi:*

1. *$(K, +)$ je Abelova grupa,*
2. *$(K \setminus \{0\}, \cdot)$ je Abelova grupa,*
3. *$a(b + c) = ab + ac, \quad \forall a, b, c \in K$.*

U daljnjem tekstu ćemo koristiti oznaku $K[X_1, \ldots, X_n]$ za prsten polinoma od n varijabli s koeficijentima iz polja K, a $K(X_1, \ldots, X_n)$ za polje racionalnih funkcija od n varijabli s koeficijentima iz polja K. Koristimo oznake $X_1, \ldots, X_n$ za varijable jer te varijable mogu biti različite, npr. realni brojevi, kompleksni brojevi, funkcije. Pojasnimo ove oznake sljedećim primjerima.

Primjer 1.1. *Za polje K uzmimo polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$. Stoga je $\mathbb{C}[X]$ prsten polinoma jedne varijable s koeficijentima iz polja $\mathbb{C}$, dok je $\mathbb{C}[X, Y]$ prsten polinoma dvije varijable s koeficijentima iz polja $\mathbb{C}$. Primjerice funkcija $X \mapsto X^5 - (1 + i)X^3 + 4X^2 - 5i$ nalazi se u $\mathbb{C}[X]$, a funkcija $(X, Y) \mapsto 3X^4Y^2 + X^3Y - (3 - i)Y - 5iX^2$ nalazi se u $\mathbb{C}[X, Y]$.*

Nadalje, $\mathbb{C}(X)$ je polje racionalnih funkcija jedne varijable s koeficijentima iz polja $\mathbb{C}$, dok je $\mathbb{C}(X, Y)$ polje racionalnih funkcija dvije varijable s koeficijentima iz polja $\mathbb{C}$. Primjerice funkcija

$$X \mapsto \frac{X + i}{X^5 + (4 - 3i)X + 2i}$$

nalazi se u $\mathbb{C}(X)$*, a funkcija*

$$(X,Y) \mapsto \frac{3X^4Y^2 + X^3Y - (3-i)Y - 5iX^2}{(1+2i)X^7Y^4 - iX^2Y^5 + XY - 4}$$

nalazi se u $\mathbb{C}(X,Y)$*.*

Primjer 1.2. *Za polje* K *uzmimo polje racionalnih funkcija jedne varijable s koeficijentima iz polja* $\mathbb{C}$*, dakle polje* $\mathbb{C}(X)$*. Tada je* $\mathbb{C}(X)[Y]$ *prsten polinoma jedne varijable* Y *s koeficijentima iz polja* $\mathbb{C}(X)$*. U njemu se nalaze polinomi oblika*

$$Y \mapsto \sum_j a_j(X)Y^j$$

s koeficijentima koji su racionalne funkcije $X \mapsto a_j(X)$ *u varijabli* X *nad poljem* $\mathbb{C}$*. Na* $\mathbb{C}(X)[Y]$ *možemo gledati kao na potprsten polja* $\mathbb{C}(X,Y)$ *iz primjera 1.1. Primjerice funkcija*

$$Y \mapsto (5-3i)Y^4 - \frac{X^2 - 5i}{X^5 - X + 3 + i}Y^2 + \frac{iX^3 + X^2}{X^5 - i}$$

nalazi se u $\mathbb{C}(X)[Y]$*.*

2 Elementarna polja

Kvocijent dvije kompleksne analitičke funkcije na fiksnom nepraznom otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ zvat ćemo **meromorfnom** funkcijom na intervalu I. Meromorfna funkcija na intervalu može imati polove na I (nultočke nazivnika koji nisu ujedno i nultočke brojnika, dakle kod do kraja skraćenih razlomaka). Na primjer, funkcija $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ je meromorfna na $\mathbb{R}$, a polovi su joj nultočke funkcije sin. Funkcije $x \mapsto \dfrac{1}{\sin \frac{1}{x}}$ za $x > 0$ i $x \mapsto \dfrac{1}{\sin \frac{1}{x}}$ za $x < 0$ su meromorfne na $(0,+\infty)$, $(-\infty,0)$, tim redom (0 nije pol tih funkcija). Skup svih meromorfnih funkcija na fiksnom nepraznom otvorenom intervalu je polje, uz uobičajene operacije zbrajanja i množenja funkcija.

Definicija 2.1. *Neka su* $f_0,\ldots,f_m\colon I \to \mathbb{C}$ *zadane funkcije, gdje je* $I \subseteq \mathbb{R}$ *neprazan otvoren interval. Ako su* $f_0,\ldots,f_m$ *meromorfne funkcije na intervalu* I *onda s* $\mathbb{C}_I(f_0,\ldots,f_m)$ *označavamo skup svih meromorfnih funkcija na intervalu* h *oblika*

$$h = \frac{P(f_0,\ldots,f_m)}{Q(f_0,\ldots,f_m)} = \frac{\sum a_{i_0,\ldots,i_m} f_0^{i_0}\cdots f_m^{i_m}}{\sum b_{j_0,\ldots,j_m} f_0^{j_0}\cdots f_m^{j_m}},$$

gdje su P i Q polinomi od $m+1$ varijable nad poljem $\mathbb{C}$

$$P(X_0,\ldots,X_m)=\sum a_{i_0,\ldots,i_m} X_0^{i_0}\cdots X_m^{i_m},\ Q(X_0,\ldots,X_m)=\sum b_{j_0,\ldots,j_m} X_0^{j_0}\cdots X_m^{j_m}$$

te $Q(f_0,\ldots,f_m)\neq 0\in\mathbb{C}_I[f_0,\ldots,f_m]$.

Skup $\mathbb{C}_I(f_0,\ldots,f_m)$ očito je polje s uobičajenim operacijama zbrajanja i množenja funkcija. Uobičajeno ne naglašavamo na koji interval I mislimo, pa koristimo kraću oznaku $\mathbb{C}(f_0,\ldots,f_m)$.

Napomena 2.1. *Kada se radi o funkcijama od kojih se barem jedna teško može zapisati bez označavanja njenih varijabli, na primjer $f_0(x)=x$, $f_1(x)=\sqrt{x}$, $f_3=\sin$, polje generirano tim funkcijama ćemo označavati $\mathbb{C}(x,\sqrt{x},\sin x)$ ili čak „mješovito" $\mathbb{C}(x,\sqrt{x},\sin)$.*

Primjer 2.1. *Inkluzija*[4]*, sinus i kosinus su meromorfne funkcije na čitavom $\mathbb{R}$. Polje $K:=\mathbb{C}(x,\sin x,\cos x)$ je polje racionalnih funkcija*

$$x\mapsto\frac{P(x,\sin x,\cos x)}{Q(x,\sin x,\cos x)}$$

za polinome $P,Q\in\mathbb{C}[X,Y,Z]$, takve da je

$$Q(x,\sin x,\cos x)\neq 0\in\mathbb{C}[x,\sin x,\cos x].$$

Na primjer, ne možemo uzeti $Q(X,Y,Z)=Y^2+Z^2-1$ jer je $\sin^2 x+\cos^2 x-1=0$ za svaki x. Primjer jedne funkcije iz K:

$$x\mapsto\frac{2x^3\sin^2 x-6ix^2\cos x+(4+3i)x}{x^4+2x^3\sin x\cos^5 x+2i\sin^3 x+3}. \tag{4}$$

Dakle, za ovu funkciju je

$$\begin{aligned}P(X,Y,Z)&=2X^3Y^2-6iX^2Z+(4+3i)X\\ Q(X,Y,Z)&=X^4+2X^3YZ^5+2iY^3+3.\end{aligned}$$

Zbog (2) je $K=\mathbb{C}(x,e^{ix})$ pa se svaki element polja K može zapisati u obliku $R(x,e^{ix})/S(x,e^{ix})$ za odgovarajuće polinome $R,S\in\mathbb{C}[X,Y]$, pri čemu $S\neq 0\in\mathbb{C}[x,e^{ix}]$. Na primjer, nakon sređivanja formule za $\sin x$ dobivamo

$$\sin x=\frac{e^{2ix}-1}{2ie^{ix}} \tag{5}$$

[4]Ovdje mislimo na funkciju s $\mathbb{R}$ u $\mathbb{C}$, zadanu s $x\mapsto x=x+0\,i$.

pa će polinomi R i S za sinus biti: $R(X,Y) = Y^2 - 1$, $S(X,Y) = 2iY$. Potpuno analogno se pokaže za kosinus. Malo složeniji primjer je

$$x^5 \sin^3 x \cos x = x^5 \cdot \frac{e^{8ix} - 2e^{6ix} + 2e^{2ix} - 1}{-16ie^{4ix}}$$

pa je u ovome slučaju $R(X,Y) = X^5 \cdot (Y^8 - 2Y^6 + 2Y^2 - 1)$, $S(X,Y) = -16iY^4$.

Uočimo da je $\mathbb{C}(x,e^x) \neq \mathbb{C}(x,e^{ix})$. Također, npr. $\mathbb{C}(x,e^{3ix}) \neq \mathbb{C}(x,e^{ix})$ jer recimo funkcija $x \mapsto e^{5ix} \in \mathbb{C}(x,e^{ix})$ se ne može prikazati kao racionalna funkcija u varijablama x i e^{3ix}.

Prisjetimo se oznake polja koju smo uveli u definiciji 2.1. U sljedećoj definiciji će nulta funkcija iz te oznake biti inkluzija $x \mapsto x$.

Definicija 2.2. *Neka su $f_1, \dots, f_n$ meromorfne funkcije na nekom fiksnom nepraznom otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$. Polje $K = \mathbb{C}(x, f_1, \dots, f_n)$ meromorfnih funkcija na I je* ***elementarno polje*** *ako za svaku funkciju f_i, $i = 1, \dots, n$, vrijedi da je (za $i = 1$ uzimamo $K_0 := \mathbb{C}(x)$)*

1. *f_i eksponent nekog elementa[5] polja $K_{i-1} = \mathbb{C}(x, f_1, \dots, f_{i-1})$ ili*
2. *f_i logaritam nekog elementa[6] polja $K_{i-1} = \mathbb{C}(x, f_1, \dots, f_{i-1})$ ili*
3. *f_i algebarska nad K_{i-1}, odnosno postoji polinom*
   $P(X) = X^m + a_{m-1}X^{m-1} + \cdots + a_0 \in K_{i-1}[X]$, takav da je $P(f_i) = 0$.

Posebno, kažemo da je $K_0 = \mathbb{C}(x)$ elementarno polje.

Uočimo da se do elementarnog polja K dolazi postupnim proširenjem polja $\mathbb{C}(x)$ (uz odgovarajuće suženje intervala I) novom funkcijom koja je ili logaritam neke funkcije iz prethodnog polja, ili eksponent neke funkcije iz prethodnog polja ili neka funkcija koja je algebarska nad prethodnim poljem. Svako takvo proširenje zovemo **elementarnim proširenjem** bilo kojeg prethodno generiranog elementarnog polja. Pogledajmo nekoliko primjera.

Primjer 2.2. *Polja $\mathbb{C}(x,e^x)$, $\mathbb{C}(x,e^{ix})$, $\mathbb{C}(x,e^{3ix})$ i*

$$\mathbb{C}\left(x, \exp\left(\frac{2ix^5}{x^3 + (3-2i)x^2 + i}\right)\right)$$

su elementarna polja nad bilo kojim nepraznim otvorenim intervalom u $\mathbb{R}$.

[5] Ovdje mislimo na kompoziciju neke funkcije i kompleksne eksponencijalne funkcije $z \mapsto e^z$.

[6] Ovdje mislimo na kompoziciju neke funkcije i glavne grane kompleksne logaritamske funkcije $z \mapsto \ln z$.

Primjer 2.3. *Zbog sljedećih svojstava logaritama realnih varijabli*

$$\log_a(bx) = \log_a b + \log_a x, \quad \log_a(x^k) = k\log_a x, \quad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a},$$

$a, b, x > 0$, $a \neq 1$, je funkcija $x \mapsto \log_4(5\sqrt{x+3})$ u elementarnom polju $\mathbb{C}_I(x, \ln(x+3))$. Ovdje se za interval I može uzeti bilo koji neprazni otvoreni interval koji je podskup od $(-3, +\infty)$. Uočimo da se za parne eksponente $p \in \mathbb{N}$ funkcija $x \mapsto \ln(x^p)$ nalazi u elementarnom polju $\mathbb{C}_I(x, \ln x)$, gdje je $I \subseteq (0, +\infty)$, ali i u elementarnom polju $\mathbb{C}_J(x, \ln(x^p))$ gdje je $J \subseteq (-\infty, 0)$ ili $J \subseteq (0, +\infty)$.

Slično, funkcija $x \mapsto \ln \dfrac{7x}{x^2-3x-10}$ je u elementarnom polju $\mathbb{C}_I\left(x, \ln \dfrac{x}{x^2-3x-10}\right)$. Ovdje se za interval I može uzeti bilo koji otvoreni neprazan interval koji je podskup od $(-2, 0)$ ili $(5, +\infty)$. Također, u istom elementarnom polju je i npr. funkcija

$$x \mapsto \frac{\frac{3ix^2-5+2i}{x^5-i} + 3ix^7 + \ln\frac{8x}{x^2-3x-10}}{\log^2 \frac{x}{x^2-3x-10} + \frac{3+i}{x^3+(2+i)x^2} + \pi} + \frac{1}{x+i}\log_5 \sqrt{\frac{x}{x^2-3x-10}}. \tag{6}$$

U ovom smo slučaju koristili da je suma, produkt i kvocijent funkcija (pri čemu nazivnik nije nul-funkcija) iz polja, opet funkcija iz istoga polja.

Primjer 2.4. *Pogledajmo sljedeću funkciju:*

$$f(x) = 3\ln(x^7) - \sqrt[3]{e^x + 5\cos(x^2)}. \tag{7}$$

Elementarno polje u kojemu se nalazi ta funkcija je

$$\begin{aligned} K &= \mathbb{C}(x, f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)) \\ &= \mathbb{C}(x, e^x, \ln x, e^{ix^2}, \sqrt[3]{e^x + 5\cos(x^2)}). \end{aligned} \tag{8}$$

Pri tome je $K_0 = \mathbb{C}(x)$, $K_1 = \mathbb{C}(x, e^x)$, $K_2 = \mathbb{C}(x, e^x, \ln x)$, $K_3 = \mathbb{C}(x, e^x, \ln x, e^{ix^2})$, $K_4 = \mathbb{C}(x, e^x, \ln x, e^{ix^2}, \sqrt[3]{e^x + 5\cos(x^2)}) = K$. Sva ta polja promatramo nad nekim fiksnim nepraznim otvorenim intervalom u $(0, +\infty)$. Uočimo da je $f_3(x) = e^{ix^2}$ i vrijedi da je f_3 eksponent neke funkcije iz polja K_2 (to je funkcija $x \mapsto ix^2$). Pomoću e^{ix^2} možemo zapisati $\cos(x^2)$ iz (7). Nadalje, uočimo da je $f_4(x) = \sqrt[3]{e^x + 5\cos(x^2)}$ algebarska nad K_3. Naime, polinom $P(X) = X^3 - (e^x + 5\cos(x^2))$ ima koeficijente iz K_3 (vodeći koeficijent je konstanta 1, a slobodni funkcija $x \mapsto -(e^x + 5\cos(x^2))$) i vrijedi $P(f_4) = 0$.

3 Elementarne funkcije

Sada možemo dati općenitiju definiciju elementarnih funkcija.

Definicija 3.1. *Meromorfna funkcija $f\colon I \to \mathbb{C}$, na nepraznom otvorenom intervalu $I \subset \mathbb{R}$, je **elementarna funkcija** ako se nalazi u nekom elementarnom polju.*

Pokažimo da su sve funkcije koje su elementarne po definiciji 1.1 elementarne i po ovoj novoj definiciji 3.1 (gledajući na njih kao na kompleksne funkcije na nekom nepraznom otvorenom intervalu).

Primjer 3.1. *Konstantne funkcije, polinomi, racionalne funkcije su elementarne funkcije jer se nalaze u elementarnom polju $\mathbb{C}(x)$, kao i u svakom njegovom elementarnom proširenju.*

Primjer 3.2. *Opće potencije*

$$f_\alpha(x) = x^\alpha = e^{\alpha \ln x}, \quad x > 0$$

za $\alpha \in \mathbb{R}$ su elementarne funkcije jer se nalaze npr. u elementarnom polju $\mathbb{C}(x, \ln x, e^{\alpha \ln x})$. Za posebne izbore α, domena opće potencije se može proširiti. Tako za $\alpha \in \mathbb{N}$ domena je $\mathbb{R}$ te je funkcija $f_n(x) = x^n$ elementarna jer se nalazi u elementarnom polju $\mathbb{C}(x)$. Nadalje, za $\alpha \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}_0$ domena je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pa su funkcije $x \mapsto 1/x^n$, za $x > 0$ te $x \mapsto 1/x^n$ za $x < 0$ elementarne jer se nalaze[7] u elementarnom polju $\mathbb{C}(x)$. Konačno, ako je $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}$ domena ovisi o parnosti brojnika i nazivnika. Istaknimo još, vađenje n-tog korijena ($n \in \mathbb{N}$) $f_{1/n}(x) = \sqrt[n]{x}$ je elementarna funkcija (na svojoj domeni) jer se nalazi u elementarnom polju $\mathbb{C}(x, \sqrt[n]{x})$. Naime, funkcija $f_{1/n}$ je algebarska nad $\mathbb{C}(x)$: polinom $P(X) = X^n - x$ je iz $\mathbb{C}(x)[X]$ i vrijedi $P(f_{1/n}) = 0$.

Primjer 3.3. *Eksponencijalne funkcije*

$$f_a(x) = a^x = e^{x \ln a},$$

za $a > 0$, $a \neq 1$ su elementarne jer se nalaze npr. u elementarnom polju $\mathbb{C}(x, e^{x \ln a})$.

Primjer 3.4. *Logaritamske funkcije*

$$g_a(x) = \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \quad x > 0,$$

za $a > 0$, $a \neq 1$ su elementarne jer se nalaze npr. u elementarnom polju $\mathbb{C}(x, \ln x)$.

[7] U definiciji elementarnih funkcija za domenu smo uzimali neprazan otvoren interval realnih brojeva. Zbog toga ovdje gledamo dva slučaja: $x < 0$ i $x > 0$.

Primjer 3.5. *Funkcije* $\sin$ *i* $\cos$ *su elementarne jer se nalaze u elementarnom polju* $\mathbb{C}(x, e^{ix})$. *Funkcije* tg *i* ctg *su elementarne jer se također nalaze u istom elementarnom polju. Naime, jer se radi o polju, kvocijent dviju funkcija, pri čemu nazivnik nije nul-funkcija, ostaje u istome polju.*

Primjer 3.6. *Pokažimo da su i ciklometrijske funkcije elementarne. Zbog* $\arcsin(x) = -i\ln(ix + \sqrt{1-x^2})$ *za* $x \in (-1,1)$, *je* $\arcsin$ *elementarna jer se nalazi u elementarnom polju*

$$\begin{aligned} K &= \mathbb{C}(x, f_1(x), f_2(x)) \\ &= \mathbb{C}(x, \sqrt{1-x^2}, \ln(ix + \sqrt{1-x^2})). \end{aligned} \tag{9}$$

Naime, $f_1(x) = \sqrt{1-x^2}$ *je algebarska nad poljem* $K_0 = \mathbb{C}(x)$ (*za polinom* $P(X) = X^2 - (1-x^2)$ *vrijedi* $P(X) \in K_0[X]$ *i* $P(f_1) = 0$). *Nadalje,* $f_2(x) = \ln(ix + \sqrt{1-x^2})$ *je logaritam funkcije* $x \mapsto ix + \sqrt{1-x^2}$ *iz* $K_1 = \mathbb{C}(x, \sqrt{1-x^2})$. *Nadalje, kako je* $\arccos(x) = -i\ln(x + i\sqrt{1-x^2})$ *za* $x \in (-1,1)$, *funkcija* $\arccos$ *se nalazi u elementarnom polju*

$$K = \mathbb{C}(x, \sqrt{1-x^2}, \ln(x + i\sqrt{1-x^2})) \tag{10}$$

pa je i $\arccos$ *elementarna funkcija. Zbog* $\operatorname{arctg}(x) = \dfrac{1}{2i}\ln\dfrac{i-x}{i+x}$ *za* $x \in \mathbb{R}$, *je* arctg *elementarna jer se nalazi u elementarnom polju*

$$K = \mathbb{C}\left(x, \ln\frac{i-x}{i+x}\right). \tag{11}$$

I na kraju, zbog $\operatorname{arcctg}(x) = \dfrac{1}{2i}\ln\dfrac{x+i}{x-i}$ *za* $x \in \mathbb{R}$, *funkcija* arcctg *je također elementarna jer se nalazi u elementarnom polju*

$$K = \mathbb{C}\left(x, \ln\frac{x+i}{x-i}\right). \tag{12}$$

Primjer 3.7. *Funkcija iz* (6) *je elementarna jer se nalazi u elementarnom polju* $\mathbb{C}\left(x, \ln\dfrac{x}{x^2-3x-10}\right)$.

Primjer 3.8. *Funkcija* f *iz* (7) *je elementarna jer se nalazi u elementarnom polju* (8).

Primjerima 3.1–3.6 pokazali smo da su osnovne elementarne funkcije prema definiciji 1.1 ujedno i elementarne prema definiciji 3.1. Kako su elementarne funkcije elementi nekog elementarnog polja (pa i svakog elementarnog proširenja toga polja), onda primjena konačno mnogo osnovnih algebarskih operacija nad elementarnim funkcijama opet daje elementarnu funkciju iz toga polja. Iz same definicije elementarnog polja te iz primjera iz ovog odjeljka jasno je da je i konačan broj kompozicija elementarnih funkcija opet elementarna funkcija i po definiciji 3.1.

Primjer 3.9. *Kompozicija* $g(x) = \cos(\sin(x^2))$ *je elementarna jer je komponirana od elementarnih funkcija. Funkcija* g *se nalazi u elementarnom polju* $\mathbb{C}(x, e^{ix^2}, e^{i\sin(x^2)})$.

Dakle, definiciju elementarnih funkcija 1.1 proširili smo na **kompleksne funkcije realne varijable**. Pokažimo još jedan izvor elementarnih funkcija koji ne slijedi iz definicije 1.1.

Primjer 3.10. *Iz teorema o implicitnoj funkciji slijedi da ako imamo polinomijalnu jednadžbu s koeficijentima koji su meromorfne funkcije na nekom otvorenom intervalu, gdje vodeći koeficijent nije nul-funkcija, tada na nekom intervalu postoji meromorfno rješenje* f *te jednadžbe. Ako izaberemo koeficijente te polinomijalne jednadžbe koji su elementarne funkcije iz nekog elementarnog polja* K*, onda će lokalno rješenje te jednadžbe biti funkcija koja je elementarna, a nalazi se u elementarnom polju* $K(f)$[8]*. Sjetimo se Abel-Ruffinijevog teorema o nerješivosti u radikalima opće polinomijalne jednadžbe petog i višeg stupnja s koeficijentima iz nekog polja. Primjerice, neka je zadan polinom* P *s* $P(X) = X^5 + X + x$, $P \in \mathbb{C}(x)[X]$*. Prema teoremu o implicitnoj funkciji postoji meromorfna funkcija* $x \mapsto f(x)$ *zadana implicite takva da je* $(f(x))^5 + f(x) + x = 0$*, tj.* $P(f(x)) = 0$ *za svaki* x *iz nekog intervala. Pošto je* f *algebarska nad poljem* $\mathbb{C}(x)$*, ona se po definiciji 2.2 nalazi u elementarnom polju* $\mathbb{C}(x, f(x))$ *pa je stoga po definiciji 3.1 elementarna funkcija. Napominjemo da se (realne) vrijednosti ove algebarske funkcije zovu Bringovi radikali, i da se ne mogu prikazati samo pomoću* n*-tih korijena od* x *niti racionalnih potencija od* x*, te algebarskih operacija istih. Slično, pokazuje se da su lokalna rješenja* f *„zastrašujuće“ polinomijalne jednadžbe*

$$(f(x))^7 \sin(\ln x) + 5(f(x))^4(e^{2x} - 8x) + (f(x))^2(\mathrm{tg}(\arcsin(x) + 3x^2)) = 0$$

elementarne funkcije na nekim intervalima.

Skup svih meromorfnih funkcija (kvocijenti analitičkih funkcija) na nekom nepraznom otvorenom intervalu je polje, i u tome polju možemo definirati operator deriviranja $f \mapsto f'$ koristeći pravilo deriviranja kvocijenta.

Teorem 3.1 ([1, str. 5]). *Ako je* K_n *elementarno polje, onda je zatvoreno na deriviranje.*

[8]Podsjetimo se, oznaka $K(f)$ označava polje racionalnih funkcija jedne varijable f s koeficijentima iz polja K.

Dokaz. Neka je $K_n = \mathbb{C}(x, f_1, \ldots, f_n)$ za neke meromorfne funkcije $f_1, \ldots, f_n$ na nekom nepraznom otvorenom intervalu. Dokaz provodimo metodom matematičke indukcije. Za $n = 0$ je $K_0 = \mathbb{C}(x)$. Pošto je derivacija potencije opet potencija te koristeći pravila deriviranja zbroja, umnoška i kvocijenta funkcija slijedi da je polje $\mathbb{C}(x)$ zatvoreno na deriviranje. Pretpostavimo da je elementarno polje $K_{n-1} := \mathbb{C}(x, f_1, \ldots, f_{n-1})$, za $n \geq 1$ zatvoreno na deriviranje. Vrijedi $K_n = K_{n-1}(f_n)$ i da je f_n ili algebarska nad K_{n-1} ili eksponent ili logaritam nekog elementa iz K_{n-1} (po definiciji elementarnog polja).

Pokažimo prvo da je dovoljno dokazati da je $f_n' \in K_{n-1}(f_n) = K_n$. Naime, pod tom pretpostavkom, za proizvoljni polinom $P(T) = \sum_{j \geq 0} a_j T^j \in K_{n-1}[T]$ imamo[9]

$$(P(f_n))' = \Big(\sum_{j \geq 0} a_j \cdot f_n^j \Big)' = a_0' + \sum_{j \geq 1} (a_j' f_n^j + j a_j f_n^{j-1} f_n') \in K_{n-1}(f_n)$$

jer su funkcije $a_j \in K_{n-1}$ i jer je po pretpostavci indukcije K_{n-1} zatvoreno na deriviranje, pa je $a_j' \in K_{n-1}$ za svaki j. Stoga, za proizvoljne polinome $P, Q \in K_{n-1}[T]$ nad poljem K_{n-1} takve da je $Q(f_n) \neq 0$ vrijedi

$$\left(\frac{P(f_n)}{Q(f_n)} \right)' = \frac{Q(f_n) P(f_n)' - P(f_n) Q(f_n)'}{(Q(f_n))^2} \in K_{n-1}(f_n)$$

jer su i brojnik i nazivnik iz $K_{n-1}(f_n)$. Dakle, uz pretpostavku da je $f_n' \in K_{n-1}(f_n) = K_n$ slijedi da se derivacija bilo koje funkcije iz polja $K_{n-1}(f_n)$ nalazi upravo u tome polju, odnosno da je K_n zatvoreno na deriviranje.

Ostaje još pokazati da funkcija f_n, koja je ili algebarska nad K_{n-1} ili eksponent ili logaritam nekog elementa iz K_{n-1}, ima derivaciju f_n' koja se nalazi u polju $K_{n-1}(f_n)$. Ako je $f_n = e^g$ za neku $g \in K_{n-1}$ tada je $f_n' = g' e^g = g' f_n \in K_{n-1}(f_n)$ jer je $g' \in K_{n-1}$ (K_{n-1} je po pretpostavci indukcije zatvoreno na deriviranje). Ako je $f_n = \ln g$ za neku $g \in K_{n-1}$ tada je $f_n' = g'/g \in K_{n-1} \subseteq K_{n-1}(f_n)$. Ostaje još algebarski slučaj. Neka je $P(T) = T^m + a_{m-1} T^{m-1} + \cdots + a_0 \in K_{n-1}[T]$ polinom najmanjeg stupnja takav da je $P(f_n) = 0$. Tada je $P'(T) = m T^{m-1} + (m-1) a_{m-1} T^{m-2} + \cdots + 2 a_2 T + a_1$ polinom stupnja $m - 1$ i $P'(f_n) \neq 0$. Kako vrijedi

$$0 = (P(f_n))' = \sum_{j > 0} j a_j f_n^{j-1} f_n' + \sum_{j < m} a_j' f_n^j = P'(f_n) f_n' + \sum_{j < m} a_j' f_n^j,$$

to je $P'(f_n) f_n' = -\sum_{j<m} a_j' f_n^j \in K_{n-1}(f_n)$. Pošto $P'(f_n) \neq 0$ i $P'(f_n) \in K_{n-1}(f_n)$, dijeljenjem dobivamo da je $f_n' \in K_{n-1}(f_n)$. $\square$

[9] Funkcije a_j i f_n su funkcije varijable x.

Prema prethodnom teoremu, derivacija elementarne funkcije je opet elementarna funkcija. Dakle, znamo da postoje meromorfne elementarne funkcije i kako možemo dobiti nove elementarne funkcije (osnovnim operacijama $+, -, \cdot, :$, kompozicijom, deriviranjem). Pitanje koje se nameće je postoje li meromorfne funkcije koje nisu elementarne? Ako postoje, kako ih možemo okarakterizirati? Odgovore na ova pitanja dao je Liouville u prvoj polovici 19. stoljeća. Odgovori su vezani za nemogućnost rješavanja nekih jednostrukih Riemannovih integrala osnovnim metodama i tehnikama integriranja. Liouville je pokazao da određene elementarne funkcije nemaju elementarne primitivne funkcije, stoga integriranje elementarne funkcije ne daje nužno elementarnu funkciju. No, detaljnije o tome ćemo pisati u nastavku ovoga rada (naslov: „Elementarne funkcije i neelementarni integrali“).

Zahvala
Zahvaljujemo recenzentu na konstruktivnim komentarima koji su poboljšali ovaj rad.

Literatura

[1] B. Conrad, *Impossibility theorems for elementary integration*, Department of Mathematics, University of Michigan, Ann Arbor, 1991.

[2] H. Kraljević, S. Kurepa, *Matematička analiza 4/I, Funkcije kompleksne varijable*, Tehnička knjiga, Zagreb 1986.

[3] M. Rosenlicht, *Integration in finite terms*, American Math. Monthly, **79**(1972), 963—972.

[4] Dana P. Williams, *Nonelementary antiderivatives*, Department of Mathematics, Bradley Hall, Dartmouth College, Hanover, 1993.