ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.6 (2023) 15–34
https://doi.org/10.32817/amssd.6.2

Zaprimljen: 17. siječnja 2023.
Prihvaćen: 26. ožujka 2023.

Zašto je važno biti konveksan

Milica Klaričić Bakula, Iva Smoljko

Sažetak

U ovom radu ćemo pokazati zašto je pojam konveksnosti iznimno važan i kako se može koristiti u raznim granama matematike.

Ključni pojmovi: konveksni skupovi, konveksne funkcije, Jensenova nejednakost

1. Povijest pojma konveksnosti

Malo je poznato da pojam konveksnosti spada među najstarije matematičke pojmove. Iako na neka promišljanja o konveksnosti nailazimo već u Euklidovim djelima pravi pojam konveksnosti se prvi put spominje u Arhimedovom djelu *O kugli i valjku*. Arhimed je definirao konveksni luk kao ravninsku krivulju koja čitava leži s jedne strane spojnice svojih krajnjih točaka i kojoj sve spojnice njenih točaka leže s te iste strane. Na sličan je način definirao i konveksnu plohu omeđenu krivuljom u ravnini. Svoja promišljanja o svojstvima konveksnih lukova koristio je za mjerenje njihovih duljina. Iskazao je, na primjer, ovakvu tvrdnju: *Ako jedan konveksni luk leži između drugoga konveksnog luka s istim krajnjim točkama i spojnice njihovih krajnjih točaka onda je duljina unutrašnjega luka manja od duljine vanjskoga.* Analognu je tvrdnju dao i za površine konveksnih ploha. U svom djelu *O ravnoteži u ravnini* Arhimed je ustvrdio da svi konveksni likovi sadrže svoje težište.

Arhimedova saznanja bila su zaboravljena gotovo 2000 godina i tek ih u sedamnaestom stoljeću ponovno nalazimo u djelima Fermata i nekih njegovih suvremenika. Na žalost razvojem intuitivnoga infinitezimalnog računa pojam konveksnosti opet pada u zaborav. Tek u jednom Cauchyjevom članku iz 1850. nailazimo na tvrdnju analognu Arhimedovoj o konveksnim lukovima dok se na onu o konveksnim plohama moralo čekati sve do 1901. godine kada ju je ponovno dokazao Minkowski.

Još jedan poznati primjer rane uporabe pojma konveksnosti nalazimo u Eulerovom teoremu o zatvorenim konveksnim poliedrima iz 1753. Euler je dokazao da ako je broj vrhova zatvorenoga konveksnog poliedra označen s v, broj bridova s e i broj stranica s f vrijedi $v - e + f = 2$ (ovdje vrijedi istaknuti da je Leibnitz 1860. godine pronašao 100 godina stariji Descartesov dokaz istoga teorema).

U jednom članku iz 1798. Fourier ističe kako tada poznate metode za nalaženje težišta mehaničkih sustava nisu primjenjive u praksi jer se kao uvjeti javljaju sustavi nejednadžbi. 25 godina kasnije Fourier se vraća istom problemu navodeći da su pripadne nejednadžbe ustvari linearne te da je potrebno razviti odgovarajuću tehniku za rješavanje takvih sustava. Napominje da se u slučaju nejednadžbi s tri varijable skup rješenja može prikazati kao presjek poluravnina to jest kao konveksni poliedar, a 1826. daje i metodu za rješavanje takvih sustava linearnih nejednadžbi. Do sistematičnog rješenja općeg slučaja je trebalo pričekati sve do 1902. kada je to napravio Farkas čije je ime zbog toga i danas dobro poznato svakomu tko se bavi linearnim programiranjem (vidjet ćemo jedan primjer na kraju ovoga članka).

Neovisno o Farkasu istim se problemom bavio i Minkowski iako na nešto drugačiji način: umjesto geometrijske terminologije on je koristio matrice. Istraživanje ga je dovelo do uvođenja važnoga pojma ekstremne točke konveksnoga skupa, točke koja može biti uklonjena bez da se poremeti konveksnost polaznoga skupa. Minkowski je dokazao i da je svaki zatvoreni konveksni skup u $\mathbb{R}^3$ konveksna ljuska svojih ekstremnih točaka. Uočivši važnost i ljepotu pojma konveksnosti Minkowski se počeo baviti konveksnim skupovima radi njih samih, ne više samo kao dijelom istraživanja drugih matematičkih problema. Neki od njegovih važnijih rezultata su oni vezani uz postojanje potpornih i separacijskih hiperravnina te uvođenje pojma funkcije udaljenosti.

Ovi su se pojmovi pokazali iznimno važnima kasnije tijekom razvoja teorije Banachovih prostora: mnogi su uočili vezu između Hahn-Banachovog teorema i postojanja potporne hiperravnine u rubnim točkama konveksnoga skupa kao i postojanja separacijskih hiperravnina među disjunktnim konveksnim skupovima. Kasnije se pokazalo da pojam Banachova prostora nije dovoljno općenit za mnoge važne probleme funkcionalne analize te 1935. von Neuman uvodi sveobuhvatniju klasu topoloških vektorskih prostora kod koje konveksnost igra iznimno važnu ulogu.

Pojam konveksnih funkcija znatno je noviji od pojma konveksnih skupova. Ovo nije čudno jer je i sam pojam funkcije relativno nov: strogi pojam funkcije kako ga danas poznajemo ustanovio je Goursat 1920.-ih godina. U nastavku ćemo vidjeti da su ova dva pojma usko povezana te da pojam konveksne funkcije nema smisla bez pojma konveksnoga skupa. Više o povijesti pojma konveksnosti može se naći u [1].

Pokazalo se da pojam konveksnosti, iako jako jednostavan, ima vrlo važnu ulogu u mnogim granama matematike, osobito u optimizaciji, statistici i financijskoj matematici, te je grana analize koja se bavi konveksnošću, konveksna analiza, jako dobro istražena. No ovaj jednostavan a ipak jako važan pojam je zapanjujuće malo prisutan u udžbenicima te se učenici i studenti s njim premalo susreću. U ovom članku dat ćemo neke jednostavne primjere problema u kojima konveksnost igra značajnu ulogu i to ponekad na vrlo skriven način.

2. Konveksni skupovi

Moderna definicija konveksnoga skupa je sljedeća.

Definicija 1. *Za skup* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *kažemo da je konveksan ako za sve* $x, y \in C$ *i sve* $\lambda \in [0, 1]$ *vrijedi*

$$\lambda x + (1 - \lambda)\, y \in C.$$

Drugim riječima, skup je konveksan ako sadrži spojnice svih svojih točaka. Na donjoj slici vidimo prikaze konveksnoga (slika 1a) i nekonveksnoga skupa (slika 1b).

(a) (b)

Slika 1

Konveksnost se ponaša lijepo s obzirom na mnoge operacije na skupovima. Lako je dokazati da je presjek dva konveksna skupa konveksan skup, a ovo svojstvo se zadržava i kod presjeka beskonačnog broja skupova. Konveksnost također ostaje očuvana primjenom skaliranja, translacije, projekcije na koordinate i Kartezijeva produkta. Koristeći ovakva svojstva lako je, na primjer, vidjeti da su poliedri dobiveni kao presjeci poluprostora i hiperravnina (koji su uvijek konveksni) i sami konveksni skupovi što je važna činjenica u linearnom programiranju.

Uz pojam konveksnoga skupa prirodno se veže pojam konveksne ljuske.

Definicija 2. *Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Konveksna ljuska skupa S je skup*

$$\boldsymbol{conv}S = \left\{ \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k \mid k \in \mathbb{N},\ x_i \in S,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Važno je uočiti da sume oblika $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k$, koje nazivamo konveksnim kombinacijama, u slučaju kada je C konveksan skup uvijek ostaju u C što je lako dokazati indukcijom po $k \in \mathbb{N}$. Za $k = 1$ iz definicije konveksne kombinacije slijedi $\lambda_1 = 1$, pa je za $x_1 \in C$ odmah ispunjeno $\lambda_1 x_1 = x_1 \in C$. Pretpostavimo da konveksna kombinacija k elemenata iz C ostaje u C. Za konveksnu kombinaciju $k+1$ elemenata iz C stavimo

$$\begin{aligned} &\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{k+1} x_{k+1} \\ &= (1 - \lambda_{k+1}) \left(\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{k+1}} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} x_k \right) + \lambda_{k+1} x_{k+1}. \end{aligned}$$

Uočimo da je za sve $i \in \{1, \ldots, k\}$ ispunjeno

$$\frac{\lambda_i}{1 - \lambda_{k+1}} \geq 0$$

te da je

$$\frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{k+1}} + \cdots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} = 1.$$

Po pretpostavci indukcije slijedi

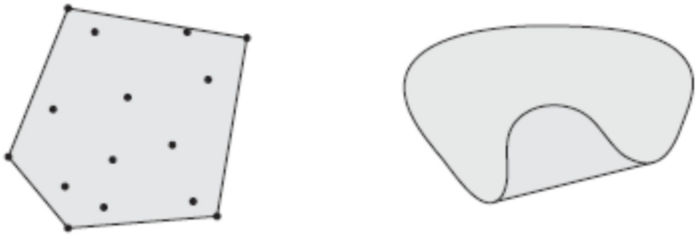
$$x' = \frac{\lambda_1}{1 - \lambda_{k+1}} x_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{1 - \lambda_{k+1}} x_k \in C,$$

a po definiciji konveksnoga skupa je tada

$$(1 - \lambda_{k+1})\, x' + \lambda_{k+1} x_{k+1} = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{k+1} x_{k+1} \in C.$$

Na sličan način kao gore lako dokažemo da je $\boldsymbol{conv}S$ konveksan skup te da sadrži S. Važna posljedica toga i činjenice da sve konveksne kombinacije ostaju u konveksnom skupu jest da je $\boldsymbol{conv}S$ najmanji konveksan skup koji sadrži S, to jest da je $\boldsymbol{conv}S$ presjek svih konveksnih skupova koji sadrže S. Odmah se vidi i da u slučaju kada je S konveksan skup vrijedi $\boldsymbol{conv}S = S$. Na slici 2 vidimo prikaze dviju konveksnih ljuski.

Više o konveksnim skupovima može se naći u [6] i [2].



Slika 2

3. Konveksne funkcije

Sada dajemo definiciju konveksne funkcije.

Definicija 3. *Za funkciju $f\colon D \to \mathbb{R}$, gdje je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup, kažemo da je konveksna ako za sve $x, y \in D$ i sve $\lambda \in [0,1]$ vrijedi*

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda)\, y\right) \leq \lambda f\left(x\right) + (1-\lambda)\, f\left(y\right).$$

Za f kažemo da je strogo konveksna ako je gornja nejednakost stroga. Za f kažemo da je konkavna ako je $-f$ konveksna.

Uočimo najprije da je uvjet konveksnosti domene nužan da bi konveksne kombinacije točaka domene ostajale u njoj, to jest da bi pod uvjetima teorema vrijedilo $\lambda x + (1-\lambda)\, y \in D$, pa je pojam konveksnosti funkcija besmislen bez pojma konveksnoga skupova. Geometrijska posljedica konveksnosti neke funkcije je da spojnica bilo koje dvije točke njenoga grafa leži iznad dijela grafa između tih dviju točaka (ilustracija na slici 3).

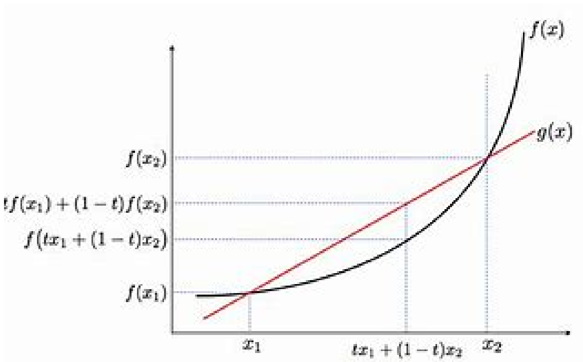
Lako je vidjeti da su afine funkcije istodobno i konveksne i konkavne, no nisu strogo konveksne ni strogo konkavne.

Provjeriti je li neka funkcija konveksna koristeći samo definiciju općenito nije lako. Ako je riječ o diferencijabilnoj funkciji mogu nam pomoći karakterizacijski teoremi koji iskazuju uvjete konveksnosti prvoga i drugoga reda.

Teorem 4. (Uvjet konveksnosti prvoga reda) *Neka je $f\colon D \to \mathbb{R}$, gdje je $D \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup, diferencijabilna, to jest neka $\nabla f(x)$ postoji za svaki $x \in D$. Tada vrijedi: f je konveksna ako i samo ako je D konveksan skup i*

$$f\left(y\right) \geq f\left(x\right) + \nabla f\left(x\right)^T \left(y - x\right)$$

za sve $x, y \in D$.



Slika 3

Teorem 5. (Uvjet konveksnosti drugoga reda) *Neka je* $f\colon D \to \mathbb{R}$, *gdje je* $D \subseteq \mathbb{R}^n$ *otvoren skup, dvaput diferencijabilna, to jest neka* $\nabla^2 f(x)$ *postoji za svaki* $x \in D$. *Tada vrijedi:* f *je konveksna ako i samo ako je* D *konveksan skup i* $\nabla^2 f(x)$ *pozitivno semidefinitna matrica za sve* $x \in D$.

Da je $\nabla^2 f(x)$ pozitivno semidefinitna matrica zapisujemo kraće kao

$$\nabla^2 f(x) \succeq \mathbf{0}.$$

Pogledajmo što se događa ako je $n = 1$, to jest ako promatramo funkcije definirane na domenama u $\mathbb{R}$. Primijetimo da su konveksne domene u $\mathbb{R}$ intervali (otvoreni ili zatvoreni), pa bi D iz prethodnih teorema bio neki otvoreni interval $I \subseteq \mathbb{R}$. Uvjeti konveksnosti prvoga i drugoga reda se svode na

$$f(y) \geq f(x) + f'(x)(y - x), \text{ za sve } x, y \in I,$$

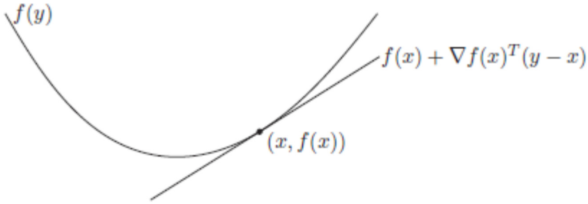
odnosno

$$f''(x) \geq 0, \text{ za sve } x \in I.$$

Ovaj potonji uvjet za drugu derivaciju je vjerojatno svima poznat jer ga koristimo kod ispitivanja toka i crtanja grafa funkcije, no uvjet prvoga reda je, iako manje poznat, jednako važan u raznim primjenama, posebno kod traženja potporne hiperravnine. Uočimo da se u slučaju kada je domena interval u $\mathbb{R}$ to svodi na postojanje tangente koja za konveksnu funkciju uvijek leži ispod njenoga grafa. To se lako vidi ako se sjetimo da je koeficijent smjera tangente u točki $(x_0, f(x_0))$ upravo $f'(x_0)$, pa je jednadžba tangente na graf funkcije f u toj točki dana izrazom

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Dakle uvjet konveksnosti prvoga reda nam govori da će tangenta biti potporni pravac grafa funkcije u točki $(x_0, f(x_0))$. Ovo je ilustrirano slikom 4.



Slika 4

Neke poznate konveksne funkcije su:

- eksponencijalna funkcija,
- opća potencija x^a ako je $a \in \mathbb{R} \setminus \langle 0, 1 \rangle$ i $x > 0$,
- sve norme,
- negativni logaritam, to jest $-\log x$ ako je $x > 0$,
- negativna entropija, to jest $x \log x$ ako je $x > 0$,
- maksimum po točkama,
- geometrijska sredina.

Osim prije spomenutih karakterizacija konveksnosti za diferencijabilne funkcije postoji i lijepa međuigra konveksnosti neke funkcije i njenih podnivo skupova i njenoga epigrafa.

Podnivo skup funkcije $f\colon D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^n$, je za neki $\alpha \in \mathbb{R}$ skup

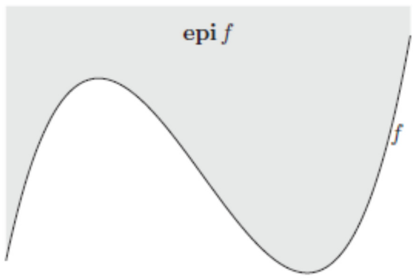
$$C_\alpha = \{x \in D \mid f(x) \leq \alpha\}.$$

Može se lako dokazati da je za konveksnu funkciju pripadni podnivo skup C_α konveksan za bilo koji $\alpha \in \mathbb{R}$. Obrat ne vrijedi: neka funkcija može imati sve podnivo skupove konveksne, a sama ipak ne biti konveksna. Zgodan primjer je funkcija $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = -e^x$ čiji su svi podnivo skupovi konveksni dok je ona sama strogo konkavna. Ovo svojstvo konveksnih funkcija možemo koristiti kada želimo dokazati konveksnost nekoga skupa koji se može promatrati kao podnivo skup neke funkcije. Ako je pripadna funkcija konveksna takav je i promatrani skup.

Veza konveksnosti funkcije i njenoga epigrafa je još ljepša. Epigraf funkcije $f\colon D \to \mathbb{R},\ D \subseteq \mathbb{R}^n$, je skup

$$\mathbf{epi}f = \{(x,t) \mid x \in D \text{ i } f(x) \leq t\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Vrijedi: f je konveksna ako i samo ako je njen epigraf konveksan skup. Na slici 5 vidimo epigraf jedne nekonveksne funkcije koji očito nije konveksan skup.



Slika 5

Slično kao u slučaju podnivo skupa ova karakterizacija može biti vrlo korisna u praksi što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 1. *Neka je $a > 0,\ b, c \in \mathbb{R}$, te*

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax^2 + bx + c \leq y\right\}.$$

Dokažimo da je S konveksan skup.
Znamo da je f konveksna ako i samo ako je koneveksan njen epigraf. U ovom konkretnom slučaju je

$$S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : ax^2 + bx + c \leq y\right\} = \mathbf{epi}f$$

za funkciju f definiranu na $\mathbb{R}$ s $f(x) = ax^2 + bx + c$ koja je zbog $a > 0$ konveksna (jer je $f''(x) = a > 0$), pa je takav i S.

I za funkcije postoje korisne operacije koje čuvaju konveksnost. Relativno lako je dokazati da nenegativna težinska suma funkcija čuva konveksnost: ako je $k \in \mathbb{N}, w_1, \ldots, w_k$ nenegativni realni brojevi i $f_1, \ldots, f_k$ konveksne funkcije (s odgovarajućim domenama) onda je i funkcija $w_1 f_1 + \cdots + w_k f_k$ konveksna. Ovo svojstvo se proteže na beskonačne sume i na integrale. Kompozicija konveksne i afine funkcije je konveksna funkcija. Ako su f i g konveksne funkcije onda je funkcija g definirana kao njihov maksimum po točkama isto konveksna funkcija.

Kada je riječ o kompoziciji dviju konveksnih funkcija često se pogrešno zaključuje da je njihova kompozicija također konveksna funkcija, no to ne mora biti tako. Uzmimo radi jednostavnosti dvije funkcije definirane u $\mathbb{R}$. Neka su $f : I \to \mathbb{R}$ i $g : J \to \mathbb{R}$ konveksne funkcije takve da je $f(I) \subseteq J$. Uzmimo proizvoljne $x, y \in I$ i $\lambda \in [0,1]$. Da bi $g \circ f$ bila konveksna treba vrijediti

$$(g \circ f)(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda (g \circ f)(x) + (1-\lambda)(g \circ f)(y).$$

Vidjet ćemo da pretpostavka da su f i g konveksne nije dovoljna da bi vrijedila gornja nejednakost.

Znamo da je

$$g(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)$$

i

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y), \tag{1}$$

no da bismo djelovali s g na nejednakost (1) tako da ostane sačuvana morali bismo znati da je g nesilazna funkcija. Ako ona jest takva iz gornjega odmah slijedi

$$\begin{aligned}
&(g \circ f)(\lambda x + (1-\lambda) y) \\
&= g(f(\lambda x + (1-\lambda) y)) \\
&\leq g(\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)) \\
&\leq \lambda g(f(x)) + (1-\lambda) g(f(y)) \\
&= \lambda (g \circ f)(x) + (1-\lambda)(g \circ f)(y),
\end{aligned}$$

pa je $g \circ f$ konveksna.

Još je lakše vidjeti što su dovoljni uvjeti za funkciju g ako je riječ o derivabilnim funkcijama. Znamo da vrijedi

$$(g \circ f)''(x) = g''(f(x))(f'(x))^2 + g'(f(x)) f''(x).$$

Da bi za sve $x \in I$ vrijedilo $(g \circ f)''(x) \geq 0$ dovoljno je da su f i g konveksne (pa su im druge derivacije nenegativne) te g nesilazna (pa je joj je prva derivacija nenegativna).

Da pak sama konveksnost obiju funkcija općenito nije dovoljna lako je dokazati kontraprimjerom. Uzmemo li f i g definirane na $\mathbb{R}$ s $f(x) = x^2$ i $g(x) = -x$ vidimo da su obje konveksne no njihova kompozicija $g \circ f$ definirana s $(g \circ f)(x) = -x^2$ nije konveksna (jer je g silazna funkcija). Do analognih zaključaka možemo doći za razne kompozicije konveksnih, konkavnih i monotonih funkcija.

Slično kao kod konveksnih skupova operacije koje čuvaju konveksnost funkcija možemo koristiti da bismo na jednostavniji način ispitali konveksnost neke funkcije. Na primjer, ako je f konveksna funkcija sa slikom u $\langle -\infty, 0\rangle$, onda odmah možemo zaključiti da je funkcija g definirana s $g(x) = -\log(-f(x))$ konveksna jer je $-f$ konkavna i negativni logaritam silazna konveksna funkcija (dvostruko okretanje nejednakosti nas vraća na isto).

Sljedeći teorem govori o svojstvu konveksnih funkcija koje je iznimno važno u optimizaciji.

Teorem 6. *Svaki lokalni minimum konveksne funkcije je ujedno i globalni minimum. Strogo konveksna funkcija ima najviše jedan lokalni minimum.*

Jasno je da analogna tvrdnja vrijedi za lokalne maksimume strogo konkavnih funkcija. Strogo konveksna funkcija definirana na zatvorenom konveksnom skupu svoj maksimum doseže na rubu područja definicije. Na primjer, ako je strogo konveksna funkcija definirana na zatvorenom intervalu $[a, b]$ onda je njena maksimalna vrijednost $f(a)$ ili $f(b)$.

Za optimizacijske probleme u kojima se javljaju samo konveksne funkcije kažemo da su problemi konveksne optimizacije i za njihovo rješavanje postoje vrlo efikasni i dobro istraženi algoritmi koji se baziraju na nekim od prije spomenutih lijepih svojstava konveksnih skupova i konveksnih funkcija. Neki od najpoznatijih optimizacijskih problema koji se često javljaju u praksi kao što su problemi linearnog i kvadratnog programiranja spadaju među probleme konveksne optimizacije. Upravo zbog toga je vrlo važno znati odrediti jesu li funkcije koje se javljaju u nekom optimizacijskom problemu konveksne te posebno jesu li njihove domene konveksni skupovi.

Napomenimo na kraju da konveksne funkcije jedne varijable imaju još jedno lijepo svojstvo: ako su definirane na otvorenom intervalu onda su neprekidne. Drugim riječima, ako su definirane na zatvorenom ili poluotvorenom intervalu prekidi mogu nastati samo u krajnjim točkama intervala i to tako da je pripadna krajnja točka grafa izmaknuta prema gore. Lako se provjeri da je, na primjer, funkcija $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definirana s

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \langle 0, 1\rangle \\ 1, & \text{inače} \end{cases}$$

konveksna iako ima uklonjive prekide u točkama 0 i 1.

Više o konveksnim funkcijama može se naći u [3] i [2].

4. Jensenova nejednakost

Najvažnija nejednakost za konveksne funkcije je nesumnjivo Jensenova nejednakost iz 1906. godine [5, str. 43] koja ima mnoštvo primjena u analizi, statistici i financijskoj matematici. Moglo bi se reći da je ona induktivno poopćenje definicijske nejednakosti za konveksne funkcije jer tvrdi sljedeće (navodimo je u njenom najjednostavnijem diskretnom obliku za funkciju definiranu na intervalu).

Teorem 7. (Jensenova nejednakost) *Neka je $I \subset \mathbb{R}$ interval, $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in I$. Ako je $f\colon I \to \mathbb{R}$ konveksna onda za sve nenegativne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ takve da je $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ vrijedi*

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i). \tag{2}$$

Ako je f strogo konveksna onda je nejednakost (2) *stroga osim ako su svi x_i jednaki.*

Dokaz Jensenove nejednakosti provodi se indukcijom po n i vrlo je sličan onome kojega smo dali za konveksne ljuske, pa ga ovdje preskačemo.

Uočimo da s lijeve strane Jensenove nejednakosti (2) funkcija f djeluje na konveksnu kombinaciju točaka $x_1, \ldots, x_n \in I$ pa je tu važno prije spomenuto svojstvo da konveksne kombinacije točaka konveksnoga skupa ostaju u njemu, a u ovom slučaju u intervalu I.

Nenegativne brojeve λ_i nazivamo *težinama*. Ovo je u vezi s jednom važnom interpretacijom Jensenove nejednakosti u teoriji vjerojatnosti: ako je X slučajna varijabla i f konveksna funkcija definirana na intervalu koji sadrži sliku od X onda vrijedi

$$f\left(\boldsymbol{E}\left[x\right]\right) \leq \boldsymbol{E}\left[f\left(x\right)\right],$$

pod uvjetom da ova očekivanja postoje.

Možda je manje poznata činjenica da su mnoge važne nejednakosti koje koristimo u raznim granama matematike jednostavne posljedice Jensenove nejednakosti, to jest konveksnosti nekih posebnih funkcija. Poznati primjeri su Hölderova nejednakost, nejednakost Minkowskoga, Cauchy-Schwarzova nejednakost, Youngova nejednakost, A-G nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine te mnoge druge važne nejednakosti.f

Za ilustraciju navodimo kako se iz Jensenove kao poseban slučaj dobije A-G nejednakost (kasnije ćemo u primjerima često koristiti A-G nejednakost pa treba zapamtiti da tada ustvari koristimo konveksnost).

Težinska A-G nejednakost kaže da za bilo koje pozitivne $x_1, \ldots, x_n$ i nenegativne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ takve da je $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ vrijedi

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}.$$

U svom najjednostavnijem obliku kada su sve težine jednake, to jest za $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 1/n$ ona glasi

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}.$$

A-G nejednakost se lako dobije iz Jensenove nejednakosti ako funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty\rangle$ definiramo s $f(t) = e^t$. Ona je konveksna, pa za sve $t_i \in \mathbb{R}$ i sve nenegativne $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ takve da je $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ vrijedi

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(t_i),$$

to jest

$$e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i t_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{t_i}.$$

Uzmemo li posebno $t_i = \ln x_i$ (što možemo jer su po pretpostavci x_i pozitivni) dobijemo

$$e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln x_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{\ln x_i},$$

to jest

$$e^{\sum_{i=1}^{n} \ln (x_i)^{\lambda_i}} = e^{\ln \prod\limits_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e^{\ln x_i},$$

iz čega slijedi

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i.$$

5. Primjene

Sada ćemo vidjeti kako se prije rečeno može zgodno primijeniti u rješavanju raznih problemskih zadataka. Dodatne zanimljive primjere može se naći u [3].

Zadatak 1. *Dokažite da za bilo koji prirodni broj n vrijedi*

$$\sqrt{1^2 + 1} + \sqrt{2^2 + 1} + \cdots + \sqrt{n^2 + 1} \geq \frac{n}{2}\sqrt{n^2 + 2n + 5}.$$

Rješenje. Uočimo da su svi izrazi s lijeve strane nejednakosti oblika $\sqrt{k^2+1}$, pa možemo zamisliti da su vrijednosti funkcije $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirane s $f(x) = \sqrt{x^2+1}$ za posebno izabrane $x \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Da je f konveksna možemo zaključiti na više načina, no kako je derivabilna najlakše je ispitati predznak njene druge derivacije. Vrijedi

$$f''(x) = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0, \text{ za sve } x \in \mathbb{R},$$

pa zaključujemo da je f (strogo) konveksna što znači da za nju vrijedi Jensenova nejednakost. Izabrat ćemo težine λ_i tako da su sve jednake, to jest $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 1/n$. Na taj način iz Jensenove nejednakosti dobijemo

$$f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1)+\cdots+f(x_n)}{n}.$$

Posebno za $x_1 = 1,\ x_2 = 2, \ldots, x_n = n$ slijedi

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1+\cdots+n}{n}\right) &= f\left(\frac{n(n+1)}{2n}\right) \\ &= f\left(\frac{n+1}{2}\right) \leq \frac{f(1)+\cdots+f(n)}{n}, \end{aligned}$$

to jest

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2+1} &= \frac{1}{2}\sqrt{n^2+2n+5} \\ &\leq \frac{\sqrt{1^2+1}+\sqrt{2^2+1}+\cdots+\sqrt{n^2+1}}{n} \end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$\sqrt{1^2+1}+\sqrt{2^2+1}+\cdots+\sqrt{n^2+1} \geq \frac{n}{2}\sqrt{n^2+2n+5}.$$

Zadatak 2. *Zamislimo da smo prirodne brojeve od* 1 *do* 100 *obojali s* 10 *različitih boja* $b_1, \ldots, b_{10}$. *Za koliko najmanje parova* $\{m, n\} \subset \{1, 2, \ldots, 100\}$ *znamo da će imati istu boju?*

Rješenje. Označimo s x_1 broj elemenata iz $\{1, 2, \ldots, 100\}$ koji imaju boju b_1, s x_2 broj elemenata iz $\{1, 2, \ldots, 100\}$ koji imaju boju b_2, itd. Znamo da vrijedi

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{10} = 100.$$

Ako boju b_i ima x_i brojeva, onda parova iste boje b_i ima

$$\binom{x_i}{2} = \frac{x_i(x_i-1)}{2}$$

pa ustvari želimo minimizirati

$$\binom{x_1}{2} + \binom{x_2}{2} + \cdots + \binom{x_{10}}{2}.$$

Promotrimo funkciju $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu izrazom

$$f(x) = \binom{x}{2} = \frac{x(x-1)}{2}.$$

Lako se vidi da je ona konveksna pa za nju vrijedi Jensenova nejednakost, posebno za $n = 10$ i sve jednake težine. Dakle

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{10}}{10}\right) &\le \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_{10})}{10} \\ &= \frac{1}{10}\left(\binom{x_1}{2} + \binom{x_2}{2} + \cdots + \binom{x_{10}}{2}\right). \end{aligned}$$

Vidimo da izraz kojega želimo minimizirati nikada nije manji od

$$10f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_{10}}{10}\right) = 10f(10) = 10 \cdot 45 = 450.$$

Najmanji broj parova iste boje je 450.

Zadatak 3. *Dokažite da za sve $a, b, c, d > 0$ vrijedi*

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) \ge (ac + bd)^2.$$

Rješenje. Gornja nejednakost lako slijedi iz Cauchy-Schwarzove nejednakosti za $n = 2$ no možemo je dokazati i bez toga (sjetimo se da je Cauchy-Schwarzova nejednakost baš kao i A-G nejednakost posljedica Jensenove nejednakosti). Promotrimo A-G nejednakost za dva pozitivna broja s jednakim težinama:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \ge \sqrt{x_1 x_2}.$$

Za $x_1 = a^2 d^2$ i $x_2 = b^2 c^2$ dobijemo

$$\frac{a^2 d^2 + b^2 c^2}{2} \ge \sqrt{a^2 b^2 c^2 d^2} = abcd,$$

odnosno

$$a^2 d^2 + b^2 c^2 \ge 2abcd.$$

Dodamo li objema stranama gornje nejednakosti $a^2 c^2 + b^2 d^2$ dobijemo

$$a^2 d^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2 + b^2 d^2 \ge 2abcd + a^2 c^2 + b^2 d^2,$$

što možemo pisati kao

$$\left(a^2 + b^2\right)\left(c^2 + d^2\right) \ge (ac + bd)^2.$$

Zadatak 4. *Odredite sva realna rješenja jednadžbe*

$$2^x + x^2 = 2 - \frac{1}{2^x}.$$

Rješenje. Uočimo najprije da iz A-G nejednakosti za dva broja s jednakim težinama slijedi

$$\frac{2^x + \frac{1}{2^x}}{2} \geq \sqrt{2^x \frac{1}{2^x}} = 1,$$

odnosno da je

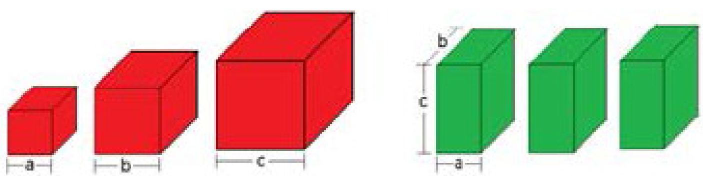
$$2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2,$$

iz čega slijedi

$$2 - x^2 = 2^x + \frac{1}{2^x} \geq 2.$$

Dakle mora vrijediti $x^2 \leq 0$, odnosno $x = 0$ pa je to jedino realno rješenje polazne jednadžbe.

Zadatak 5. *Prodavaonica slatkiša prodaje dva različita paketa slatkiša od želea iste cijene: u jednom su paketu tri crvene žele kocke stranica a, b, c, dok su u drugom paketu tri jednaka zelena žele kvadra dimenzija $a \times b \times c$ (slika 6). Koji paket treba kupiti da bismo dobili više želea?*



Slika 6

Rješenje. Crvenog želea dobijemo ukupno $a^3 + b^3 + c^3$ dok zelenoga dobijemo $3abc$. Iz A-G nejednakosti za tri pozitivna broja s jednakim težinama posebno za $x_1 = a^3,\ x_2 = b^3$ i $x_3 = c^3$ slijedi

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3 b^3 c^3} = abc.$$

Dakle vrijedi $a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ pa je bolje kupiti crveni žele.

Zadatak 6. *Odredite sva pozitivna realna rješenja sustava*

$$\begin{aligned} 4x + \frac{18}{y} &= 14 \\ 2y + \frac{9}{z} &= 15 \\ 9z + \frac{16}{x} &= 17. \end{aligned}$$

Rješenje. Slično kao u prethodnom zadatku iz A-G nejednakosti slijedi

$$\frac{4x + \frac{16}{x}}{2} \geq \sqrt{4x\frac{16}{x}} = 8,$$

to jest

$$4x + \frac{16}{x} \geq 16$$

i analogno

$$\begin{aligned} 2y + \frac{18}{y} &\geq 12 \\ 9z + \frac{9}{z} &\geq 18. \end{aligned}$$

Zbrajanjem dobijemo

$$4x + \frac{16}{x} + 2y + \frac{18}{y} + 9z + \frac{9}{z} \geq 16 + 12 + 18 = 46.$$

No zbrajanjem jednadžbi sustava dobijemo

$$4x + \frac{18}{y} + 2y + \frac{9}{z} + 9z + \frac{16}{x} = 14 + 15 + 17 = 46$$

iz čega možemo zaključiti da i nejednakosti dobivene iz A-G nejednakosti moraju u ovom slučaju biti jednakosti, to jest da vrijedi

$$4x + \frac{16}{x} = 16,\ 2y + \frac{18}{y} = 12,\ 9z + \frac{9}{z} = 18,$$

iz čega lako slijedi

$$x = 2,\ y = 3,\ z = 1.$$

Zadatak 7. *Odredite minimalnu vrijednost za* $\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right)$ *pod uvjetom da su* $x, y > 0$ *i* $x + y = 8$.

Rješenje. Ovo je pravi optimizacijski problem s jednakosnim i nejednakosnim uvjetima. Mi ćemo ga ipak riješiti bez korištenja optimizacijskih metoda.

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right) &= 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}\\ &= \frac{xy+x+y+1}{xy} = \frac{xy+9}{xy}\\ &= 1+\frac{9}{xy}.\end{aligned}$$

Iz A-G nejednakosti znamo da vrijedi

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

što u našem slučaju postaje

$$4 \geq \sqrt{xy},$$

odnosno (sjetimo se da su x i y pozitivni)

$$xy \leq 16$$

pa je

$$\frac{1}{xy} \geq \frac{1}{16}.$$

Dakle,

$$1+\frac{9}{xy} \geq 1+\frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

pa možemo reći da je minimalna vrijednost $\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)$ pod danim uvjetima $\frac{25}{16}$.

Zadatak 8. *U malenoj tvornici drvenih igračaka izrađuju se dvije vrste kamiončića: standardni i deluxe model. Za izradu standardnoga modela potrebno je 2 sata rezbarenja i 2 sata bojanja dok je za izradu deluxe modela potrebno 2 sata rezbarenja i 4 sata bojanja. Tvornica ima 2 modelara i 3 bojadisara od kojih nijedan ne radi više od 40 sati tjedno. Zarada na jednom standardnom modelu je 3 eura a na deluxe modelu 4 eura. Ako pod pretpostavkom da će prodati sve izrađene kamiončiće tvornica želi ostvariti maksimalni mogući prihod koliko kojega modela treba izraditi u jednome tjednu?*

Rješenje. Ovaj zadatak predstavlja tipičan problem linearnog programiranja ili kraće LP problem (doduše ovaj je jako male dimenzije). Da bismo shvatili kako se jednostavno odredi rješenje LP problema moramo se najprije upoznati s nekim pojmovima i tvrdnjama.
U standardnom LP problemu funkcija koju minimiziramo, a koja se inače u optimizaciji zove *funkcija cilja*, je afina funkcija. Funkcije koje određuju uvjete također sve moraju biti afine. Sjetimo se da su sve afine funkcije konveksne (i konkavne) pa je svaki LP problem ujedno i problem konveksne optimizacije bez obzira traži li se pod zadanim uvjetima minimum ili maksimum funkcije cilja. Skup točaka koje zadovoljavaju uvjete problema naziva se *dopustivim skupom*. U slučaju LP problema dopustivi skup je presjek hiperravnina i poluprostora to jest poliedar (u optimizaciji je ovo poliedar dok općenita definicija poliedra u literaturi znatno varira). Ovisno o tome je li taj poliedar ograničen ili nije mogu se dogoditi dva slučaja. Ako je poliedar ograničen onda LP problem ima rješenje i ono se nalazi u nekom od vrhova toga poliedra. To rješenje nazivamo *optimalnom točkom*. Vrijednost funkcije cilja u toj točki naziva se *optimalnom vrijednošću*. Ako poliedar nije ograničen onda problem ne mora imati rješenje no ako ga ima opet je u nekom od vrhova toga poliedra.

Označimo

$$\begin{aligned} x &= \text{broj kamionči\'{c}a standardnoga modela} \\ y &= \text{broj kamionči\'{c}a deluxe modela.} \end{aligned}$$

Uočimo da x i y moraju biti nenegativni cijeli brojevi. U našem slučaju funkcija cilja je dana izrazom

$$P(x,y) = 3x + 4y.$$

Ograničenja su određena brojem sati potrebnih za izradu i brojem raspoloživih radnih sati modelara i bojadisara. Iz toga dobijemo sljedeće uvjete:

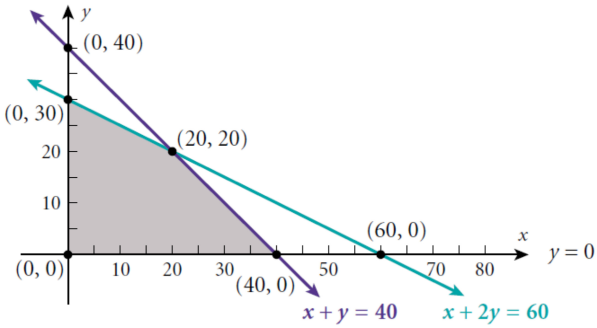
$$\begin{aligned} 2x + 2y &\leq 80 \\ 2x + 4y &\leq 120 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Ovakav problem linearnog programiranja zapisujemo o obliku

$$\max 3x + 4y$$

$$\begin{aligned} x+y &\leq 40 \\ x+2y &\leq 60 \\ x &\geq 0 \\ y &\geq 0. \end{aligned}$$

Sljedeći korak je iscrtavanje dopustivoga skupa koji je prikazan na slici 7.



Slika 7

Kako vidimo dobiveni poliedar je ograničen pa rješenje postoji i ono se nalazi u nekom od njegovih vrhova. Ostaje ispitati u kojem.

(x, y)	$P(x, y)$
$(0, 0)$	0
$(0, 30)$	120
$(40, 0)$	120
$(20, 20)$	140

Iz tablice je jasno da ako tvornica želi ostvariti najveći mogući prihod treba izraditi jednako standardnih i deluxe kamiončića.

Da bi se matematički strogo objasnilo zašto se rješenje LP problema (ako postoji) uvijek nalazi u nekom od vrhova pripadnog poliedra treba uvesti dosta novih pojmova i nekoliko jakih teorema čemu ovdje nije mjesto. No intuitivno je to lako shvatiti ako zamislimo što se događa u jednoj dimenziji. Poliedar bi u tom slučaju postao interval (zatvoreni, poluotvoreni ili otvoreni), a funkcija cilja bi bila afina funkcija jedne varijable pa bi joj graf bio pravac. Taj pravac, ovisno o koeficijentu smjera, zatvara s pozitivnim dijelom osi x šiljati ili tupi kut, to jest funkcija cilja je rastuća ili padajuća. Promotrimo najprije slučaj kada strogo raste ili pada, to jest kada nije riječ o konstantnoj funkciji. Znamo da na zatvorenom intervalu afina funkcija (koja je uvijek neprekidna) doseže svoj minimum i maksimum te da su oni zbog stroge monotonosti sigurno u krajevima toga intervala. Ako je interval poluotvoren funkcija će poprimiti, ovisno o tome raste li ili pada, samo minimum ili samo maksimum. Ako je interval otvoren neće imati nijedno od toga osim ako se ne radi o konstantnoj funkciji što je degenerirani slučaj kada su sve točke intervala rješenja ovakvoga problema.

Zainteresirani čitatelj sve detalje o LP problemima može naći u udžbeniku [4] koji je dostupan na mrežnim stranicama Odjela za matematiku Sveučilišta u Osijeku.

Literatura

[1] P.M. Gruber, J.M. Wills, *Convexity and its applications*, Birkhäuser Verlag, Basel-Boston, Mass., 1983.

[2] J.B. Hiriart-Urruty, C. Lemaréchal, *Fundamentals of convex analysis. Abridged version of Convex analysis and minimization algorithms I*, Grundlehren Text Editions, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[3] S.G. Krantz, *Convex analysis*, Textbooks in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 2015.

[4] I. Kuzmanić, K. Sabo, *Linearno programiranje*, udžbenik Sveučilišta u Osijeku, 2016.

[5] J.E. Pečarić, Y.L. Tong, *Convex functions, partial orderings, and statistical applications*, Mathematics in Science and Engineering, 187, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1992.

[6] I. Smoljko, *Konveksni skupovi*, diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet, Split, 2021.

Milica Klaričić Bakula
Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Splitu, Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Hrvatska
E-mail adresa: `milica@pmfst.hr`

Iva Smoljko
Ignitech Solutions, Idrijska 26, 10000 Zagreb, Hrvatska
E-mail adresa: `iva.smoljko@ignitech.hr`