UDK 528.9:528.1
Izvorni znanstveni članak / Original scientific paper

# O faktoru lokalnog mjerila duljina uzduž paralela kod konusnih kartografskih projekcija

**Miljenko LAPAINE – Zagreb**[1]

*SAŽETAK. Faktor lokalnog mjerila duljina k za konusne projekcije je funkcija geodetske, odnosno geografske širine . Za razliku od tvrdnji iz literature, ta funkcija ne mora imati nijedan, a može imati jedan ili više lokalnih minimuma. Nadalje, izrazi koji vode na lokalni minimum funkcije k u literaturi redovito se izvode za pojedine konusne projekcije. Za razliku od takvog pristupa, u ovom se članku izvode izrazi koji su neovisni o vrsti konusne projekcije i koji se mogu primijeniti na bilo koju konusnu projekciju: konformnu, ekvivalentnu, ekvidistantnu, perspektivnu ili neku drugu.*

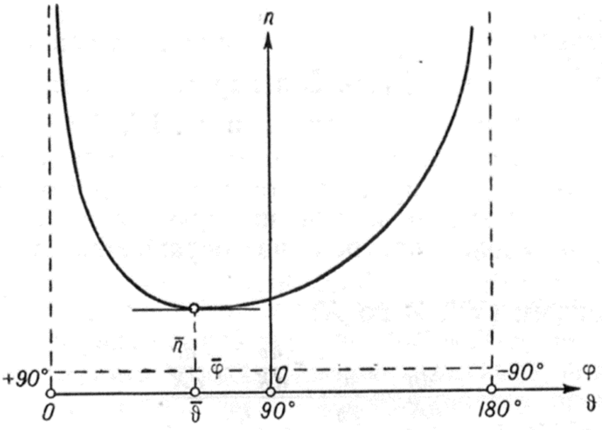
*Ključne riječi: konusne projekcije, faktor lokalnog mjerila duljina uzduž paralela.*

## 1. Uvod

Raspored deformacija pri uspravnim konusnim projekcijama ovisi o geodetskoj, odnosno geografskoj širini. Prema našem saznanju o razdiobi distorzija kod konusnih projekcija općenito, dakle ne u posebnim slučajevima kao što su konformne, ekvivalentne ili ekvidistantne, jedino je pisao Kavrajskij (1959) i to pogrešno. Prema njemu, graf koji prikazuje faktor lokanog mjerila duljina uzduž paralela u konusnim projekcijama kao funkciju geografske širine izgleda kao na slici 1. Kavrajskij rabi oznaku $n$ za lokalni faktor mjerila duljina uzduž paralela, dok je u ovom članku oznaka za tu funkciju $k$.

Kavrajskij (1959) zaključuje da faktor lokalnog mjerila duljina uzduž paralela ima jedinstveni ekstrem i da je za odluku je li to minimum ili maksimum dovoljno gledati predznak druge derivacije te funkcije. No, prema njemu, još je jednostavnije uočiti da se polovi preslikavaju u neke paralele, pa je za te paralele $k$ beskonačno velik. Prema tome, zaključuje Kavrajskij, jedinstveni ekstrem može biti samo minimum.

[1] prof. emer. dr. sc. Miljenko Lapaine, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Kačićeva 26, HR-10000 Zagreb, Hrvatska, e-mail: miljenko.lapaine@geof.unizg.hr



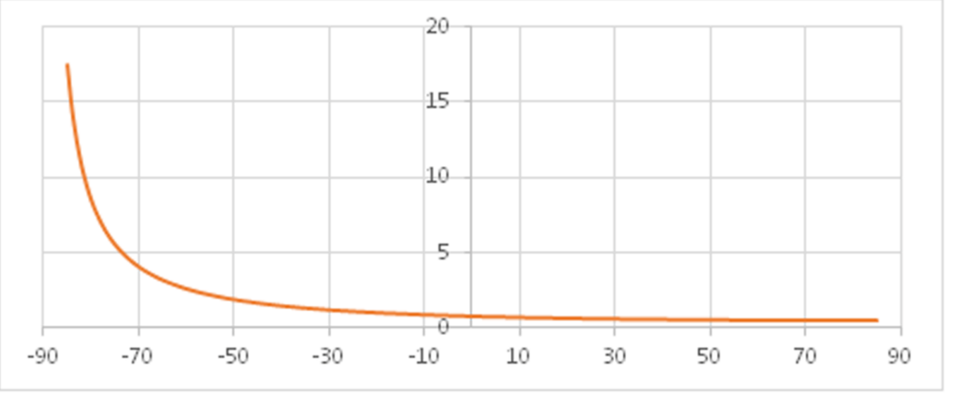

Slika 1. *Graf promjene veličine faktora lokalnog mjerila duljina uzduž paralela u konusnim projekcijama prema Kavrajskom (Каврайский 1959, str. 12). U ovom članku pokazujemo da nije uvijek tako (slike 2–4).*

Podsjetimo se: maksimum i minimum neke funkcije $y = f(x)$ definirane na intervalu $[a, b]$ zovu se jednim imenom ekstremne vrijednosti funkcije. Funkcija $y = f(x)$ može poprimiti više ekstremnih vrijednosti. Ako je vrijednost $f(x_0)$ veća (ili u slučaju minimuma manja) od svih dovoljno bliskih susjednih vrijednosti funkcije, govori se o lokalnom ekstremu. Funkcija može imati ekstremnu vrijednost i na krajevima intervala. Tada se uspoređuju vrijednosti $f(a)$ i $f(b)$ samo s vrijednostima što ih funkcija prima desno od $a$ i lijevo od $b$.

Nužan uvjet da funkcija s derivacijom u točki $x_0$ ima u toj točki ekstrem glasi $f'(x_0) = 0$. Za dovoljan uvjet potrebno je uvrstiti rješenje jednadžbe $f'(x_0) = 0$ u više derivacije. Ako je prva od tih derivacija koja se ne poništava u $x_0$ parnog reda, funkcija ima ekstrem i to minimum ako je ta derivacija pozitivna, a maksimum ako je negativna. Ako je prva od viših derivacija koja je u točki $x_0$ različita od nule neparnog reda, onda funkcija u toj točki nema ekstrema.

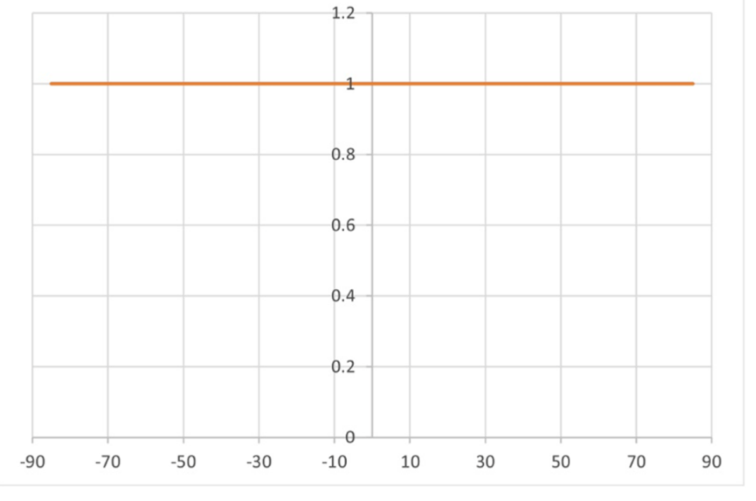
Napose treba istražiti ima li funkcija ekstremnu vrijednost na krajevima intervala $[a, b]$. Isto tako treba posebno istražiti točke u kojima funkcija ili nema derivacije ili derivacija nije konačna (Marković 1961).

Na nekoliko primjera pokazat ćemo da graf funkcije $k = k(\varphi)$ za konusne projekcije može izgledati drukčije od onoga prikazanog na slici 1.



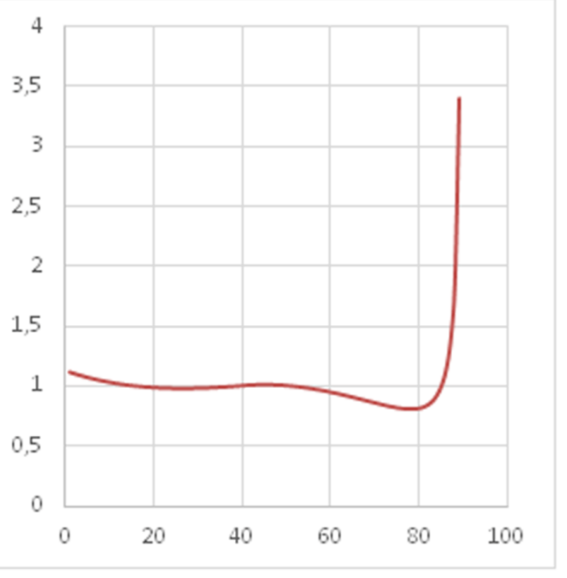

Slika 2. *Graf funkcije* $k(\varphi) = \frac{\rho}{2\cos\varphi}$, *za* $\rho = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. *Funkcija* $k = k(\varphi)$ *nema lokalni minimum.*

Na slici 2 prikazan je graf funkcije $k(\varphi) = \frac{\rho}{2\cos\varphi}$, za $\rho = \frac{\pi}{2} - \varphi$, $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Nije teško vidjeti da je $\frac{dk}{d\varphi}(\varphi_0) = 0$ za $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, a $\rho(\varphi_0) = \rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. Funkcija $k(\varphi) = \frac{\rho}{2\cos\varphi}$ nije definirana za $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ i $\varphi = \frac{\pi}{2}$.




Slika 3. *Graf funkcije* $k(\varphi) = \frac{\rho}{2\cos\varphi} = 1$, *za* $\rho = 2\cos\varphi$, $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. *Funkcija* $k(\varphi) = 1$ *je konstantna, nema lokalni minimum.*

Na slici 3 prikazan je graf funkcije $k(\varphi) = \frac{\rho}{2\cos\varphi} = 1$, za $\rho = 2\cos\varphi$, $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. $\frac{dk}{d\varphi}(\varphi_0) = 0$ za svaki $\varphi_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, a isto vrijedi i za drugu derivaciju funkcije $k(\varphi) = 1$. Derivacije nam nisu potrebne da bismo zaključili da je funkcija $k(\varphi) = 1$ konstantna, nema lokalni minimum, ni maksimum.




Slika 4. *Funkcija* $k(\varphi) = \frac{\rho}{2\cos\varphi}$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2})$, *za konusnu projekciju s 3 standardne paralele (15°, 40°, 85°) (Lapaine 2021). Funkcija* $k = k(\varphi)$ *ima dva lokalna minimuma.*

Na slici 4 prikazan je graf funkcije $k(\varphi) = \frac{\rho}{2\cos\varphi}$, za konusnu projekciju s 3 standardne paralele (15°, 40°, 85°) (Lapaine 2021). Funkcija $k = k(\varphi)$ ima dva lokalna minimuma (0,97620 za $\varphi_0$ = 27°, i 0,80257 za $\varphi_0$ = 78°) i jedan lokalni maksimum (1,00776 za $\varphi_0$ = 45°).

U Lapaineovu članku (2021) mogu se naći i drugi primjeri konusnih projekcija s većim brojem lokalnih minimuma i maksimuma.

Pokazali smo da Kavrajskij (1959) nije bio u pravu tvrdeći da graf faktora lokalnog mjerila duljina uzduž paralela u konusnim projekcijama kao funkcije geodetske ili geografske širine izgleda kao na slici 1 te da ima jedinstveni ekstrem koji može biti samo minimum. U nastavku ćemo izvesti izraze koji su neovisni o vrsti konusne projekcije i koji se mogu primijeniti na bilo koju konusnu projekciju: konformnu, ekvivalentnu, ekvidistantnu, perspektivnu ili neku drugu. Pokazat će se da za donošenje odluke o minimumu ili maksimumu funkcije $k = k(\varphi)$ nije dovoljno gledati samo predznak druge derivacije te funkcije, nego, kako nas uči matematička analiza, treba istražiti ima li ta funkcija možda ekstremne vrijednosti na krajevima promatranog intervala.

## 2. Novi pristup određivanju paralele s najmanjim faktorom lokalnog mjerila duljina

Uspravne konusne projekcije su takve projekcije kod kojih su slike paralela koncentrični lukovi kružnica, a slike meridijana pravci koji prolaze središtem slika paralela. Jednadžbe uspravnih konusnih projekcija obično se zadaju u polarnom koordinatnom sustavu:

$$\theta = m\lambda,\ \ \rho = \rho(\varphi), \tag{1}$$

gdje su $\varphi$ i $\lambda$ geodetske ili geografske koordinate, $m$ parametar, $0 < m < 1$, a $\theta$ i $\rho$ polarne koordinate u ravnini projekcije. Funkcija $\rho = \rho(\varphi)$ trebala bi biti neprekidna, derivabilna i monotona. U ovom članku bavimo se samo uspravnim konusnim projekcijama.

Pri određivanju uvjeta koji određuju pojedinu konusnu kartografsku projekciju autori se često referiraju na paralelu kojoj odgovara najmanja vrijednost faktora lokalnog mjerila duljina (Borčić 1955, Kavrajskij 1959, Solov'ev 1969, Jovanović 1983, Bugayevskiy i Snyder 1995, Peterca 2001, Frančula 2004).

Faktori lokalnog mjerila duljina uzduž meridijana $h = h(\varphi)$, odnosno paralela $k = k(\varphi)$ za konusne projekcije rotacijskog elipsoida su funkcije (Borčić 1955, Kavrajskij 1959, Solov'ev 1969, Jovanović 1983, Bugayevskiy i Snyder 1995, Peterca 2001, Frančula 2004):

$$h(\varphi) = -\frac{d\rho}{Md\varphi},\ \ k(\varphi) = \frac{m\rho}{N\cos\varphi} = \frac{m\rho}{r}, \tag{2}$$

gdje su

$$M(\varphi) = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{3}{2}}},\ \ N(\varphi) = \frac{a}{(1-e^2\sin^2\varphi)^{\frac{1}{2}}},\ \ r(\varphi) = N(\varphi)\cos\varphi \tag{3}$$

polumjeri zakrivljenosti meridijana, presjeka po prvom vertikalu, odnosno paralele u promatranoj točki, a $e$ ekscentricitet meridijanske elipse. Napomenimo da je u izrazu (2) za faktor lokalnog mjerila duljina $k$ u nazivniku funkcija kosinus. Pojavit će se problem dijeljena nulom za $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$, drugim riječima funkcija $k = k(\varphi)$ nije definirana za $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ i $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Zbog toga predlažem da se definicija funkcije $k = k(\varphi)$ proširi na prirodan način, tj. da se definira

$$k\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{\varphi \to -\frac{\pi}{2}} \frac{m\rho}{r}, \ k\left(\frac{\pi}{2}\right) = \lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} \frac{m\rho}{r}, \tag{4}$$

ako te granične vrijednosti postoje.

Radi kraćeg pisanja uvedimo još oznake

$$M = M(\varphi), \ N = N(\varphi), \ r = r(\varphi) \tag{5}$$

$$M_0 = M(\varphi_0), \ N_0 = N(\varphi_0), \ r_0 = r(\varphi_0). \tag{6}$$

Potražimo geodetsku širinu (paralelu) za koju će vrijednost funkcije $k = k(\varphi)$ biti minimalna. Prema poznatom svojstvu iz matematičke analize, osnovni uvjet za minimum neke funkcije jest da prva derivacija te funkcije mora biti jednaka nuli. Dakle, izračunamo

$$\frac{dk}{d\varphi} = m\frac{\frac{d\rho}{d\varphi}r - \rho\frac{dr}{d\varphi}}{r^2}, \tag{7}$$

Izrazimo ili izračunamo

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -Mh, \ \frac{dN}{d\varphi} = \frac{e^2}{1-e^2} M \sin\varphi \cos\varphi, \ \frac{dr}{d\varphi} = -M \sin\varphi. \tag{8}$$

Kad to uvrstimo u (7) dobit ćemo

$$\frac{dk}{d\varphi} = \frac{mM}{r^2}(\rho \sin\varphi - hr), \tag{9}$$

pa uvjet za stacionarnost funkcije $k = k(\varphi)$ uz pretpostavku $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ glasi

$$\rho(\varphi_0) \sin\varphi_0 - h(\varphi_0) r_0 = 0. \tag{10}$$

Izraz (10) je relacija koja određuje stacionarnu točku funkcije $k = k(\varphi)$, tj. upućuje na paralelu s geodetskom širinom $\varphi_0$ uzduž koje vrijednost faktora lokalnog mjerila duljina $k = k(\varphi)$ poprima lokalno ekstremnu vrijednost, tj. ili je najmanja ili najveća.

Da bismo odgovorili na pitanje je li $k(\varphi_0)$ lokalno najmanja ili najveća vrijednost funkcije $k = k(\varphi)$, potrebna nam je druga derivacija te funkcije za $\varphi_0$, tj. $\frac{d^2k}{d\varphi^2}(\varphi_0)$. Ovisno o predznaku te druge derivacije, moći ćemo zaključiti je li riječ o minimumu ili maksimumu.

U (7) smo izračunali prvu derivaciju funkcije $k = k(\varphi)$. Deriviramo još jedanput

$$\frac{d^2k}{d\varphi^2} = m\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{M}{r^2}\right)(\rho\sin\varphi - hr) + m\frac{M}{r^2}\left(\frac{d\rho}{d\varphi}\sin\varphi + \rho\cos\varphi - \frac{dh}{d\varphi}r - h\frac{dr}{d\varphi}\right). \quad (11)$$

Budući da je

$$\frac{d\rho}{d\varphi}\sin\varphi - h\frac{dr}{d\varphi} = 0 \quad (12)$$

što se lako može provjeriti, i uzevši u obzir (10) možemo napisati

$$\frac{d^2k}{d\varphi^2}(\varphi_0) = m\frac{M_0}{r_0^2}\left(\rho(\varphi_0)\cos\varphi_0 - \frac{dh}{d\varphi}(\varphi_0)r_0\right) = m\frac{M_0}{r_0}\left(\frac{\rho(\varphi_0)\cos\varphi_0}{r_0} - \frac{dh}{d\varphi}(\varphi_0)\right) \quad (13)$$

i konačno

$$\frac{d^2k}{d\varphi^2}(\varphi_0) = \frac{M_0}{N_0}\left(k(\varphi_0) - \frac{m}{\cos\varphi_0}\frac{dh}{d\varphi}(\varphi_0)\right). \quad (14)$$

Budući da je $\frac{M_0}{N_0}$ uvijek pozitivno, to će $\frac{d^2k}{d\varphi^2}(\varphi_0) > 0$ biti zadovoljeno ako i samo ako vrijedi

$$k(\varphi_0) > \frac{m}{\cos\varphi_0}\frac{dh}{d\varphi}(\varphi_0). \quad (15)$$

Ako vrijedi (15) onda zaključujemo da je riječ o lokalnom minimumu funkcije $k = k(\varphi)$ za geodetsku širinu $\varphi_0$ pri promatranoj konusnoj projekciji rotacijskog elipsoida. Uvjet (14) može se izraziti i u obliku

$$\rho(\varphi_0) > N_0\frac{dh}{d\varphi}(\varphi_0). \quad (16)$$

Zaključimo: ako je potrebno odrediti geodetsku širinu $\varphi_0$ za koju će $k(\varphi_0)$ neke konusne projekcije poprimiti minimalnu vrijednost, treba riješiti jednadžbu (10) i zatim provjeriti nejednakost (15) ili (16). Uz to, treba istražiti ima li funkcija $k = k(\varphi)$ ekstremne vrijednosti na krajevima promatranog intervala.

## 3. Izvod za sferu

Pretpostavimo da je riječ o kartografskoj projekciji sfere polumjera $R$. Odgovarajući izvod možemo dobiti na temelju izraza (2)−(16) stavljajući

$$M = N = R,\ \ r = R\cos\varphi \ \text{ i } \ e = 0. \tag{17}$$

Na taj način imamo

$$h(\varphi) = -\frac{d\rho}{Rd\varphi},\ \ k(\varphi) = \frac{m\rho}{r} = \frac{m\rho}{R\cos\varphi}, \tag{18}$$

$$\frac{dk}{d\varphi} = \frac{m}{R\cos^2\varphi}(\rho\sin\varphi - hr) = \frac{m}{R\cos^2\varphi}\left(\rho\sin\varphi + \cos\varphi\frac{d\rho}{d\varphi}\right). \tag{19}$$

Uvjet za stacionarnost funkcije $k = k(\varphi)$ uz pretpostavku $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ glasi

$$\rho(\varphi_0)\sin\varphi_0 + \cos\varphi_0\frac{d\rho}{d\varphi}(\varphi_0) = 0. \tag{20}$$

pa se analogno izvodu u prethodnom poglavlju dobije

$$\frac{d^2k}{d\varphi^2}(\varphi_0) = k(\varphi_0) - \frac{m}{\cos\varphi_0}\frac{dh}{d\varphi}(\varphi_0) = k(\varphi_0) + \frac{m}{R\cos\varphi_0}\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}(\varphi_0). \tag{21}$$

Ako u konkretnom slučaju dobijemo $\frac{d^2k}{d\varphi^2}(\varphi_0) > 0$, onda možemo zaključiti da je riječ o lokalnom minimumu faktora lokalnog linearnog mjerila uzduž paralele kojoj odgovara geodetska širina $\varphi_0$ pri konusnoj projekciji sfere zadanoj s (1).

Uvjet $\frac{d^2k}{d\varphi^2}(\varphi_0) > 0$ može se na temelju (21) napisati u obliku

$$k(\varphi_0) > \frac{m}{\cos\varphi_0}\frac{dh}{d\varphi}(\varphi_0) \tag{22}$$

ili

$$\rho(\varphi_0) > R\frac{dh}{d\varphi}(\varphi_0) = -\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}(\varphi_0). \tag{23}$$

Navedeno je izvedeno uz pretpostavku da jednadžba (10), odnosno za sferu (20), ima rješenje $\varphi_0 \neq \pm\frac{\pi}{2}$. Potrebno je uvijek još posebno ispitati funkciju $k = k(\varphi)$ za $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$.

# 4. Prednosti primjene novog pristupa određivanja paralele s najmanjim faktorom lokalnog mjerila duljina

Borčić (1955) je izveo izraze za prvu i drugu derivaciju faktora lokalnog mjerila duljina uzduž paralela (u njegovoj oznaci $n$) za konusne projekcije rotacijskog elipsoida koje su konformne ili ekvidistantne uzduž meridijana. Pri tome za svaku od tih projekcija daje poseban izvod. Za ekvivalentne projekcije nije dao ni izvod ni komentar.

Solov'ev (1969) je izveo izraze za prvu i drugu derivaciju faktora lokalnog mjerila duljina uzduž paralela za konusne projekcije rotacijskog elipsoida koje su konformne, ekvivalentne ili ekvidistantne uzduž meridijana. Pri tome za svaki tip projekcije daje poseban izvod. Za ekvivalentne konusne projekcije daje (u našim oznakama)

$$\frac{d^2k}{d\varphi^2}(\varphi_0) = 2k_0^2$$

što je pogrešno. Ispravna formula (13) izvedena u ovom radu daje za ekvivalentnu konusnu projekciju

$$\frac{d^2k}{d\varphi^2}(\varphi_0) = \frac{M_0}{N_0}k(\varphi_0).$$

Jovanović (1983) je izveo izraze za prvu i drugu derivaciju faktora lokalnog mjerila duljina za konusne projekcije rotacijskog elipsoida koje su konformne ili ekvidistantne uzduž meridijana. Za konusne ekvivalentne projekcije također daje izraze za prvu i drugu derivaciju faktora lokalnog mjerila duljina, ali za preslikavanje sfere. Pri tome, kao i Solov'ev za svaki tip projekcije daje poseban izvod. Na prvi pogled se čini da kao i Solov'ev (1969) za ekvivalentne konusne projekcije daje pogrešan izraz. Međutim, pažljivijom usporedbom možemo uočiti da Jovanović ne razmatra funkciju $k$, nego njezin kvadrat $k^2$. Umjesto $\frac{d^2k}{d\varphi^2}$ Jovanović računa $\frac{d^2k^2}{d\varphi^2}$. Budući da je

$$\frac{d^2k^2}{d\varphi^2} = \frac{d}{d\varphi}\left(2k\frac{dk}{d\varphi}\right) = 2\left[\left(\frac{dk}{d\varphi}\right)^2 + k\frac{d^2k}{d\varphi^2}\right],$$

i zatim

$$\frac{d^2k^2}{d\varphi^2}(\varphi_0) = 2\left[\left(\frac{dk}{d\varphi}(\varphi_0)\right)^2 + k(\varphi_0)\frac{d^2k}{d\varphi^2}(\varphi_0)\right],$$

a kako je po pretpostavci

$$\frac{dk}{d\varphi}(\varphi_0) = 0,$$

to slijedi

$$\frac{d^2k^2}{d\varphi^2}(\varphi_0) = 2k(\varphi_0)\frac{d^2k}{d\varphi^2}(\varphi_0).$$

S obzirom na to da Jovanović ima ispravno

$$\frac{d^2k^2}{d\varphi^2}(\varphi_0) = 2k^2(\varphi_0).$$

to je

$$\frac{d^2k}{d\varphi^2}(\varphi_0) = k(\varphi_0),$$

a što je u skladu s formulom (20) izvedenom u ovom članku primijenjenoj na ekvidistantnu konusnu projekciju sfere.

Bugayevskiy i Snyder (1995) pri izvodima za konformnu, ekvivalentnu i ekvidistantnu konusnu projekciju zaboravljaju da bi trebalo ispitati odgovara li dobiveni rezultat minimumu ili maksimumu.

Peterca (2001) ima izvod relacija za određivanje paralele s najmanjim faktorom lokalnog linearnog mjerila samo za konformne konusne projekcije rotacijskog elipsoida.

Frančula (2004) ima izvod relacija za određivanje paralele s najmanjim faktorom lokalnog linearnog mjerila samo za konformne konusne projekcije rotacijskog elipsoida. Za projekcije koje su ekvivalentne i ekvidistantne uzduž meridijana navodi da vrijede iste relacije kao kod konformnih projekcija, uz obrazloženje da je formula za faktor lokalnog mjerila duljina ista. Taj je zaključak na prvi pogled dobar, ali u toj se formuli pojavljuje $\rho$ koji je za svaku projekciju drukčiji.

Budući da u ovom članku izvedeni izrazi (9) i (13)−(15) vrijede za sve konusne projekcije, a ne samo za neke, jasna je njihova prednost pred izvodima iz literature (Borčić 1955, Kavrajskij 1959, Solov'ev 1969, Jovanović 1983, Peterca 2001, Frančula 2004).

Primjene izvedenih izraza ilustrirat ćemo na konformnim, ekvivalentnim i ekvidistantnim konusnim projekcijama rotacijskog elipsoida, odnosno sfere.

## 5. Primjeri

Radi jednostavnijih formula pretpostavit ćemo da se preslikava sfera polumjera 1.

### 5.1. Konformna konusna projekcija

Da bi neka uspravna konusna projekcija bila konformna nužno i dovoljno je da vrijedi

$$h(\varphi) = k(\varphi). \tag{24}$$

Jednadžba (24) za konusne projekcije (1) sfere polumjera 1 glasi

$$-\frac{d\rho}{d\varphi} = \frac{m\rho}{\cos\varphi}, \tag{25}$$

gdje smo pretpostavili da je $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{m d\varphi}{\cos\varphi}. \tag{26}$$

koja slijedi iz (25) je

$$\rho = K \tan^m \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right), \tag{27}$$

gdje je $K > 0$ konstanta. Jednadžba (20) sad se može napisati u obliku

$$\rho(\varphi_0)\,(\sin\varphi_0 - m) = 0. \tag{28}$$

Jednadžba (28) može biti zadovoljena za $\rho(\varphi_0) = 0$ ili $\sin\varphi_0 = m$. Uz pretpostavku $\varphi_0 \neq \frac{\pi}{2}$ je $\rho(\varphi_0) \neq 0$, pa za stacionarnu vrijednost funkcije $k = k(\varphi)$ ostaje onaj $\varphi_0$ za koji vrijedi

$$\sin\varphi_0 = m. \tag{29}$$

Budući da je po pretpostavci $0 < m < 1$ i $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, jednadžba (29) ima jedinstveno rješenje. Nadalje, za $\varphi \epsilon \left(-\frac{\pi}{2}, \varphi_0\right)$, vrijedi $m > \sin\varphi$, $\frac{dk}{d\varphi}(\varphi) < 0$ i funkcija $k = k(\varphi)$ pada

za $\varphi \epsilon \left(\varphi_0, \frac{\pi}{2}\right)$, vrijedi $m < \sin\varphi$, $\frac{dk}{d\varphi}(\varphi) > 0$ i funkcija $k = k(\varphi)$ raste.

To isto izraženo s pomoću druge derivacije:

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -\frac{m\rho}{\cos\varphi}, \; \frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = m\rho\frac{m-\sin\varphi}{\cos^2\varphi}, \tag{30}$$

pa je $\frac{d^2\rho}{d\varphi^2}(\varphi_0) = 0$ zbog (30), a onda vrijedi (23).

Dakle, funkcija $k = k(\varphi)$ ima jedinstveni minimum na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ za $\varphi_0$ koji zadovoljava (29). Taj minimum iznosi $k(\varphi_0) = m\frac{\rho(\varphi_0)}{\cos\varphi_0} = \rho(\varphi_0)\tan\varphi_0$.

Još treba pogledati ponašanje funkcije $k = k(\varphi)$ na rubovima intervala, tj. za $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ i $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Nije teško vidjeti da je

$$\lim_{\varphi \to -\frac{\pi}{2}} k(\varphi) = \lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} k(\varphi) = \infty. \tag{31}$$

Na taj smo način dokazali da je graf funkcije $k = k(\varphi)$ za konusnu konformnu projekciju onakav kakav je prikazan na slici 1.

Na primjer, neka je $m = \frac{1}{2}$, $K = 1$. Jednadžbe uspravne konformne konusne projekcije s tim parametrima prema (1) i (27) glase

$$\theta = \frac{1}{2}\lambda, \; \rho = \sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}. \tag{32}$$

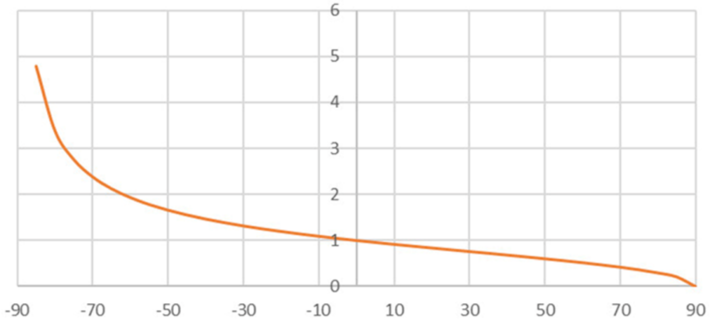
Faktori lokalnih linearnih mjerila su

$$h(\varphi) = k(\varphi) = \frac{\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}}{2\cos\varphi}. \tag{33}$$

Prema (29), funkcija $k = k(\varphi)$ poprima minimum za $\varphi_0 = 30°$ za koji vrijedi

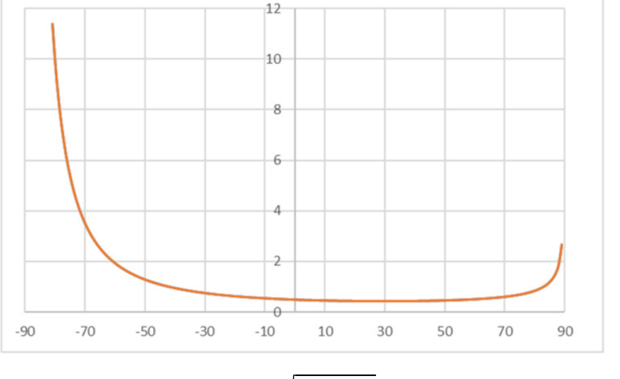
$$\sin\varphi_0 = \frac{1}{2} \tag{34}$$

i vrijednost toga minimuma je $k(\varphi_0) = \rho(\varphi_0)\tan\varphi_0 = 0.43869$. Na rubovima intervala vrijedi (31) (slike 5−7).




Slika 5. *Graf funkcije* $\rho = \sqrt{tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}$. *Horizontalna os izražena je u stupnjevima.*

Slika 6. *Karta dijela svijeta izrađena u uspravnoj konusnoj konformnoj projekciji* $\theta = \frac{1}{2}\lambda,\ \rho = \sqrt{tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}$. *U toj projekciji nije moguće prikazati cijeli svijet jer se slika proteže u beskonačnost, a zbog velikih deformacija prikazan je samo dio* $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right)$.




Slika 7. *Graf funkcije* $k(\varphi) = h(\varphi) = \frac{\sqrt{tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}}{2\cos\varphi}$. *Horizontalna os izražena je u stupnjevima.*

### 5.2. Ekvivalentna konusna projekcija

Da bi neka uspravna konusna projekcija bila ekvivalentna nužno i dovoljno je da vrijedi

$$h(\varphi)k(\varphi) = 1. \tag{35}$$

Pretpostavit ćemo da je riječ o preslikavanju sfere polumjera 1. Jednadžba (35) za konusne projekcije (1) sfere polumjera 1 glasi

$$-\frac{d\rho}{d\varphi}\frac{m\rho}{\cos\varphi} = 1, \tag{36}$$

gdje smo pretpostavili da je $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$m\rho d\rho = -\cos\varphi d\varphi. \tag{37}$$

koja slijedi iz (36) je

$$\rho = \sqrt{C - \frac{2}{m}\sin\varphi} = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt{K - \sin\varphi}, \tag{38}$$

gdje su $C$ i $K$ konstante, $K \geq 1$. Možemo napisati

$$k(\varphi) = \frac{m\rho}{\cos\varphi}, h(\varphi) = \frac{\cos\varphi}{m\rho} \tag{39}$$

$$k(\varphi_0) = \frac{m\rho(\varphi_0)}{\cos\varphi_0}, h(\varphi_0) = \frac{\cos\varphi_0}{m\rho(\varphi_0)}. \tag{40}$$

Jednadžba (20) vodi na

$$\rho^2(\varphi_0) = \frac{\cos^2\varphi_0}{m\sin\varphi_0} \tag{41}$$

i zatim na kvadratnu jednadžbu

$$\sin^2\varphi_0 - 2K\sin\varphi_0 + 1 = 0. \tag{42}$$

Iako svaka kvadratna jednadžba ima dva rješenja, u ovom slučaju dolazi u obzir samo

$$\sin\varphi_0 = K - \sqrt{K^2 - 1} \tag{43}$$

da bi odgovarajuća vrijednost $\rho(\varphi_0)$ bila realna

$$\rho(\varphi_0) = \sqrt{\frac{2}{m}}\sqrt[4]{K^2 - 1} = \frac{\cos\varphi_0}{\sqrt{m\sin\varphi_0}}. \tag{44}$$

Deriviramo funkciju $h(\varphi) = \frac{\cos\varphi}{m\rho}$ i dobijemo

$$\frac{dh}{d\varphi} = \frac{\cos^2\varphi - m\rho^2\sin\varphi}{m^2\rho^3} \tag{45}$$

Zbog (41) izraz (45) daje

$$\frac{dh}{d\varphi}(\varphi_0) = 0 \tag{46}$$

i onda $\rho(\varphi_0) > 0$, osim kad je $\rho(\varphi_0) = 0$, tj. $K = 1$. Dakle, funkcija $k = k(\varphi)$ ima jedinstveni minimum $k(\varphi_0) = m\frac{\rho(\varphi_0)}{\cos\varphi_0} = \sqrt{\frac{m}{\sin\varphi_0}}$ na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ za $\varphi_0$ koji zadovoljava (43), osim za $K = 1$.

Promotrimo poseban slučaj $K = 1$. Tada se (38) može napisati u obliku

$$\rho = \frac{2}{\sqrt{m}}\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right). \tag{47}$$

Jednadžba (20) sad se uz pretpostavku $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ može napisati u obliku

$$m\rho^2(\varphi_0)\sin\varphi_0 - \cos^2\varphi_0 = 0 \tag{48}$$

i odatle dobiti $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Međutim, to nije rješenje zbog učinjene pretpostavke. Dakle, jednadžba (20), odnosno u ovom slučaju (48), nema rješenje. Funkcija $k = k(\varphi)$ nema stacionarnu točku, pa ni ekstremnu vrijednost na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Još treba pogledati ponašanje funkcije $k = k(\varphi)$ na rubovima intervala, tj. za $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ i $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Jednadžba funkcije $k = k(\varphi)$ za ovu konusnu projekciju glasi

$$k(\varphi) = \frac{\sqrt{m}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{\sqrt{m}}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \tag{49}$$

i odatle

$$\frac{dk}{d\varphi} = -\sqrt{m}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} < 0 \tag{50}$$

na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Dakle, funkcija $k = k(\varphi)$ na tom intervalu stalno pada, Nadalje, nije teško vidjeti da vrijedi

$$\lim_{\varphi \to -\frac{\pi}{2}} k(\varphi) = \infty, \text{ a } \lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} k(\varphi) = \sqrt{m} \tag{51}$$

Na taj smo način dokazali da je graf funkcije $k = k(\varphi)$ za konusnu ekvivalentnu projekciju zadanu s (47) nije onakav kakav je prikazan na slici 1, nego odgovara slici 2. Za tu konusnu projekciju na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ne postoji paralela s najmanjom vrijednosti faktora lokalnog mjerila duljina. Međutim, ako gledamo na zatvorenom intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, onda se minimalna vrijednost funkcije $k = k(\varphi)$ postiže za $\varphi = \frac{\pi}{2}$ i iznosi $\sqrt{m}$.

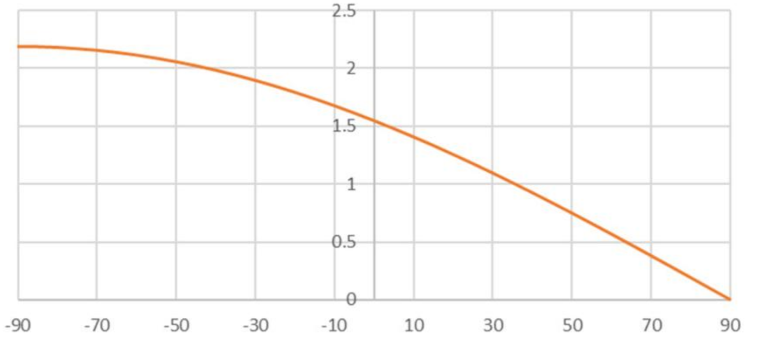
Neka je na primjer $m = \frac{5}{6}$, $K = 1$. Jednadžbe uspravne ekvivalentne konusne projekcije s tim parametrima prema (1) i (38) glase

$$\theta = \frac{5}{6}\lambda, \ \rho = 2\sqrt{\frac{3}{5}}\sqrt{1 - \sin\varphi} = 2\sqrt{\frac{6}{5}} \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right). \tag{52}$$

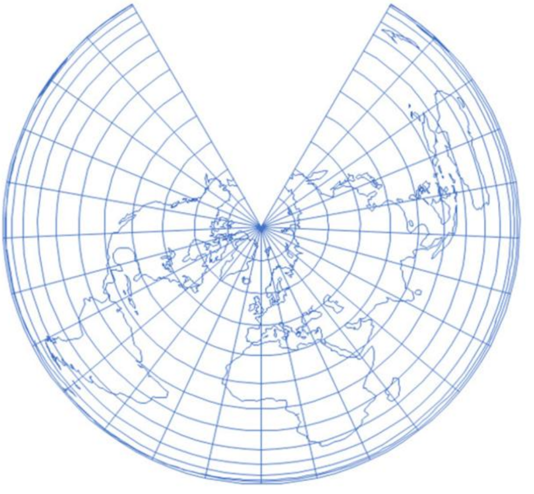
Prema (49) imamo

$$k(\varphi) = \sqrt{\frac{5}{6}} \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}. \tag{53}$$

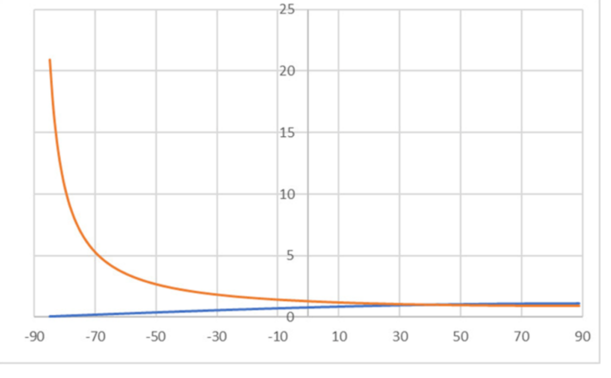
Na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, funkcija $k = k(\varphi)$ je monotono padajuća, a minimalnu vrijednost $\sqrt{\frac{5}{6}}$ postiže se za $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (slike 7–9).




Slika 7. *Graf funkcije* $\rho = 2\sqrt{\frac{6}{5}} sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$. *Horizontalna os izražena je u stupnjevima.*



Slika 8. *Karta svijeta izrađena u uspravnoj konusnoj ekvivalentnoj projekciji* $\theta = \frac{5}{6}\lambda$, $\rho = 2\sqrt{\frac{6}{5}} sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$.




Slika 9. *Graf funkcije* $k(\varphi) = \sqrt{\frac{5}{6}} \frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)}$ *(crveno) i* $h(\varphi) = \frac{1}{k(\varphi)}$ *(plavo). Horizontalna os izražena je u stupnjevima.*

## 5.3. Konusna projekcija ekvidistantna uzduž meridijana

Kažemo da je projekcija ekvidistantna u nekoj točki ako je u toj točki faktor linearnog mjerila jednak 1. Međutim, u svakoj točki linearno mjerilo ovisi o smjeru. Kad kažemo da je projekcija ekvidistantna uzduž meridijana, to znači da je ekvidistantna u svakoj točki toga meridijana. No, to nije dovoljno jer u svakoj točki mjerilo ovisi o smjeru. Dakle, ako želimo biti jednoznačni trebali bismo npr. reći da je projekcija ekvidistantna uzduž meridijana i u smjeru meridijana. Radi kratkoće izražavanja u nastavku reći ćemo samo da je projekcija ekvidistantna uzduž meridijana.

Da bi neka projekcija bila ekvidistantna uzduž meridijana nužno i dovoljno je da vrijedi

$$h(\varphi) = 1. \tag{54}$$

Pretpostavit ćemo da je riječ o preslikavanju sfere polumjera 1. Jednadžba (54) za konusne projekcije (1) sfere polumjera 1 glasi

$$\frac{d\rho}{d\varphi} = -1. \tag{55}$$

Opće rješenje diferencijalne jednadžbe

$$d\rho = -d\varphi. \tag{56}$$

koja slijedi iz (55) je

$$\rho = K - \varphi, \tag{57}$$

gdje je $K \geq \frac{\pi}{2}$ konstanta. Pretpostavimo da je $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Jednadžba (20) bit će za tu projekciju

$$(K - \varphi_0)\sin\varphi_0 - \cos\varphi_0 = 0. \tag{58}$$

To je iracionalna jednadžba čije se rješenje može za zadani $K$ dobiti odgovarajućom iterativnom metodom. Može se pokazati da je takvo rješenje za zadani $K \geq \frac{\pi}{2}$ jedinstveno na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Budući da je $\frac{d^2\rho}{d\varphi^2} = 0$, to će uvjet (23) za minimum funkcije $k = k(\varphi)$ glasiti $\rho(\varphi_0) > 0$, što će očito biti ispunjeno i tada je $k(\varphi_0) = \frac{m}{\sin\varphi_0}$.

Pogledajmo još poseban slučaj $K = \frac{\pi}{2}$. Tada se (57) može napisati u obliku

$$\rho(\varphi) = \frac{\pi}{2} - \varphi, \tag{59}$$

Jednadžba (20), odnosno (58) sad se može napisati u obliku

$$\left(\frac{\pi}{2} - \varphi_0\right)\sin\varphi_0 - \cos\varphi_0 = 0. \tag{60}$$

To je iracionalna jednadžba koja daje $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$. Međutim, to nije rješenje zbog učinjene pretpostavke $\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Funkcija $k = k(\varphi)$ nema stacionarnu točku, pa ni ekstremnu vrijednost na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Još treba pogledati ponašanje funkcije $k = k(\varphi)$ na rubovima intervala, tj. za $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ i $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Jednadžba funkcije $k = k(\varphi)$ za ovu konusnu projekciju glasi

$$k(\varphi) = \frac{m\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{\cos\varphi} \tag{61}$$

i nije teško vidjeti da vrijedi

$$\lim_{\varphi \to -\frac{\pi}{2}} k(\varphi) = \infty, \text{ a } \lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} k(\varphi) = m \tag{62}$$

Na taj smo način dokazali da graf funkcije $k = k(\varphi)$ za konusnu projekciju koja je ekvidistantna uzduž meridijana i zadana s (59) nije onakav kakav je prikazan na slici 1, nego odgovara slici 2. Za tu konusnu projekciju na intervalu $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ne postoji paralela s najmanjom vrijednosti faktora lokalnog mjerila duljina. Granična vrijednost $m$ funkcije $k = k(\varphi)$ je najmanja vrijednost te funkcije na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\rho\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, i u tom slučaju sjeverni pol se preslikava u točku.

Neka je $m = \frac{5}{6}$, $K = \frac{\pi}{2}$. Jednadžbe uspravne konusne projekcije ekvidistantne u smjeru meridijana s tim parametrima prema (1) i (59) glase

$$\theta = \frac{5}{6}\lambda, \ \rho = \frac{\pi}{2} - \varphi. \tag{63}$$

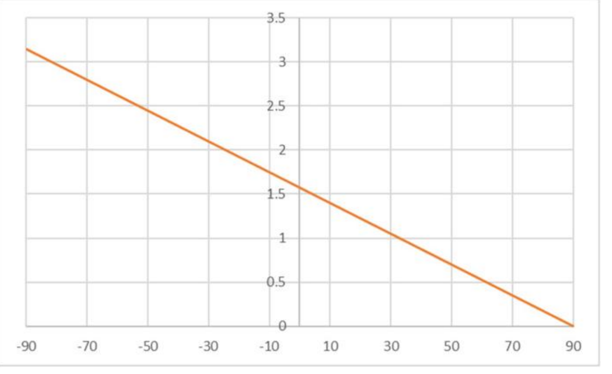
Prema (61) imamo

$$k(\varphi) = \frac{5\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)}{6\cos\varphi} \tag{64}$$

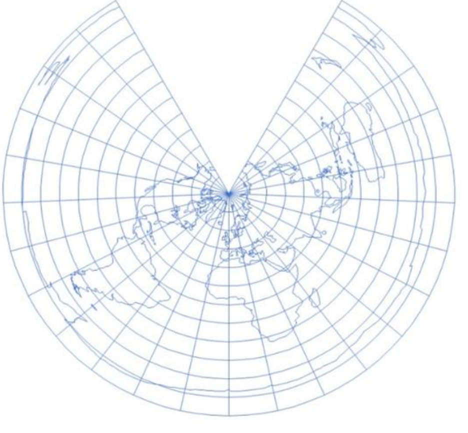
i zatim

$$\lim_{\varphi \to -\frac{\pi}{2}} k(\varphi) = \infty, \text{ i } \lim_{\varphi \to \frac{\pi}{2}} k(\varphi) = \frac{5}{6}. \tag{65}$$

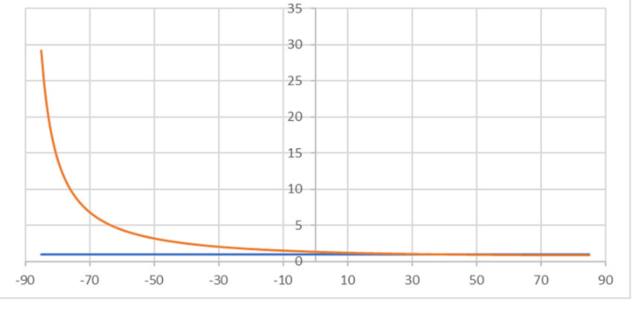
Na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, funkcija $k = k(\varphi)$ je monotono padajuća, a minimalnu vrijednost $\frac{5}{6}$ postiže za $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (slike 10–12).




Slika 10. *Graf funkcije* $\rho = \frac{\pi}{2} - \varphi$. *Horizontalna os izražena je u stupnjevima.*



Slika 11. *Karta svijeta izrađena u uspravnoj konusnoj projekciji ekvidistantnoj uzduž meridijana* $\theta = \frac{5}{6}\lambda$, $\rho = \frac{\pi}{2} - \varphi$.




Slika 12. *Graf funkcije* $k(\varphi) = \frac{5\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)}{6\cos\varphi}$ *(crveno) i* $h(\varphi) = 1$ *(plavo). Horizontalna os izražena je u stupnjevima.*

## 5.4. Konusna projekcija ekvidistantna uzduž paralela

Kad kažemo da je projekcija ekvidistantna uzduž paralele, to znači da je ekvidistantna u svakoj točki te paralele. No, to nije dovoljno jer u svakoj točki mjerilo ovisi o smjeru. Dakle, ako želimo biti jednoznačni trebali bismo npr. reći da je projekcija ekvidistantna uzduž paralele i u smjeru paralele. Radi kratkoće izražavanja u nastavku reći ćemo samo da je projekcija ekvidistantna uzduž paralele.

Da bi neka projekcija bila ekvidistantna uzduž paralela nužno i dovoljno je da vrijedi

$$k(\varphi) = 1. \tag{66}$$

Iz (18) za konusnu projekciju sfere polumjera 1 najprije slijedi

$$\rho = \frac{\cos\varphi}{m}. \tag{67}$$

Zbog svojstva trigonometrijske funkcije kosinus najprije zaključujemo da se u toj projekciji ne može preslikati cijeli svijet. Pretpostavimo da je $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Nadalje,

$$h(\varphi) = \frac{\sin\varphi}{m} \ \text{ i } \ \frac{dk}{d\varphi}(\varphi) = 0, \tag{68}$$

pa jednadžba (20) glasi

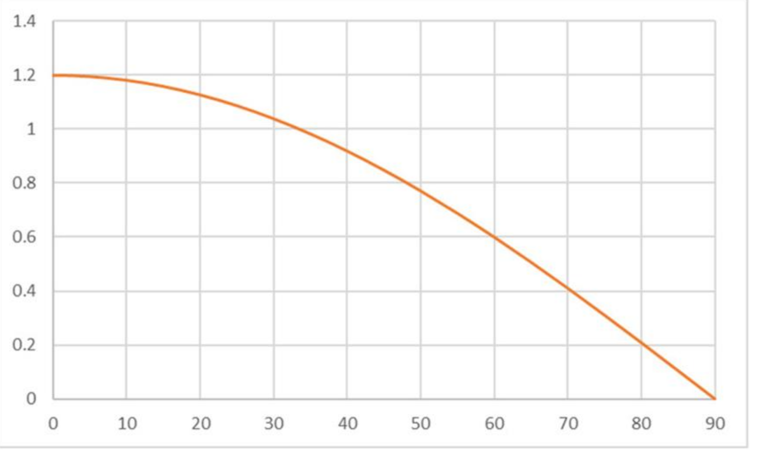
$$0 = 0. \tag{69}$$

Dakle, za tu konusnu projekciju svaka paralela je stacionarna u odnosu na funkciju $k = k(\varphi)$. Nije moguće donijeti odluku o minimumu ili maksimumu funkcije $k = k(\varphi)$. Takav odgovor slijedi i neposredno iz definicije projekcije (66), funkcija $k = k(\varphi)$ je konstantna, pa nema minimum ni maksimum. Na taj smo način dokazali da je graf funkcije $k = k(\varphi)$ za konusnu projekciju koja je ekvidistantna uzduž paralela nije onakav kakav je prikazan na slici 1, nego odgovara slici 3. Za tu konusnu projekciju također ne postoji paralela s najmanjom vrijednosti faktora lokalnog mjerila duljina.
Neka je $m = \frac{5}{6}$. Jednadžbe uspravne konusne projekcije ekvidistantne u smjeru paralela s tim parametrom prema (1) i (67) glase

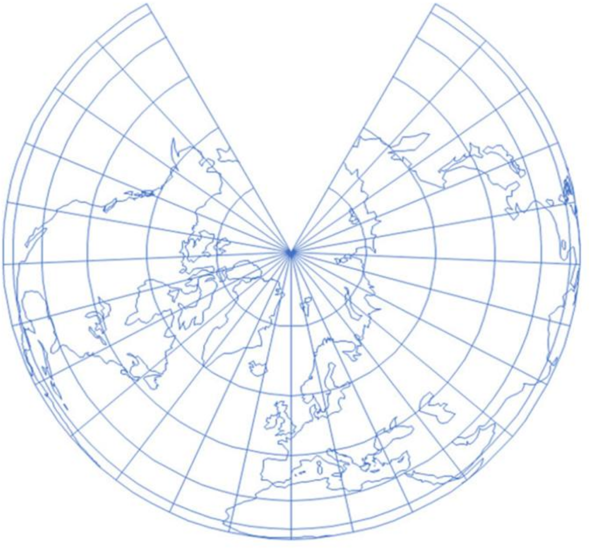
$$\theta = \frac{5}{6}\lambda, \ \ \rho = \frac{6}{5}\cos\varphi. \tag{70}$$

Prema (66) imamo $k(\varphi) = 1$, a prema (68) $h(\varphi) = \frac{6}{5}\sin\varphi$.

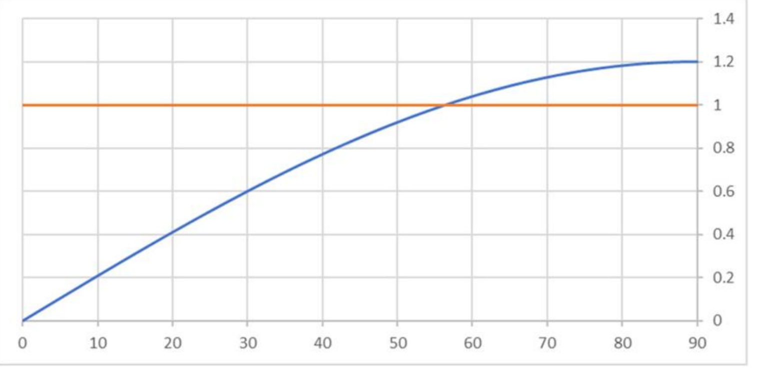
Na intervalu $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, funkcija $k = k(\varphi)$ je konstanta, nema ni minimalne ni maksimalne vrijednosti (slike 13−15).




Slika 13. *Graf funkcije* $\rho = \frac{6}{5}\cos\varphi$, $\varphi \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. *Horizontalna os izražena je u stupnjevima.*



Slika 14. *Karta sjeverne polusfere izrađena u uspravnoj konusnoj projekciji ekvidistantnoj uzduž paralela* $\theta = \frac{5}{6}\lambda$, $\rho = \frac{6}{5}\cos\varphi$.




Slika 15. *Graf funkcije* $k(\varphi) = 1$ *(crveno) i* $h(\varphi) = \frac{6}{5} sin\,\varphi$ *(plavo) za* $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. *Horizontalna os izražena je u stupnjevima.*

## 6. Zaključak

Raspored deformacija pri uspravnim konusnim projekcijama ovisi o geodetskoj, odnosno geografskoj širini. I faktor lokalnog mjerila duljina $k = k(\varphi)$ za uspravne konusne projekcije je funkcija geodetske, odnosno geografske širine $\varphi$. Izrazi koji vode na lokalni minimum funkcije $k$ u literaturi redovito se izvode za pojedine konusne projekcije i pritom se ne obraća pozornost na činjenicu da ta funkcija nije definirana u polovima. Za razliku od takvog pristupa, u ovom se članku najprije proširuje definicija funkcije $k = k(\varphi)$ za uspravne konusne projekcije na polove. Zatim se izvode izrazi koji su neovisni o vrsti konusne projekcije i koji se mogu primijeniti na bilo koju konusnu projekciju: konformnu, ekvivalentnu, ekvidistantnu, perspektivnu ili neku drugu. Nadalje, za razliku od tvrdnje iz literature da funkcija $k = k(\varphi)$ ima jedinstveni minimum, u ovom se članku dokazuje da ta funkcija ne mora imati nijedan, a može imati jedan ili više lokalnih minimuma. Teorijska istraživanja ilustrirana su odgovarajućim primjerima.

### Literatura

Borčić, B. (1955): Matematička kartografija, Tehnička knjiga, Zagreb.

Bugayevskiy, L. M., Snyder, J. P. (1995): Map Projections, A Reference Manual, Taylor & Francis, London.

Frančula, N. (2004): Kartografske projekcije, skripta, Geodetski fakultet Sveučilišta u Zagrebu, Zagreb.

Jovanović, V. (1983): Matematička kartografija, Vojnogeografski institut, Beograd.

Kavrayskiy, V. V. (Каврайский, В. В.) (1959): Izbrannye trudy, Tom II, Matematičeskaja kartografija, Vyp. 2, Koničeskie i cilindričeskie proekcii, ih primenenie, Izdanie Upravlenija načal'nika Gidrografičeskoj Služby VMF.

Lapaine, M. (2021): Conic Projections with Three or More Standard Parallels, Proceedings of the International Cartographic Association, 4, 2021, 30th International Cartographic Conference (ICC 2021), 14–18 December 2021, Florence, Italy. https://doi.org/10.5194/ica-proc-4-64-2021, 1–6.

Marković, Ž. (1961): Uvod u višu analizu, Sveučilšte u Zagrebu, Zagreb.

Peterca, M. (2001): Matematična kartografija, Univerza v Ljubljani, Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo, Ljubljana.

Solov'ev, M. D. (1969): Matematičeskaja kartografija, Nedra, Moskva.

# On the Local Linear Scale Factor along Parallels in Conic Map Projections

*ABSTRACT. The local linear scale factor k for normal aspect conic projections is a function of the geodetic, or geographic latitude φ. Contrary to claims from the literature, this function does not have to have any, but can have one or more local minima. Furthermore, the expressions leading to the local minimum of the function k are regularly derived in the literature for certain conic projections. In contrast to such an approach, this article derives expressions that are independent of the type of conic projection and can be applied to any conic projection: conformal, equivalent, equidistant, perspective or some other.*

*Keywords: conic projection, local linear scale factor along parallel.*

*Primljeno / Received:* 2023-09-01

*Prihvaćeno / Accepted:* 2023-09-20