ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.6 (2023) 115–128
https://doi.org/10.32817/amssd.6.8

Zaprimljen: 29. svibnja 2023.
Prihvaćen: 24. rujna 2023.

Metoda bisekcije primjenom Maxima računalne aplikacije

Reni Banov, Martina Benković, Mandi Orlić Bachler

Sažetak

Tijekom izvođenja nastave iz matematičkih kolegija na stručnim studijima pokazuje se korisnim primijeniti računalne aplikacije za potrebe detaljne ilustracije numeričkih metoda. Posebice, sa stanovišta boljeg razumijevanja izvođenja numeričkih algoritama korisno je studentima prezentirati rezultate međukoraka u izvođenju algoritma na računalu. Na Tehničkom veleučilištu opredjelili smo se za primjenu računalne aplikacije Maxima, te je ona uključena u redovni program preddiplomskog stručnog studija graditeljstva. U ovom radu izložena je numerička metoda za nalaženje nultočaka neprekidne funkcije, metoda bisekcije, te je prikazan pripadni algoritam izveden u računalnoj aplikaciji Maxima.

Ključni pojmovi: nultočke funkcije, metoda bisekcije, Maxima

1. Uvod

U drugom semestru preddiplomskog stručnog studija graditeljstva na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu, u sklopu kolegija Matematika 2 obrađuju se numeričke metode za rješavanje problema poput određivanja nultočaka funkcija, interpolacije funkcije, numeričke integracije te numeričkog rješavanja diferencijalnih jednadžbi. S obzirom na razvoj digitalnih računala, spomenute metode lakše se primjenjuju korištenjem raznih računalnih aplikacija za simboličko i numeričko računanje poput Maxime koju studenti uče koristiti u sklopu kolegija *Računarstvo u graditeljstvu* [1, 2]. Osim primjene programskih rješenja za ilustraciju matematičkih metoda tijekom dugogodišnje nastavne prakse, korisnim se pokazuje konceptualni prikaz složenih matematičkih pojmova, primjerice, integrala na prvoj godini studija [3]. Primjenom takve prakse u nastavi studentima se znatno jednostavnije mogu približiti novi pojmovi, dapače time se podiže njihova motivacija za daljnjim usvajanjem složenih matematičkih pojmova.

U ovom radu opisati ćemo problem numeričkog rješavanja (nelinearnih) jednadžbi te mogućnosti koje se za rješavanje tih problema pružaju studentima u sklopu navedenog kolegija s naglaskom na korištenju aplikacije Maxima.

Dakako, prvi važan korak je objasniti matematičku pozadinu problema za metodu rješavanja kako bi studenti razumjeli i znali napisati algoritme koje koriste u aplikaciji Maxima. Budući da se numerička matematika bavi približnim ili aproksimativnim rješavanjem matematičkih problema, tada su rješenja dobivena numeričkim metodama približna i ovise o grešci aproksimacije. Kako bi se studentima ukazalo na važnost greške aproksimacije, odnosno točnosti (kolika je dozvoljena greška) s obzirom na to kojom numeričkom metodom pronalaze rješenja, na početku se pokazuju i rješavaju primjeri jednadžbi koje su linearne ili rješive bez korištenja numeričkih metoda te se uspoređuju njihova točna i približna rješenja. Prisjetimo se nekih osnovnih pojmova i pogledajmo kako se još može promatrati problem rješavanja nelinearne jednadžbe.

Neka je $f\colon I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ neprekidna nelinearna funkcija, rješavamo sljedeći problem

$$f(x) = 0\,, \tag{1}$$

odnosno određujemo nultočke funkcije f. Budući da se studenti preddiplomskog studija graditeljstva, koji znaju skicirati elementarne funkcije, susreću s problemom traženja nultočke i s problemom traženja presjeka dviju funkcija, povučena je paralela između ova dva problema s namjerom boljeg razumijevanja te lakšeg rješavanja istih.

Definicija 1. *Nultočkama funkcije f, to jest rješenjima pripadajuće nelinearne jednadžbe nazivamo sve točke $c \in \mathbb{R}$ za koje vrijedi $f(c) = 0$, odnosno točke u kojima graf funkcije f siječe x-os.*

Teorem 2. *Ako neprekidna funkcija f na krajevima intervala $[a, b]$ ima vrijednosti suprotnih predznaka, odnosno vrijedi*

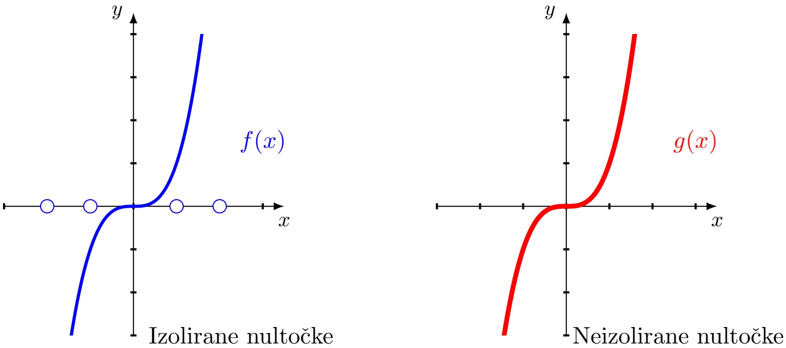
$$f(a) \cdot f(b) < 0\,, \tag{2}$$

onda na tom intervalu postoji barem jedna njena nultočka.

Ukoliko prva derivacija funkcije ne mijenja predznak te je neprekidna na otvorenom intervalu $\langle a, b\rangle$, onda će nultočka biti jedinstvena.

Definicija 3. *Za nultočku c kažemo da je izolirana ako postoji kružnica radijusa $\epsilon > 0$ oko c takva da je ona jedina nultočka unutar te kružnice. U suprotnom kažemo da nultočka c nije izolirana.*

Na slici 1 prikazani su primjeri funkcija s izoliranim i neizoliranim nultočkama.



Slika 1. Na slici su prikazane (lijevo) funkcija f koja ima izolirane nultočke i (desno) funkcija g koja nema izoliranih nultočaka.

Prvi korak pri rješavanju problema (1) je lociranje nultočki, odnosno određivanje (pod)intervala $I = [a, b]$ u kojem se one nalaze, a preduvjeti za to su:

1. neprekidnost funkcije na intervalu na kojem je definirana (teorem 2),
2. izoliranost nultočaka na tom intervalu (definicija 3).

Dakle, potrebno je pronaći interval $I = [a, b]$ unutar kojega se nalazi barem jedna izolirana nultočka funkcije. Takav interval možemo pronaći na više načina, a jedna od metoda za lociranje nultočaka zasniva se na grafičkom prikazu funkcije f. Međutim, ukoliko za skiciranje grafa funkcije ne koristimo neku računalnu aplikaciju, a graf funkcije f nije jednostavno skicirati, tada je korisno funkciju f zapisati u obliku $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. Pritom napomenimo kako odabir funkcija f_1 i f_2 ne mora biti jedinstven, te je funkcije f_1 i f_2 poželjno odabrati tako da je što jednostavnije skiciranje njihovih grafova. Sada možemo reći da je problem (1) ekvivalentan problemu

$$f_1(x) = f_2(x)\,, \tag{3}$$

odnosno rješenja jednadžbe (1) su apscise sjecišta grafova funkcija f_1 i f_2. Jednostavnosti radi, rješenja ćemo locirati unutar cjelobrojnih intervala $I = [\alpha, \alpha+1], \alpha \in \mathbb{Z}$ za koje vrijedi $f(\alpha) \cdot f(\alpha+1) < 0$, odnosno ispunjen je uvjet (2).

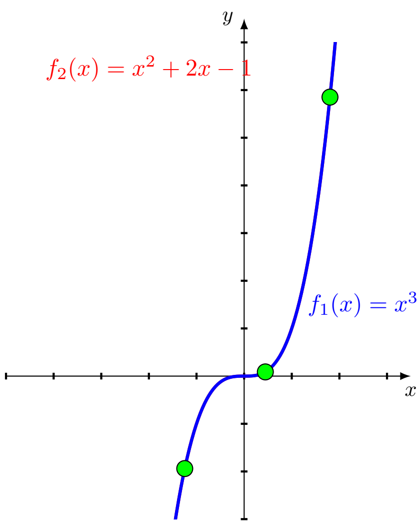
Napomena 4. *Lociranje nultočke funkcije f može se provesti određivanjem točaka u kojima se prva i druga derivacija funkcije poništavaju. Međutim, kako na kolegiju Matematika 2 intervale lociramo grafičkim prikazivanjem funkcija koje studenti trebaju znati skicirati bez upotrebe računalne aplikacije, u ovom ćemo se radu ograničiti samo na grafičku metodu.*

Primjer 1. *Locirajmo intervale u kojima se nalaze nultočke funkcije $f(x) = x^3 - x^2 - 2x + 1$.*

Ponajprije primijetimo kako je funkcija f polinom trećeg stupnja te može imati najviše tri realne nultočke ili jednu realnu i dvije kompleksno konjugirane nultočke. Tražimo intervale u kojima se nalaze samo realne nultočke funkcije, odnosno realna rješenja jednadžbe $f(x) = 0, neparnekratnosti$. Stoga ćemo za zadanu funkciju f locirati jedan ili tri intervala.

Iz $f(x) = 0$ zaključujemo kako se radi o problemu određivanja točaka u kojima se poklapaju vrijednosti dviju funkcija $f_1(x) = x^3$ i $f_2(x) = x^2 + 2x - 1$. Vrijedi

$$f(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^3 = x^2 + 2x - 1.$$



Slika 2. Lociranje intervala u kojima se nalaze zajedničke točke grafova funkcija $f_1(x) = x^3$ i $f_2(x) = x^2 + 2x - 1$.

Iz slike 2 vidimo kako se grafovi dvije funkcije sijeku u tri točke te da postupak lociranja intervala za nalaženje sjecišta možemo započeti od točke $\alpha = -2$. Naime, iz grafa možemo pretpostaviti da se nultočke nalaze u intervalima: $[-2, -1]$, $[0, 1]$ i $[1, 2]$. Pomoću sljedeće tablice lako provjeravamo kako na tim intervalima zaista vrijedi uvjet (2).

$\alpha \in \mathbb{Z}$	$[\alpha, \alpha + 1]$	$f(\alpha) \cdot f(\alpha + 1)$	Nultočka
-2	$[-2, -1]$	$(-7) \cdot (1) < 0$	postoji
0	$[0, 1]$	$(1) \cdot (-1) < 0$	postoji
1	$[1, 2]$	$(-1) \cdot (1) < 0$	postoji

Iz tablice vidimo da funkcija f ima tri realne nultočke čije vrijednosti se nalaze unutar intervala: $[-2, -1]$, $[0, 1]$ i $[1, 2]$.

Napomena 5. *Kako odabir funkcija f_1 i f_2 nije jedinstven, na isti način mogli smo odabrati bilo koju ekvivalentnu algebarsku kombinaciju funkcija za koju vrijedi (3). Primjerice, iz izraza*

$$f(x) = 0 \iff x^3 - x^2 - 2x + 1 = 0 \iff x^3 + 1 = x^2 + 2x$$

možemo definirati funkcije $f_1(x) = x^3 + 1$ i $f_2(x) = x^2 + 2x$. Ukoliko grafove funkcija ne crtamo pomoću neke računalne aplikacije, onda odabir funkcija f_1 i f_2 treba biti takav da je moguće jednostavno skicirati njihove grafove. Čitatelju prepuštamo skiciranje i lociranje nultočaka za ovaj izbor funkcija f_1 i f_2.

2. Metoda polovljenja (bisekcije)

Metoda polovljenja je numerička metoda za određivanje nultočaka funkcije zasnovana na Bolzano-Weierstrassovom teoremu o svojstvima neprekidne funkcije na segmentu.

Teorem 6 (Bolzano-Weierstrassov teorem)**.** *Neka je f neprekidna realna funkcija na segmentu $I = [a, b]$. Tada vrijedi:*

1. *Funkcija f je ograničena na I.*
2. *Postoje realni brojevi $x_m, x_M \in I$ takvi da je*

$$f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M), (\forall x \in I).$$

Drugim riječima, neprekidna funkcija na segmentu I dostiže svoju najveću i najmanju vrijednost.

3. *Neprekidna funkcija na segmentu postiže svaku međuvrijednost.*

4. *Ako su $f(a)$ i $f(b)$ različitih predznaka, onda postoji bar jedan $c \in \langle a, b \rangle$ za koji vrijedi $f(c) = 0$.*

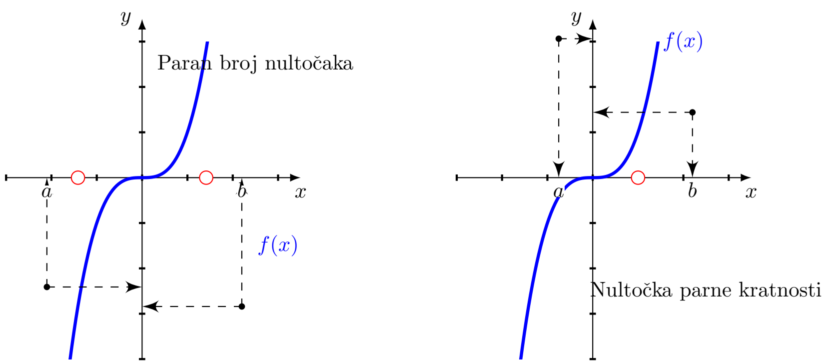
Pretpostavljena neprekidnost funkcije f na intervalu $[a, b]$ za koju vrijedi (2) povlači postojanje barem jedne nultočke na tom intervalu. Međutim, ukoliko ne vrijedi uvjet (2), odnosno ako je $f(a) \cdot f(b) > 0$, ne mora značiti da funkcija nema nultočku unutar intervala $[a, b]$. To samo znači da smo napravili lošu separaciju nultočaka te da funkcija f unutar intervala $[a, b]$ ima paran broj nultočki ili nultočku parne kratnosti (definicija 7) za algebarske funkcije (slika 3).

Definicija 7 (Algebarska kratnost nultočke)**.** *Neka je $c \in \mathbb{R}$ nultočka polinoma p. Najveći prirodni broj k, za koji postoji polinom q takav da vrijedi*

$$p(x) = (x - c)^k \, q(x), \quad q(c) \neq 0$$

nazivamo algebarska kratnost nultočke c.

Shodno tomu, nultočke parne kratnosti nije moguće odrediti metodom polovljenja [4].



Slika 3. Na slici (lijevo) prikazana je funkcija koja ima paran broj nultočki te za koju vrijedi $f(a) \cdot f(b) > 0$. Međutim, boljom separacijom nultočki u ovom slučaju lako se postiže uvjet (2). Funkcija prikazana desno na slici ima nultočku parne kratnosti te kod nje također vrijedi $f(a) \cdot f(b) > 0$, ali nije moguće postići valjanost uvjeta (2).

Metoda polovljenja sastoji se u sljedećem, nakon što smo locirali nultočku unutar intervala $I = [a_0, b_0]$ nad kojim vrijedi uvjet (2), odredimo polovište tog intervala na sljedeći način:

$$x_0 = \frac{a_0 + b_0}{2} \, .$$

Ako je $f(x_0) = 0$, pronašli smo traženu nultočku, u suprotnom „polovljenjem" intervala $[a_0, b_0]$ konstruirali smo dva nova intervala $[a_0, x_0]$ i $[x_0, b_0]$ od kojih odabiremo onaj interval nad kojim vrijedi uvjet (2). Označimo novo odabrani interval s $[a_1, b_1]$ te odredimo polovište tog intervala kao i u prethodnom koraku:

$$x_1 = \frac{a_1 + b_1}{2}\,.$$

Istim zaključivanjem kao u prvom koraku dobili smo dva nova intervala $[a_1, x_1]$ i $[x_1, b_1]$ od kojih biramo onaj interval nad kojim vrijedi uvjet (2). Duljina svakog novog intervala jednaka je polovini duljine prethodnog intervala:

$$|b_1 - a_1| = \frac{1}{2}|b_0 - a_0|,$$

odnosno

$$|b_n - a_n| = \frac{1}{2}|b_{n-1} - a_{n-1}|.$$

Ponavljanjem postupka dobivamo niz brojeva (x_n) koji predstavljaju približne vrijednosti rješenja jednadžbe $f(x) = 0$. Ovakav iterativni postupak ima konačno mnogo koraka, čiji broj ovisi o tome kolika je dozvoljena greška ili zadana točnost aproksimacije.

Greška aproksimacije predstavlja odstupanje aproksimacije ili približne vrijednosti od točne vrijednosti neke veličine.

Definicija 8. *Razliku $(c - x_n)$ između točne vrijednosti c i njene aproksimacije x_n nazivamo greška aproksimacije. Apsolutnu vrijednost razlike $(c - x_n)$ nazivamo apsolutna greška aproksimacije i označavamo ju*

$$\Delta_{x_n} = |c - x_n|\,.$$

Omjer apsolutne greške aproksimacije i točne vrijednosti nazivamo relativna greška aproksimacije i označavamo ju

$$\epsilon_c = \frac{|c - x_n|}{c} = \frac{\Delta_{x_n}}{c}\,.$$

Ocjenu apsolutne greške n-te aproksimacije x_n nultočke c, koja mjeri udaljenost između spomenutih veličina, dobijemo iz postupka konstrukcije novih intervala ocjenom udaljenosti između aproksimacije i nultočke pomoću duljine intervala. Naime vrijedi:

$$|c - x_n| \leq |b_n - x_n| = \frac{1}{2}|b_n - a_n| = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}|b_{n-1} - a_{n-1}|\right)$$
$$= \ldots = \frac{1}{2^{n+1}}|b_0 - a_0|$$

Dakle, za n-tu izračunatu vrijednost x_n aproksimacije nultočke c vrijedi

$$|c - x_n| \leq \frac{1}{2^{n+1}}|b_0 - a_0|.$$

Napomenimo, kako iz ocjene greške aproksimacije nultočke c metodom polovljenja općenito ne slijedi njena linearna konvergencija, štoviše, red konvergencije za metodu nije određen.

Definicija 9 (Linearna konvergencija)**.** *Niz realnih brojeva* (x_n) *konvergira linearno prema* $c \in \mathbb{R}$, *ako postoji realan broj* $0 < r < 1$ *takav da vrijedi*

$$|c - x_{n+1}| \leq r|c - x_n|, \quad \forall n > n_0$$

za neki prirodan broj $n_0 \in \mathbb{N}$.

Naime, iako je duljina novog interval u kojem se nalazi nultočka c nakon drugog koraka metode jednaka polovini prethodnog intervala, za realan broj iz definicije linearne konvergencije ne mora vrijediti $r < 1$ nakon neke n_0 iteracije metode polovljenja (vidjeti [6]). Određivanjem gornje *granice apsolutne greške*, to jest broja ϵ od kojeg apsolutna greška aproksimacije mora biti manja, zapravo određujemo „točnost" aproksimacije u smislu broja znamenki za koje se približna i točna vrijednost moraju podudarati. Na taj način određen je broj ponavljanja drugog koraka ove metode te ga možemo odrediti iz nejednakosti

$$\frac{1}{2^{n+1}}|b_0 - a_0| \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{|b_0 - a_0|}{\epsilon} \leq 2^{n+1}.$$

Logaritmiranjem slijedi broj potrebnih koraka

$$\ln|b_0 - a_0| - \ln\epsilon \leq (n+1)\ln 2 \quad \Rightarrow \quad n \geq \frac{\ln|b_0 - a_0| - \ln\epsilon}{\ln 2} - 1. \tag{4}$$

Osim o zadanoj točnosti, broj koraka ovisi o duljini početnog intervala u kojem smo locirali nultočku. Primjerice, za zadanu točnost $\epsilon = 10^{-3}$ broj koraka u jediničnom intervalu $|b_0 - a_0| = 1$ je veći ili jednak $\dfrac{\ln 1 - \ln 10^{-3}}{\ln 2} - 1 = 8.96$, odnosno potrebno je devet koraka kako bi se nultočka i njezina aproksimacija podudarale u tri decimalne znamenke. Uz istu točnost za interval duljine 4 broj koraka iznosi $n \geq \dfrac{\ln 4 - \ln 10^{-3}}{\ln 2} - 1 = 10.96$.

Zanimljivo je postaviti pitanje: „Koliko je najviše koraka potrebno za dobivanje još jedne točne znamenke?" Iz ocjene broja potrebnih koraka n_k za dostizanje točnosti $\epsilon = 10^{-k}$ na zadanom početnom intervalu $[a_0, b_0]$

$$n_k = \left\lceil \frac{\ln|b_0 - a_0| + k\ln 10}{\ln 2} - 1 \right\rceil$$

te iz svojstava funkcije najmanje cijelo (vidjeti [5]) jednostavno slijedi

$$3 = \left\lceil \frac{\ln 10}{\ln 2} \right\rceil - 1 \leq n_{k+1} - n_k \leq \left\lceil \frac{\ln 10}{\ln 2} \right\rceil = 4$$

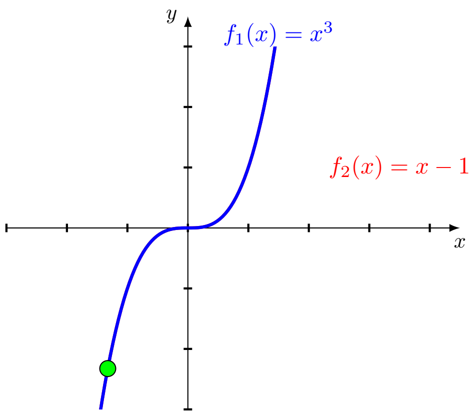
drugim riječima, za najviše četiri koraka dobijemo još jednu točnu znamenku primjenom metode polovljenja.

Primjer 2. *Odredimo nultočke funkcije $f(x) = x^3 - x + 1$ metodom polovljenja s točnošću na dvije decimale.*

1. Nultočke lociramo grafičkim prikazom presjeka funkcija

$$f_1(x) = x^3, \quad f_2(x) = x - 1.$$

Sa slike 4 uočimo interval s cjelobrojnim rubnim točkama u kojemu



Slika 4. Lociranje intervala u kojima se nalaze zajedničke točke funkcija $f_1(x) = x^3$ i $f_2(x) = x - 1$.

se nalazi presjek tih dviju funkcija, to jest nultočka zadane funkcije $c \in [-2, -1]$. Provjerimo uvjet (2)

$$f(-2) \cdot f(-1) = \big((-2)^3 - (-2) + 1\big) \cdot \big((-1)^3 - (-1) + 1\big) = -5 < 0\,.$$

Dakle, locirali smo nultočku i početni interval je $[a_0, b_0] = [-2, -1]$.

2. Iz izraza (4) izračunajmo u kojem koraku ćemo dobiti traženu aproksimaciju:

$$n \geq \frac{\ln|-1-(-2)| - \ln 10^{-2}}{\ln 2} - 1 = \frac{\ln 1 + 2\ln 10}{\ln 2} - 1 = 5.64\,.$$

Prema tome, traženu aproksimaciju dobijemo u šestom koraku.

3. Prvu aproksimaciju nultočke određujemo iz polovišta intervala $[-2,-1]$ te ona iznosi
$$x_0 = \frac{a_0+b_0}{2} = \frac{-2+(-1)}{2} = -1.5.$$
Budući da vrijedi
$$f(x_0) = f(-1.5) = -0.875 \neq 0\,,$$
tražimo sljedeću aproksimaciju koja se nalazi unutar jednog od intervala: $[-2,-1.5]$ ili $[-1.5,-1]$. Provjerom
$$f(-2)\cdot f(-1.5) = 4.375 > 0$$
zaključujemo da je novi interval gdje se nalazi nultočka: $[a_1,b_1] = [-1.5,-1]$. Sljedeća aproksimacija nalazi se na polovici tog intervala te iznosi
$$x_1 = \frac{a_1+b_1}{2} = \frac{-1.5+(-1)}{2} = -1.25\,.$$
Kako je $f(-1.25) \neq 0$ i zadnje dvije aproksimacije se ne podudaraju u dvije decimale postupak ponavljamo dok ne dobijemo aproksimaciju s traženom točnosti. Radi jednostavnijeg snalaženja pogledajmo prikaz izračuna u tablici

n	a_n	$x_n = \frac{a_n+b_n}{2}$	b_n	$f(a_n)$	$f(x_n)$	$f(b_n)$
0	-2	-1.5	-1	-5	-0.875	1
1	-1.5	-1.25	-1	-0.875	0.296875	1
2	-1.5	-1.375	-1.25	-0.875	-0.224609	0.296875
3	-1.375	-1.3125	-1.25	-0.224609	0.0515137	0.296875
4	-1.375	-1.34375	-1.3125	-0.224609	-0.0826111	0.0515137
5	-1.34375	-1.32813	-1.3125	-0.0826111	-0.014576	0.0515137
6	-1.32813	-1.32032	-1.3125	-0.014576	0.0187	0.0515137

Uočimo kako se šesta i sedma aproksimacija nultočke podudaraju u dvije decimale, stoga je, za zadanu točnost $\epsilon = 10^{-2}$ numeričko rješenje problema $\tilde{x} \approx -1.32$.

Kvalitetu dobivenog približnog rješenja jednadžbe $f(x) = 0$ možemo ocijeniti primjenom sljedećeg teorema.

Teorem 10 (Kvaliteta aproksimacije)**.** *Ukoliko na intervalu $[a,b]$ vrijedi*
$$|f'(x)| \geq m, \quad m > 0$$
onda za približno rješenje $\tilde{x} \in [a,b]$ jednadžbe $f(x) = 0$ vrijedi
$$|\tilde{x} - c| \leq \frac{|f(\tilde{x})|}{m}\,,$$
gdje je $c \in [a,b]$ točno rješenje.

Za primjer 2, prva derivacija funkcije iznosi $f'(x) = 3x^2 - 1$ i strogo je padajuća na cijelom intervalu $[-2, -1]$, stoga možemo uzeti $m = f'(-1) = 2$ te bi ocjena kvalitete dobivenog rješenja iznosila

$$|x_6 - c| \leq \frac{|f(x_6)|}{2} \approx 0.00934\,.$$

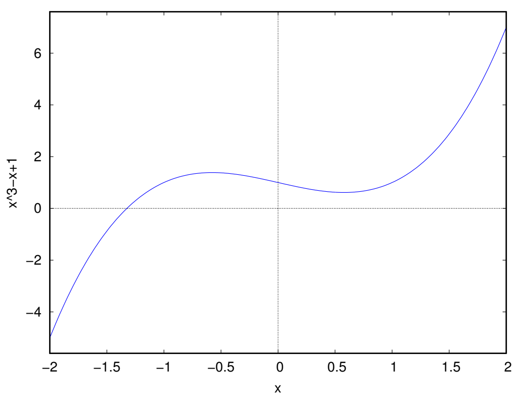
Napomenimo, kako teorem 10 možemo primijeniti nakon svake iteracije metode polovljenja te pomoću njega odrediti kvalitetu dobivene aproksimacije.

2.1. Algoritam u računalnoj aplikaciji Maxima

Primjer 2. riješit ćemo uz pomoć računalne aplikacije Maxima te ćemo pritom koristiti naredbe i funkcije koje su poznate studentima, ali i neke nove s obzirom na to da je algoritam definiran pomoću rekurzivne petlje, to jest poziva sam sebe.

Na početku je definirana funkcija f za koju tražimo nultočku. U drugom koraku nacrtan je graf funkcije f pomoću kojeg se određuje interval u kojem se nalazi nultočka funkcije f. Primjetimo kako u ovom slučaju (zbog upotrebe računalne aplikacije), nije potrebno funkciju f rastavljati na oblik $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$. U trećem koraku za prethodno odabran interval provjeravamo valjanost uvjeta (2). U posljednjem koraku dan je algoritam koji provodi devet iteracija.

```
(%i1) f(x):=x^3-x+1$
(%i2) wxplot2d(f(x), [x,-3,2], [y,-5,5])$
(%o2)
```



```
(%i3)  f(-1.5)·f(-1);
(%o3)  −0.875
(%i10) f:x^3-x+1$
       a:-1.5$
       b:-1$
       n:9$
       fpprintprec:6$
       bisekcija(f,a,b,n):=block([n:n-1],
         xm:(a+b)/2,
         fa:ev(f,x:a),
         fb:ev(f,x:b),
         fm:ev(f,x:xm),
        print(float(a),float(xm),float(b),float(fa),float(fm),float(fb)),

         if(n<0) then return(xm)
         elseif(fm=0) then return(xm)
         elseif(signum(fa)≠signum(fm)) then bisekcija(f,a,xm,n)
         elseif(signum(fm)≠signum(fb)) then bisekcija(f,xm,b,n))$
       r:bisekcija(f,a,b,n);
       float(r);
```

Rezultat iz algoritma je:

-1.5	-1.25	-1.0	-0.875	0.296875	1.0
-1.5	-1.375	-1.25	-0.875	-0.224609	0.296875
-1.375	-1.3125	-1.25	-0.224609	0.0515137	0.296875
-1.375	-1.34375	-1.3125	-0.224609	-0.0826111	0.0515137
-1.34375	-1.32812	-1.3125	-0.0826111	-0.014576	0.0515137
-1.32812	-1.32031	-1.3125	-0.014576	0.0187106	0.0515137
-1.32812	-1.32422	-1.32031	-0.014576	0.00212795	0.0187106
-1.32812	-1.32617	-1.32422	-0.014576	-0.00620883	0.00212795
-1.32617	-1.3252	-1.32422	-0.00620883	-0.00203665	0.00212795
-1.3252	-1.32471	-1.32422	-0.00203665	$4.65949 \cdot 10^{-5}$	0.00212795

(r) -1.32471
(%o10) -1.32471

Primjenom istog postupka riješite sljedeće zadatke:

Zadatak 1. *Metodom polovljenja, s točnošću od* 10^{-3}, *odredite nultočke funkcije* $f(x) = \ln(3x) + x - 3$. *U kojem koraku se dobije točnost od* 10^{-4}?

Zadatak 2. *Metodom polovljenja, s točnošću od* 10^{-3}, *odredite nultočke funkcije* $f(x) = \arccos(x) - x^2 - x$. *U kojem koraku se dobije točnost od* 10^{-5}*?*

3. Zaključak

U radu je pokazana primjena Maxima računalne aplikacije za izvedbu metode polovljenja kod određivanja nultočaka funkcija. Primjenom računalne aplikacije odabrana numerička metoda se može jednostavno ilustrirati putem ispisa međurezultata, te se pokazuje kako je na taj način studentima jednostavnije razumjeti i usvojiti gradivo. Također, ovakvim pristupom izlaganju numeričkih metoda kod studenta se razvija dodatno zanimanje za primjenu računalnih aplikacija u obradi gradiva iz drugih kolegija. Osim toga, studentima je ukazano na mogućnost primjene računalnih aplikacija za izvođenje složenijih numeričkih izračuna čime se dodatno podiže njihova zainteresiranost za matematičke kolegije. Smatramo kako je primjena računalnih aplikacija u nastavi na matematičkim kolegijima nužnost, a ne dodatno opterećenje za studente.

Literatura

[1] L. Marohnić , M. Orlić Bachler, *Applications of free computational software in math courses at Zagreb University of Applied Science*, u monografiji Mathematics Education as Science and Profession, urednice: Z. Kolar-Begović, R. Kolar-Šuper i Lj. Jukić Matić, Element, 2017, 192–204.

[2] M. Orlić Bachler, *The introduction of IT course at professional study of Civil Engineering*, in 3rd International Multidisciplinary Scientific Conference on Social Sciences and Arts SGEM, 2016, 1139–1146.

[3] D. Šterc, R. Banov, M. Ricci, *Interpretacija pojma integrala za studente elektrotehnike*, Poučak **73** (2018), 58–67.

[4] Z. Drmač, V. Hari, M. Marušić, M. Rogina, S. Singer, S. Singer, *Numerička analiza*, `https://web.math.pmf.unizg.hr/~rogina/2001096/num_anal.pdf`

[5] T. Tadić, *Najveće cijelo $\lfloor x \rfloor$ i njegovi prijatelji*, Playmath **4** (2004), 13–17.

[6] E. H. Kaufman Jr., T. D. Lenker, *Linear Convergence And The Bisection Algorithm*, American Mathematical Monthly, **93**, 1(1986), 48–51.

Reni Banov
Tehničko veleučilište u Zagrebu, Graditeljski odjel,
10000 Zagreb, Av. V. Holjevca 15, Hrvatska
E-mail adresa: `reni.banov@tvz.hr`

Martina Benković
vanjski suradnik na Tehničkom veleučilištu u Zagrebu, Graditeljski odjel,
10000 Zagreb, Av. V. Holjevca 15, Hrvatska
E-mail adresa: `martina_benkovic@hotmail.com`

Mandi Orlić Bachler
Fakultet zdravstvenih studija Sveučilišta u Rijeci,
51000 Rijeka, Viktora Cara Emina 5, Hrvatska,
Tehničko veleučilište u Zagrebu, Graditeljski odjel,
10000 Zagreb, Av. V. Holjevca 15, Hrvatska
E-mail adresa: `mandi.orlic@tvz.hr`