Nejednakosti na međunarodnim matematičkim olimpijadama

ILKO BRNETIĆ*

Sažetak. *Dokazivanje nejednakosti se u zadnje vrijeme vrlo često zadaje kao zadatak na međunarodnim matematičkim olimpijadama. U ovom članku dajemo pregled nekih takvih zadataka s međunarodnih matematičkih olimpijada.*

Ključne riječi: *Međunarodna matematička olimpijada, A-G nejednakost, nejednakost među sredinama, Cauchyeva nejednakost*

Inequalities at the International Mathematical Olympiad

Abstract. *Proving of inequalities has lately been very frequent task at the International Mathematical Olympiad. In this article we give an overview of some of those tasks from the International Mathematical Olympiad.*

Key words: *International Mathematical Olympiad, A-G inequality, inequality between medians, Cauchy's inequality*

1. Uvod

Na međunarodnim matematičkim olimpijadama zadaju se zadaci iz različitih područja matematike, a u zadnje vrijeme je uobičajena podjela na četiri područja; to su algebra, geometrija, teorija brojeva i logičko-kombinatorni zadaci (naravno, neki se zadaci mogu razvrstati u više područja). U početnim godinama dominirali su zadaci iz geometrije i algebre, dok je u zadnje vrijeme pravilo da od šest zadataka izabranih za olimpijsko natjecanje iz svakog područja bude barem jedan zadatak.

Među zadacima iz algebre, vrlo su česti dokazi raznih nejednakosti, osobito zadnjih godina. Primjerice, u zadnjih 10 godina je bilo zadano čak 8 nejednakosti. Pri tome treba reći da su se na olimpijadama javljale i nejednakosti i u zadacima koji nisu dominatno algebarskog karaktera, a najčešće se radilo o geometrijskim nejednakostima.

*Fakultet elektrotehnike i računarstva, Unska 3, HR-10000 Zagreb `ilko.brnetic@fer.hr`

U ovom ćemo članku dati izbor nekih zadataka iz nejednakosti zadavanih na matematičkim olimpijadama u kojima je naglasak na algebri.

U rješenjima zadataka služit ćemo se i poznatim nejednakostima. Zato ćemo najprije dati pregled nekih poznatih nejednakosti.

2. Pregled nekih osnovnih poznatih nejednakosti

Na početku navedimo poznate nejednakosti između osnovnih sredina harmonijske, geometrijske, aritmetičke i kvadratne. Za realne brojeve $a_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$ definiramo:

$$H(a_1, \ldots, a_n) = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}, \quad G(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n a_i},$$

$$A(a_1, \ldots, a_n) = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}, \quad K(a_1, \ldots, a_n) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{n}}.$$

Napišimo i nešto općenitije, težinske sredine. Uz uvjet $w_i > 0$ i $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, imamo:

$$H(a_1, \ldots, a_n, w_1, \ldots, w_n) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{w_i}{a_i}}, \quad G(a_1, \ldots, a_n, w_1, \ldots, w_n) = \prod_{i=1}^n a_i^{w_i},$$

$$A(a_1, \ldots, a_n, w_1, \ldots, w_n) = \sum_{i=1}^n w_i a_i, \quad K(a_1, \ldots, a_n, w_1, \ldots, w_n) = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i a_i^2}.$$

Uvrštavanjem $w_i = \frac{1}{n}, i = 1, \ldots, n$, iz općenitijih težinskih sredina dobivamo "standardne" sredine koje smo prethodno definirali.

Uz tako definirane sredine vrijedi

$$\begin{aligned} H(a_1, \ldots, a_n, w_1, \ldots, w_n) &\leq G(a_1, \ldots, a_n, w_1, \ldots, w_n) \\ &\leq A(a_1, \ldots, a_n, w_1, \ldots, w_n) \\ &\leq K(a_1, \ldots, a_n, w_1, \ldots, w_n), \end{aligned}$$

uz jednakosti ako i samo ako je $a_1 = \cdots = a_n$.

Često koristimo i Cauchyevu nejednakost.

Cauchyeva nejednakost. *Ako su a_i, b_i, $i = 1, \ldots, n$ realni brojevi, onda vrijedi:*

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2 \right).$$

Pri tome jednakost vrijedi onda i samo onda ako su vektori $(a_1, \ldots, a_n)$ i $(b_1, \ldots, b_n)$ proporcionalni.

Dokaz Cauchyeve nejednakosti može se pronaći u [1].

Koristit ćemo i "rearrangement inequality" (monotono preuređenje vektora i pripadna nejednakost), čiji se dokaz može naći u [4] ili [6].

Rearrangement inequality *Ako su* $a_1, \ldots, a_n$ *i* $b_1, \ldots, b_n$ *nizovi realnih brojeva takvi da je* $a_1 \le \ldots \le a_n$ *i* $b_1 \le \ldots \le b_n$ *ili* $a_1 \ge \ldots \ge a_n$ *i* $b_1 \ge \ldots \ge b_n$*, tada je*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ge \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)} \ge \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i},$$

za svaku permutaciju $\sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}$.

Pomoću prve od te dvije nejednakosti lagano se dokazuje Čebiševljeva nejednakost (vidi [4] ili [6]).

Čebiševljeva nejednakost *Ako je* $a_1 \le \ldots \le a_n$ *i* $b_1 \le \ldots \le b_n$ *ili* $a_1 \ge \ldots \ge a_n$ *i* $b_1 \ge \ldots \ge b_n$*, tada je*

$$n\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ge \big(\sum_{i=1}^{n} a_i\big) \cdot \big(\sum_{i=1}^{n} b_i\big) \ge n\sum_{i=1}^{n} a_i b_{n+1-i}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a_1 = ... = a_n$ *ili* $b_1 = ... = b_n$.

U primjenama se vrlo često uzima $\alpha_i = \frac{1}{n}, i = 1, \ldots, n$.

Navedimo i vrlo važnu Jensenovu nejednakost.

Jensenova nejednakost *Ako je* f *strogo konveksna funkcija na intervalu* (a, b)*, onda vrijedi*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(x_i),$$

za sve $\alpha_i \ge 0$, $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ *i* $x_i \in (a, b)$ *pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je* $x_1 = \ldots = x_n$. *U slučaju da je* f *strogo konkavna, vrijedi obratna nejednakost.*

U primjenama se vrlo često uzima $\alpha_i = \frac{1}{n}, i = 1, \ldots, n$.

Primjenom Jensenove nejednakosti, možemo, između ostalog dokazati i nejednakosti između potencijalnih sredina (vidi primjerice [7]); naime, uz

$$M_p(x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^p\right)^{\frac{1}{p}}, p \ne 0,$$

i $M_0(x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_n) = G(x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_n)$, za $t < s$ vrijedi da je

$$M_t(x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_n) \le M_s(x_1, \ldots, x_n, w_1, \ldots, w_n),$$

uz jednakost ako i samo ako je $x_1 = \ldots = x_n$.

3. Primjeri nekih nejednakosti zadanih na međunarodnim matematičkim olimpijadama

- Nejednakost je na matematičkim olimpijadama prvi put zadana 1961. godine u Mađarskoj. Radilo se o geometrijskoj nejednakosti u kojoj je težina zadatka ipak u algebarskom dijelu. Trebalo je, naime, dokazati da za trokut sa stranicama a, b i c te ploštinom S vrijedi

$$a^2 + b^2 + c^2 \ge 4S\sqrt{3}.$$

Trebalo je ispitati i kada u gornjoj nejednakosti vrijedi jednakost.

Riješimo taj zadatak. Napišimo najprije Heronovu formulu za ploštinu trokuta

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)}.$$

Zbog toga što su a, b i c duljine stranica trokuta, ti su brojevi pozitivni, a vrijedi i nejednakost trokuta, pa su svi faktori pod korijenom pozitivni.

Sada, koristeći nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine (A-G nejednakost), te aritmetičke i kvadratne sredine (A-K nejednakost) imamo

$$\begin{aligned} 4S &\leq \sqrt{(a+b+c)\left(\frac{a+b-c+a-b+c+a-b+c-a+b+c}{3}\right)^3} \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{3\sqrt{3}} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

Zainteresirani čitatelj može u [4] (str. 171-174) pročitati i druge dokaze ove nejednakosti, te dokaz pooopćenja ove nejednakosti (Hadwiger-Finsler (1937)): Za trokut sa stranicama a, b i c i ploštinom S vrijedi

$$a^2+b^2+c^2 \geq 4S\sqrt{3} + (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2,$$

pri čemu jednakost vrijedi ako i samo ako je $a = b = c$.

- Potom preskačemo čak 22 godine, iako su u međuvremenu u nekoliko navrata na olimpijadama bile zadavane nejednakosti. Godine 1983. na Olimpijadi u Parizu, bio je zadan sljedeći zadatak:

  Neka su a, b i c duljine stranica nekog trokuta. Dokaži

  $$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0.$$

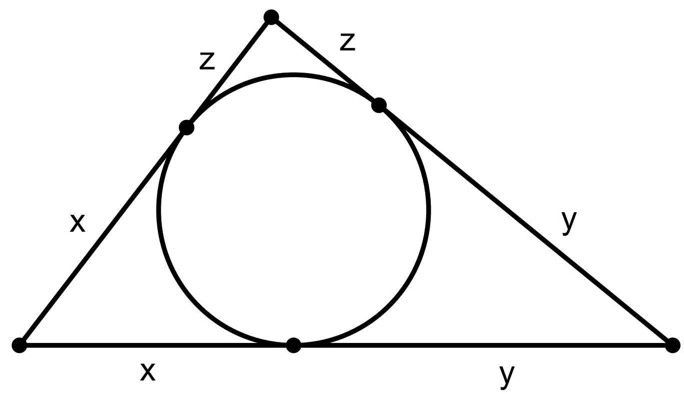
  Kada vrijedi jednakost ?

  Opet se radi o zadatku koji ima geometrijski okvir. U prethodnom primjeru također smo imali nejednakost sa stranicama trokuta. Tamo smo koristili činjenicu da su stranice trokuta pozitivni brojevi za koje vrijedi nejednakost trokuta. U ovom ćemo zadatku koristiti sljedeće: za svaki trokut sa stranicama duljine a, b i c uvijek se mogu odabrati pozitivni brojevi x, y, z takvi da je $a = x+y, b = y+z, c = z+x$ (ovi brojevi se dobivaju podjelom stranica trokuta točkama dodira upisane kružnice, vidi *Sliku 1*).

  Tada, nakon sređivanja, polazna nejednakost prelazi u sljedeću:

  $$x^3z + y^3x + z^3y \geq xyz(x+y+z). \tag{1}$$

  Nejednakost (1) možemo dokazati monotonim preuređenjem vektora ("rearrangement inequality"). Primijetimo da cikličkom permutacijom varijabli



Slika 1: Trokut sa stranicama a, b, c

x, y, z dobivamo identičnu nejednakost, a necikličkom dobivamo istovjetnu nejednakost (uz cikličku zamjenu varijabli). Zato, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x \leq y \leq z$. Tada je $x^2 \leq y^2 \leq z^2$ i $xy \leq xz \leq yz$, pa vrijedi

$$x^2xz + y^2xy + z^2yz \geq x^2yz + y^2xz + z^2xy.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako je $x = y = z$, t.j. $a = b = c$. Primijetimo da nejednakost (1) vrijedi ne samo za pozitivne, već za sve realne brojeve.

Nejednakost (1) možemo dokazati i korištenjem Cauchyeve nejednakosti:

$$\left((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 + (\sqrt{z})^2\right) \cdot \left((\sqrt{yz^3})^2 + (\sqrt{zx^3})^2 + (\sqrt{xy^3})^2\right)$$

$$\geq \left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{yz^3} + \sqrt{y} \cdot \sqrt{zx^3} + \sqrt{z} \cdot \sqrt{xy^3}\right)^2,$$

odakle dijeljenjem s $x+y+z$ slijedi tražena nejednakost. Jednakost u Cauchyevoj nejednakosti vrijedi ako i samo ako je $\frac{xy^3}{z} = \frac{yz^3}{x} = \frac{zx^3}{y}$, tj. $x = y = z$, odnosno $a = b = c$.

Polaznu nejednakost možemo dokazati i tako da izraz na lijevoj strani nejednakosti transformiramo u:

$$\frac{1}{2}\big((a+b-c)(a-b+c)(c-a)^2 + (b+c-a)(b-c+a)(b-a)^2$$

$$+(c+a-b)(c-a+b)(c-b)^2\big),$$

što je (koristimo nejednakost trokuta) očito nenegativno.

Bernhard Leeb iz Njemačke, natjecatelj na Olimpijadi je, koristeći da je polazna nejednakost invarijantna na cikličke permutacije, bez smanjenja općenitosti pretpostavio $a \geq b, a \geq c$ i na malo je drugačiji način transformirao lijevu stranu nejednakosti u zbroj nenegativnih brojeva:

$$a(b-c)^2(b+c-a)+b(a-b)(a-c)(a+b-c)$$

i za to je dobio specijalnu nagradu.

- Godinu dana kasnije, na Olimpijadi 1984. u Pragu, trebalo je dokazati sljedeću nejednakost:

  Neka su $x,\ y,\ z \geq 0$ takvi da je $x+y+z=1$. Dokaži

  $$0 \leq xy+yz+zx-2xyz \leq \frac{7}{27}.$$

  Navedimo i rješenje. Iz uvjeta $x, y, z \geq 0$ i $x+y+z=1$ slijedi $x, y, z \in [0,1]$, pa imamo

  $$xy+yz+zx-2xyz = xy(1-z)+yz(1-x)+zx \geq 0,$$

  čime smo dokazali lijevu stranu nejednakosti.

  Za $x, y, z \in [0, \frac{1}{2}]$ desnu stranu nejednakosti možemo dokazati primjenom A-G nejednakosti:

  $$\big(\frac{1}{2}-x\big)\big(\frac{1}{2}-y\big)\big(\frac{1}{2}-z\big) \leq \left(\frac{1}{3}\left(\big(\frac{1}{2}-x\big)+\big(\frac{1}{2}-y\big)+\big(\frac{1}{2}-z\big)\right)\right)^3,$$

  odakle korištenjem uvjeta $x+y+z=1$ slijedi tražena nejednakost.

  Ako su dva od tri broja $\frac{1}{2}-x, \frac{1}{2}-y, \frac{1}{2}-z$ veća od 0, nejednakost pogotovo vrijedi, a slučaj da je najviše jedan od tih brojeva manji od 0 se ne može dogoditi zbog uvjeta $x, y, z \geq 0$ i $x+y+z=1$.

- Opet ćemo uraditi veći vremenski preskok, ovog puta od 11 godina. Godine 1995. na Olimpijadi u Torontu bio je zadan sljedeći zadatak:

  Neka su a, b, c pozitivni brojevi za koje vrijedi $abc=1$. Dokaži da vrijedi

  $$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geq \frac{3}{2}.$$

  Ključni korak u dokazivanju je uvođenje novih varijabli $x=\frac{1}{a}$, $y=\frac{1}{b}$, $z=\frac{1}{c}$. Tada vrijedi $xyz=1$, a polazna nejednakost prelazi u

  $$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y} \geq \frac{3}{2}. \tag{2}$$

  Nejednakost (2) možemo dokazati na više načina:

Prvi dokaz.

Koristimo Cauchyevu nejednakost:

$$\Big((\sqrt{y+z})^2+(\sqrt{z+x})^2+(\sqrt{x+y})^2\Big)\cdot\Big(\big(\frac{x}{\sqrt{y+z}}\big)^2+\big(\frac{y}{\sqrt{z+x}}\big)^2+\big(\frac{z}{\sqrt{x+y}}\big)^2\Big)$$
$$\geq (x+y+z)^2,$$

odnosno

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{x+y+z}{2}. \tag{3}$$

a potom korištenjem A-G nejednakosti i uvjeta $xyz=1$ dobivamo (2).

Drugi dokaz.

Nejednakost (2) možemo dokazati i monotonim preuređenjem vektora. Naime, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $x\geq y\geq z$. Tada je i $x^2\geq y^2\geq z^2$, te $\frac{1}{y+z}\geq\frac{1}{z+x}\geq\frac{1}{x+y}$, pa vrijedi

$$x^2\cdot\frac{1}{y+z}+y^2\cdot\frac{1}{z+x}+z^2\cdot\frac{1}{x+y}\geq x^2\cdot\frac{1}{x+y}+y^2\cdot\frac{1}{y+z}+z^2\cdot\frac{1}{z+x}$$

i

$$x^2\cdot\frac{1}{y+z}+y^2\cdot\frac{1}{z+x}+z^2\cdot\frac{1}{x+y}\geq x^2\cdot\frac{1}{z+x}+y^2\cdot\frac{1}{x+y}+z^2\cdot\frac{1}{y+z}$$

Zbrajanjem ovih dviju nejednakosti dobivamo

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}\geq\frac{1}{2}\Big(\frac{x^2+y^2}{x+y}+\frac{y^2+z^2}{y+z}+\frac{z^2+x^2}{z+x}\Big).$$

Sada koristimo nejednakost $\frac{x^2+y^2}{x+y}\geq\frac{x+y}{2}$ (koja slijedi primjerice iz Čebiševljeve nejednakosti ili, sasvim elementarno, ona je ekvivalentna s $(x-y)^2\geq 0$). Time dobivamo (3), a onda (2) slijedi iz A-G nejednakosti i uvjeta $xyz=1$.

Treći dokaz. Neka je $x+y+z=s$. Privremeno fiksirajmo s. Uočimo i da je $s\geq 3\sqrt[3]{xyz}=3$. Kako je $\frac{x^2}{y+z}=\frac{x^2}{s-x}$, promatrajmo funkciju

$$f(x)=\frac{x^2}{s-x}.$$

Lako je pokazati da je $f''(x)>0$ za $x\in<0,s>$; dakle, f je strogo konveksna na $<0,s>$. Primjenom Jensenove nejednakosti

$$\frac{f(x)+f(y)+f(z)}{3}\geq f\big(\frac{x+y+z}{3}\big),$$

dobivamo

$$\frac{x^2}{y+z}+\frac{y^2}{z+x}+\frac{z^2}{x+y}=\frac{x^2}{s-x}+\frac{y^2}{s-y}+\frac{z^2}{s-z}$$

$$\geq 3 \cdot \frac{\left(\frac{x+y+z}{3}\right)^2}{s - \frac{x+y+z}{3}} = \frac{s}{2} \geq \frac{3}{2}.$$

Za svaki čvrsti s nejednakost vrijedi, pa vrijedi i općenito.

Na ovaj su način u članku [5] ovu nejednakost dokazali Pečarić i van der Hoek.

- Na Olimpijadi 1999. u Bukureštu bio je zadan sljedeći, dosta zahtjevan zadatak:

  Neka je $n \geq 2$ dani cijeli broj.

  a) Odredite najmanju konstantu C takvu da nejednakost

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C\Big(\sum_{1\leq i\leq n} x_i\Big)^4,$$

  vrijedi za sve realne brojeve $x_1, \ldots, x_n \geq 0$.

  b) Za ovu konstantu C odrediti kada vrijedi jednakost.

  Skicirajmo rješenje zadatka.

  Dana nejednakost je simetrična, pa možemo pretpostaviti da je $x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_n \geq 0$. Dodatno, ona je homogena, pa možemo pretpostaviti da je $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. U ovom slučaju treba maksimizirati zbroj

$$F(x_1, ..., x_n) = \sum_{i<j} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2).$$

  Zamjenom vektora $x = (x_1, ..., x_{k-1}, x_k, x_{k+1}, 0, ..., 0)$ sa $x' = (x_1, ..., x_{k-1}, x_k + x_{k+1}, 0, 0, ..., 0)$, $k \geq 2$, povećava se ili ostaje jednaka vrijednost od F (račun ostavljamo čitatelju), pa je

$$\begin{aligned} F(x_1, ..., x_n) &\leq F(x_1, 1-x_1, 0, ..., 0) \\ &= \frac{1}{2}(2x_1(1-x_1))(1-2x_1(1-x_1)) \\ &\leq \frac{1}{8} = F(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, ..., 0). \end{aligned}$$

  Dakle, konstanta C je jednaka $\frac{1}{8}$ i jednakost vrijedi ako i samo ako su dva x_i jednaka (pa čak i jednaka 0), a preostali su jednaki 0.

- Prve godine u novom tisućljeću, 2001., domaćin je bio Washington. Na toj Olimpijadi trebalo je dokazati da je

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$

  za sve $a, b, c > 0$.

  Navedimo nekoliko dokaza te nejednakosti.

  Prvi dokaz.

Najprije ćemo dokazati da je

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} \geq \frac{a^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}} \tag{4}$$

ili ekvivalentno

$$(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2 \geq a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc).$$

Naime, primjenom A-G nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned}(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2-(a^{\frac{4}{3}})^2 &= (b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})\cdot(a^{\frac{4}{3}}+a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})\\ &\geq 2b^{\frac{2}{3}}\cdot c^{\frac{2}{3}}\cdot 4a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}c^{\frac{1}{3}}=8a^{\frac{2}{3}}bc,\end{aligned}$$

pa je, prema tome,

$$(a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}})^2 \geq (a^{\frac{4}{3}})^2+8a^{\frac{2}{3}}bc = a^{\frac{2}{3}}(a^2+8bc).$$

Potpuno analogno kao i nejednakost (4), dokazujemo i dvije analogne nejednakosti

$$\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} \geq \frac{b^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}},$$

$$\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq \frac{c^{\frac{4}{3}}}{a^{\frac{4}{3}}+b^{\frac{4}{3}}+c^{\frac{4}{3}}}.$$

Zbrajanjem (4) i gornje dvije nejednakosti slijedi tražena nejednakost.

Drugi dokaz.

Kako je nejednakost homogena, možemo pretpostaviti da je $a+b+c=1$. (naime, ako je $a+b+c=s$, tada za $x=\frac{a}{s}$, $y=\frac{b}{s}$ i $z=\frac{c}{s}$, slijedi $x+y+z=1$ i $\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+8yz}}$).

Funkcija

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}},$$

je strogo konveksna na $<0,\infty>$, jer je $f''(x)=\frac{3}{4}x^{-\frac{5}{2}}\geq 0$ za $x\geq 0$, pa primjenom Jensenove nejednakosti

$$af(a^2+8bc)+bf(b^2+8ac)+cf(c^2+8ab)\geq f(a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)),$$

dobivamo

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$$
$$\geq \frac{1}{\sqrt{a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)}},$$

te je dovoljno dokazati da vrijedi

$$\frac{1}{\sqrt{a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)}}\geq 1,$$

tj.

$$1-\big(a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)\big)\geq 0.$$

Sada iskoristimo pretpostavljeni uvjet $a+b+c=1$ kako bismo homogenizirali nejednakost:

$$(a+b+c)^3-\big(a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)\big)\geq 0.$$

Nakon sređivanja konačno dobivamo

$$3\big(a(b-c)^2+b(c-a)^2+c(a-b)^2\big)\geq 0.$$

Treći dokaz.

Danu nejednakost napišimo u ekvivalentnom obliku

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8bc}{a^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8ca}{b^2}}}+\frac{1}{\sqrt{1+\frac{8ab}{c^2}}}\geq 1,$$

odakle supstitucijom $x=\frac{8bc}{a^2}$, $y=\frac{8ca}{b^2}$, $z=\frac{8ab}{c^2}$, dobivamo nejednakost

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}}+\frac{1}{\sqrt{1+y}}+\frac{1}{\sqrt{1+z}}\geq 1$$

uz uvjet $xyz=512$.

Svođenjem na zajednički nazivnik, kvadriranjem i sređivanjem dobivamo nejednakost

$$x+y+z+2\sqrt{1+x}\cdot\sqrt{1+y}\cdot\sqrt{1+z}\cdot(\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}+\sqrt{1+z})\geq 510. \quad (5)$$

Korištenjem A-G nejednakosti i uvjeta $xyz=512$ dobivamo sljedeće tri nejednakosti:

$$x+y+z\geq 24,$$

$$(1+x)(1+y)(1+z)\geq 729,$$

$$\sqrt{1+x}+\sqrt{1+y}+\sqrt{1+z}\geq 9,$$

odakle slijedi (5).

Četvrti dokaz.

Iako nejednakost nije bilo jednostavno dokazati, bio je prilično veliki broj različitih rješenja. Navedimo i rješenje hrvatskog predstavnika, Tončija Antunovića, koji je na toj Olimpijadi osvojio srebrnu medalju. On je koristio nejednakost između težinske aritmetičke sredine (sredine reda 1) i težinske sredine reda -2:

$$\frac{\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}}{a+b+c}$$

$$\geq \left(\frac{a+b+c}{a(a^2+8bc)+b(b^2+8ca)+c(c^2+8ab)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Opet možemo pretpostaviti $a+b+c=1$, nakon čega se gornja nejednakost svodi na

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}}$$

$$\geq \left(\frac{1}{a^3+b^3+c^3+24abc} \right)^{\frac{1}{2}},$$

pa je dovoljno dokazati

$$a^3+b^3+c^3+24abc \leq 1 = (a+b+c)^3,$$

što se lagano dokazuje primjenom A-G nejednakosti.

Na kraju napomenimo da se, korištenjem ideje drugog dokaza spomenuta nejednakost može poopćiti. Vrijedi naime

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+\lambda bc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2+\lambda ca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2+\lambda ab}} \geq \frac{3}{\sqrt{1+\lambda}},$$

za sve $a, b, c > 0$ i $\lambda \geq 8$. Dokaz te općenitije tvrdnje zainteresirani čitatelj može naći u [2].

- Na Olimpijadi 2005. godine u Meridi, u Meksiku, bio je zadan sljedeći zadatak:

Neka su x, y, $z > 0$ takvi da je $xyz \geq 1$. Dokaži da je

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} + \frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2} + \frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geq 0.$$

Zadatak nije bio baš uspješno riješen, iako omogućava relativno standardni pristup rješavanja - nejednakost se najprije homogenizira, a potom se dokazuje uz pomoć A-G i Muirheadove nejednakosti (Muirheadovu nejednakost možete naći npr. u [3]). Tako je zadatak riješio i hrvatski predstavnik, Goran Dražić, koji je na toj Olimpijadi osvojio srebrnu medalju. Druga dva načina dokazivanja nejednakosti mogu se naći u [2]. No, ovaj smo zadatak uvrstili zbog naročito lijepog i jednostavnog rješenja Iurea Boreica iz Moldavije, jednog od najuspješnijih natjecatelja na olimpijadama uopće (ukupno je osvojio tri zlatne i dvije srebrne medalje).

Navodimo rješenje Iurea Boreica, koji je za to rješenje nagrađen specijalnom nagradom:

Najprije uočimo:

$$\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2} - \frac{x^5-x^2}{x^3(x^2+y^2+z^2)} = \frac{(x^3-1)^2x^2(y^2+z^2)}{x^3(x^2+y^2+z^2)(x^5+y^2+z^2)} \geq 0.$$

Nadalje slijedi

$$\begin{aligned}\frac{x^5-x^2}{x^5+y^2+z^2}+\frac{y^5-y^2}{y^5+z^2+x^2} &+ \frac{z^5-z^2}{z^5+x^2+y^2} \geq \\ &\geq \frac{1}{x^2+y^2+z^2}\left(x^2-\frac{1}{x}+y^2-\frac{1}{y}+z^2-\frac{1}{z}\right) \\ &\geq \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(x^2-yz+y^2-xz+z^2-xy) \\ &\geq 0.\end{aligned}$$

- Vjerojatno najteži zadatak iz nejednakosti bio je onaj zadan 2006., na Olimpijadi u Ljubljani:

  Odredi najmanji M tako da nejednakost

  $$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2$$

  vrijedi za sve realne brojeve a, b i c.

  Skicirajmo rješenje zadatka.

  Najprije se može pokazati da vrijedi

  $$|ab(a^2-b^2)+bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)| = |(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)|,$$

  pa je potrebno naći najmanji M tako da vrijedi

  $$|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \leq M(a^2+b^2+c^2)^2.$$

  Ova je nejednakost invarijantna na sve permutacije, pa možemo pretpostaviti da je $a \leq b \leq c$. Tada je

  $$|(a-b)(b-c)| = (b-a)(c-b) \leq \left(\frac{(b-a)+(c-b)}{2}\right)^2 = \frac{(c-a)^2}{4}.$$

  Također je i

  $$\left(\frac{(c-b)+(b-a)}{2}\right)^2 \leq \frac{(c-b)^2+(b-a)^2}{2},$$

  odnosno ekvivalentno

  $$3(c-a)^2 \leq 2((b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2).$$

  Sada imamo

  $$\begin{aligned}&|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \leq \\ &\quad\leq \frac{1}{4}|(c-a)^3(a+b+c)| \\ &\quad= \frac{1}{4}\sqrt{(c-a)^6(a+b+c)^2} \\ &\quad\leq \frac{1}{4}\sqrt{\left(\frac{2((b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2)}{3}\right)^3 \cdot (a+b+c)^2} \\ &\quad= \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt[4]{\left(\frac{(b-a)^2+(c-b)^2+(c-a)^2}{3}\right)^3 \cdot (a+b+c)^2}\right)^2.\end{aligned}$$

Odavde iz težinske A-G nejednakosti slijedi

$$\begin{aligned}
&|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \leq \\
&\quad \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\frac{(b-a)^2 + (c-b)^2 + (c-a)^2 + (a+b+c)^2}{4} \right)^2 \\
&\quad = \frac{9\sqrt{2}}{32} (a^2+b^2+c^2)^2.
\end{aligned}$$

Analizirajući slučajeve kada se postižu jednakosti dobivamo da je to za $a = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}$, $b = 1$ i $a = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$. Traženi M je $\frac{9\sqrt{2}}{32}$.

- I na ovogodišnjoj Olimpijadi održanoj u Madridu bila je zadana nejednakost:

  a) Dokaži nejednakost

$$\frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{x^2}{(x-1)^2} + \frac{x^2}{(x-1)^2} \geq 1$$

za realne brojeve $x, y, z \neq 1$ koji zadovoljavaju uvjet $xyz = 1$.

b) Pokaži da ima beskonačno mnogo trojki racionalnih brojeva x, y, z za koje u gornjoj nejednakosti vrijedi jednakost.

U ovom ćemo članku prikazati rješenje samo a) dijela zadatka i to na dva načina.

Prvi dokaz.

Uvedimo supstituciju

$$a = \frac{x}{x-1},\ b = \frac{y}{y-1},\ c = \frac{z}{z-1},$$

odnosno

$$x = \frac{a}{a-1},\ y = \frac{b}{b-1},\ z = \frac{c}{c-1}.$$

Sada treba dokazati nejednakost $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$ uz uvjet

$$(a-1)(b-1)(c-1) = abc.$$

Gornji uvjet je ekvivalentan redom s

$$\begin{aligned}
a+b+c-1 &= ab+bc+ca, \\
2(a+b+c-1) &= (a+b+c)^2 - (a+b+c)^2, \\
a^2+b^2+c^2-2 &= (a+b+c)^2 - 2(a+b+c), \\
a^2+b^2+c^2-1 &= (a+b+c-1)^2,
\end{aligned}$$

pa vrijedi i $a^2 + b^2 + c^2 \geq 1$.

Drugi dokaz.

Stavimo $z = \frac{1}{xy}$ i nakon sređivanja dobivamo

$$(xy-1)^2(x^2(y-1)^2+y^2(x-1)^2)+(x-1)^2(y-1)^2 \geq (x-1)^2(y-1)^2(xy-1)^2.$$

Uvođenjem $p = x+y$ i $q = xy$ nakon sređivanja (ima dosta posla !) dobivamo

$$q^4 - 6q^3 + 2pq^2 + 9q^2 - 6pq + p^2 = (q^2 - 3q + p)^2 \geq 0.$$

Literatura

[1] J. PEČARIĆ, *Nejednakosti*, HMD i Element, Zagreb, 1996.

[2] Ž. HANJŠ, *Međunarodne matematičke olimpijade*, Element, Zagreb 2006.

[3] D. ĐUKIĆ, V. JANKOVIĆ, I. MATIĆ, N. PETROVIĆ, *The IMO Compendium*, Springer 2006.

[4] A. ENGEL, *Problem-Solving Strategies*, Springer, 1998.

[5] J. PEČARIĆ, J. VAN DER HOEK, *An interesting inequality at the I.M.O.*, Rad HAZU, **13**(1997), 95–100.

[6] ILKO BRNETIĆ, *Monotona preuređenja vektora i pridružene nejednakosti*, Zbornik radova, Šesti kongres nastavnika matematike, HMD 2002., 40–44.

[7] ILKO BRNETIĆ, *Jensenova nejednakost i potencijalne sredine*, Bilten Seminara iz matematike za nastavnike-mentore, HMD i MZOŠ, 2008, 29–40.