Eksponencijalne jednadžbe kod kojih su i baze i eksponenti algebarske funkcije

ILIJA ILIŠEVIĆ*

Sažetak. *Opisane su metode za rješavanje specijalnih eksponencijalnih jednadžbi kod kojih su baza i eksponenti algebarske funkcije. Spomenute metode su ilustrirane na nizu zanimljivih zadataka koji su prilagođeni učenicima srednjih škola.*

Ključne riječi: *eksponencijalne jednadžbe, algebarske funkcije*

Exponential equations whose bases and exponents are algebraic functions

Abstract. *Methods for solving special exponential equations whose bases and exponents are algebraic functions are described. Mentioned methods are illustrated on a number of interesting tasks that have been adapted for high school students.*

Key words: *exponential equations, algebraic functions*

Najjednostavnije takve jednadžbe su jednadžbe oblika

$$\big(f(x)\big)^{g(x)} = \big(f(x)\big)^{h(x)}, \tag{1}$$

gdje su f, g, h neke algebarske funkcije.

Rješavanje jednadžbi oblika (1) se u općem slučaju svodi na rješavanje četiriju algebarskih jednadžbi:

- $f(x) = 0$. Ako je x_0 rješenje te jednadžbe, tada je x_0 istodobno i rješenje jednadžbe (1) ako je $g(x_0) > 0$ i $h(x_0) > 0$.
- $f(x) = 1$. Ako je x_0 rješenje te jednadžbe, tada je x_0 istodobno i rješenje jednadžbe (1) ako su funkcije g i h definirane za x_0.
- $f(x) = -1$. Ako je x_0 rješenje te jednadžbe, tada je x_0 rješenje i jednadžbe (1) ako su $g(x_0)$ i $h(x_0)$ cijeli brojevi jednake parnosti ili razlomci kojima je nazivnik neparan, a brojnik paran.
- $g(x) = h(x)$. Ako je x_0 rješenje te jednadžbe, tada je x_0 rješenje i jednadžbe (1) ako za x_0 jednadžba (1) ima smisla.

*III. gimnazija, Kamila Firingera 14, HR-31000 Osijek

Na taj način smo došli do svih rješenja jednadžbe (1).

Posebno, ako je $\big(f(x)\big)^{g(x)} = 1$, tada se problem svodi na rješavanje triju algebarskih jednadžbi:

- $f(x) = 1$. Ako je x_0 rješenje te jednadžbe, tada je x_0 istodobno i rješenje jednadžbe (1) ako je funkcija g definirana za x_0.
- $f(x) = -1$. Ako je x_0 rješenje te jednadžbe, tada je x_0 rješenje i jednadžbe (1) ako je $g(x_0)$ paran broj.
- $g(x) = 0$. Ako je x_0 rješenje te jednadžbe, tada je x_0 rješenje i jednadžbe (1) ako za x_0 jednadžba (1) ima smisla.

Sada riješimo nekoliko primjera takvih jednadžbi.
Zadatak 1. *Riješite jednadžbu*

$$(x-1)^{x^2+x-2} = (x-1)^{2x+4}.$$

Rješenje. Iz $x-1=0$ slijedi $x_1 = 1$. Kako je $g(x_1) = {x_1}^2 + x_1 - 2 = 0$, to x_1 nije rješenje dane jednadžbe.

Iz $x - 1 = 1$ slijedi $x_2 = 2$. Kako su funkcije $g(x) = x^2 + x - 2$ i $h(x) = 2x + 4$ definirane za x_2, to x_2 jest rješenje dane jednadžbe.

Iz $x - 1 = -1$ slijedi $x_3 = 0$. Kako je $g(x_3) = {x_3}^2 + x_3 - 2 = -2$ i $h(x_3) = 2x_3 + 4 = 4$, to su brojevi $g(x_3)$ i $h(x_3)$ iste parnosti, pa $x_3 = 0$ jest rješenje dane jednadžbe.

Ako je $x^2 + x - 2 = 2x + 4$, tada je $x^2 - x - 6 = 0$. Rješenja ove jednadžbe su $x_4 = 3, x_5 = -2$.

Dakle, $x \in \{-2, 0, 2, 3\}$.

Zadatak 2. *Riješite jednadžbu*

$$(x^2+x-57)^{3x^2+3} = (x^2+x-57)^{10x}.$$

Rješenje. Ako je $x^2+x-57 = 0$, tada je $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{229}}{2}$. Kako je za $x_1 = \frac{-1+\sqrt{229}}{2}$, $g(x_1) = 3x_1^2 + 3 > 0$ i $h(x_1) = 10x_1 > 0$, to je x_1 rješenje dane jednadžbe. No za $x_2 = \frac{-1-\sqrt{229}}{2}$ je $h(x_2) = 10x_2 < 0$, pa x_2 nije rješenje dane jednadžbe.

Ako je $x^2 + x - 57 = 1$, tada je $x^2 + x - 58 = 0$. Rješenja ove jednadžbe su $x_{3,4} = \frac{-1\pm\sqrt{233}}{2}$. Kako su funkcije $g(x) = 3x^2 + 3$ i $h(x) = 10x$ definirane za x_3 i x_4, to su x_3 i x_4 rješenja jednadžbe (1).

Ako je $x^2 + x - 57 = -1$, tada je $x^2 + x - 56 = 0$. Slijedi $x_5 = 7, x_6 = -8$. Kako je $g(x_5) = 3x_5^2 + 3 = 150$, a $h(x_5) = 10x_5 = 70$, to $x_5 = 7$ jest rješenje jednadžbe (1). No $g(x_6) = 3x_6^2 + 3 = 195$, a $h(x_6) = 10x_6 = -80$, pa su $g(x_6)$ i $h(x_6)$ različite parnosti i stoga $x_6 = -8$ nije rješenje jednadžbe (1).

Iz $3x^2 + 3 = 10x$ slijedi $3x^2 - 10x + 3 = 0$ i konačno $x_7 = 3, x_8 = \frac{1}{3}$.

Dakle, $x \in \{\frac{-1-\sqrt{233}}{2}, \frac{1}{3}, 3, 7, \frac{-1+\sqrt{229}}{2}, \frac{-1+\sqrt{233}}{2}\}$.

Zadatak 3. *Riješite jednadžbu*

$$\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}} = \sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}.$$

Rješenje. Zadanu jednadžbu zapišimo u obliku

$$|x-3|^{\frac{x+1}{4}} = |x-3|^{\frac{x-2}{3}}.$$

Ako je $|x-3| = 0$, tada je $x_1 = 3$. Kako je $g(x_1) = \frac{x_1+1}{4} = 1 > 0$ i $h(x_1) = \frac{x_1-2}{3} = \frac{1}{3} > 0$, to je x_1 rješenje dane jednadžbe.

Iz $|x-3| = 1$ slijedi $x_2 = 4$ i $x_3 = 2$. Kako su funkcije $g(x) = \frac{x+1}{4}$ i $h(x) = \frac{x-2}{3}$ definirane za x_2 i x_3, to su i x_2 i x_3 rješenja dane jednadžbe.

Ako je $\frac{x+1}{4} = \frac{x-2}{3}$, tada je $x_4 = 11$.

Dakle, $x \in \{2, 3, 4, 11\}$.

Zadatak 4. *Riješite jednadžbu*

$$(x^2 - x - 1)^{x^2-1} = 1.$$

Rješenje. Ako je $x^2 - x - 1 = 1$, tada je $x^2 - x - 2 = 0$, pa je $x_1 = 2$, $x_2 = -1$. Kako je funkcija $g(x) = x^2 - 1$ definirana za x_1 i x_2, to su x_1 i x_2 rješenja dane jednadžbe.

Iz $x^2 - x - 1 = -1$ slijedi $x^2 - x = 0$. Rješenja ove jednadžbe su $x_3 = 0$, $x_4 = 1$. Kako je $g(x_3) = {x_3}^2 - 1 = -1$ (neparan broj), a $g(x_4) = {x_4}^2 - 1 = 0$ (paran broj), to x_3 nije rješenje, a x_4 jest.

Ako je $x^2 - 1 = 0$, tada je $x_{5,6} = \pm 1$, a te smo vrijednosti već dobili kao rješenja dane jednadžbe.

Dakle, $x \in \{-1, 1, 2\}$.

Zadatak 5. *Riješite jednadžbu*

$$x^{x^2-5x+6} = 1.$$

Rješenje. Za $x_1 = 1$ je funkcija $g(x) = x^2 - 5x + 6$ definirana, pa je x_1 rješenje dane jednadžbe.

Za $x_2 = -1$ je $g(x_2) = x_2^2 - 5x_2 + 6 = 12$ paran broj, pa je i x_2 rješenje dane jednadžbe.

Ako je $x^2 - 5x + 6 = 0$, tada je $x_3 = 2$ i $x_4 = 3$. Kako za x_3 i x_4 zadana jednadžba ima smisla, to su i x_3 i x_4 rješenja dane jednadžbe.

Dakle, $x \in \{-1, 1, 2, 3\}$.

Zadatak 6. *Riješite jednadžbu*

$$|x-3|^{3x^2-10x+3} = 1.$$

Rješenje. Ako je $|x-3| = 1$, tada je $x_1 = 4$ i $x_2 = 2$. Kako je funkcija $g(x) = 3x^2 - 10x + 3$ definirana i za x_1 i za x_2, to su i x_1 i x_2 rješenja dane jednadžbe.

Ako je $3x^2 - 10x + 3 = 0$, tada je $x_3 = 3$ i $x_4 = \frac{1}{3}$. Za x_4 dana jednadžba ima smisla, pa je x_4 rješenje dane jednadžbe. Međutim, x_3 nije rješenje dane jednadžbe jer za x_3 dana jednadžba nema smisla.

Dakle, $x \in \{\frac{1}{3}, 2, 4\}$.

Zadaci za vježbu

1. Riješite jednadžbu $(x^2 - x - 1)^{x^2} = 1$.

Rez. $x \in \{-1, 0, 2\}$.

2. Riješite jednadžbu $|x|^{x^2-2x} = 1$.

Rez. $x \in \{-1, 1, 2\}$.

3. Riješite jednadžbu $(x-2)^{x^2-x} = (x-2)^{12}$.

Rez. $x \in \{-3, 1, 2, 3, 4\}$.

4. Riješite jednadžbu $(3x-4)^{2x^2+2} = (3x-4)^{5x}$.

Rez. $x \in \{\frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2\}$.

5. Riješite jednadžbu $(x^2 - 7x + 11)^{x^2+5x-6} = 1$.

Rez. $x \in \{-6, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

6. Riješite jednadžbu $|x-2|^{10x^2-1} = |x-2|^{3x}$.

Rez. $x \in \{-\frac{1}{5}, \frac{1}{2}, 1, 2, 3\}$.

7. Riješite jednadžbu $|x+2|^{x^2+3x} = |x+2|^{x+15}$.

Rez. $x \in \{-5, -3, -2, -1, 3\}$.

Literatura

[1] V. LITVINENKO, A. MORDOKOVICH, *Solving Problems in Algebra and Trigonometry*, Mir, Moscow, 1987.

[2] V. SCHARNITZKY, *Egyetemi felvételi feladatok matematikából, 1996–1998*, Nemzeti tankönyvkiadó, Budapest, 1999.