

Crtanje grafova funkcija i krivulja u Latexu koristeći PGFPlot

Teja Gržinčić, Marija Maksimović

Sažetak

\LaTeX je software koji nam omogućuje jednostavnu izradu strukturiranih dokumenata profesionalne kvalitete. Koristi se, između ostalog, za pisanje i uređivanje znanstvenih i seminarskih radova, te testova i bilješki. PGFPlots je dodatan makro paket \LaTeX sustava koji služi za konstruiranje i uređivanje raznovrsnih grafova funkcija i dijagrama. U ovome radu su navedene i opisane ključne naredbe i parametri ovog paketa. Također prikazana je njihova uporaba na primjerima koji se javljaju u školskoj matematici kako bi učiteljima olakšali pripremu materijala za učenje i provjeru znanja. Rad je proizašao iz završnog rada na Fakultetu za matematiku Sveučilišta u Rijeci koji je izradila studentica Teja Gržinčić pod mentorstvom doc. dr. sc. Marije Maksimović.

Ključni pojmovi: \LaTeX , PGFPlots, graf funkcije, krivulja

1. PGFplots paket za crtanje grafova funkcija

\TeX je računalni program za pisanje i potpunu pripremu raznovrsnih tekstova za tiskanje koji je 70-ih razvio Donald E. Knuth. Uz osnovni program \TeX -a tijekom godina se razvijaju i dodatni paketi, makro paketi, za bolje i efikasnije uređivanje teksta, grafika i slika.

PGFPlots je jedan od makro paketa \LaTeX sustava, kojeg je razvio Christian Feuersänger, a omogućava laku izradu i uređivanje raznih grafova, funkcija i grafikona. Temelji se na TikZ makro paketu, koji omogućava konstruiranje točaka, pravaca, geometrijskih likova, dijagrama itd.

PGFPlots se učitava u preambuli naredbom:

```
\usepackage{pgfplots}
```

U preambuli možemo odrediti s kojim verzijom PGFPlots paketa će kod biti kompatibilan:

```
\pgfplotsset{compat=1.9}
```

pri čemu bi u ovom slučaju bio kompatibilan s verzijom paketa 1.9.

Okruženja se u \TeX -u upotrebljavaju za različite zahtjeve formatiranja teksta, grafike ili izgleda dijela dokumenta i mogu biti ugniježđena. Budući da se PGFPlots temelji na TikZ paketu, slika svakog grafa se treba naći unutar `tikzpicture` okruženja, unutar kojeg ćemo ugniježđiti `axis` okruženje na sljedeći način:

```
\begin{tikzpicture}
  \begin{axis}[parametri]
    ...
  \end{axis}
\end{tikzpicture}
```

`axis` okruženje služi za grafove kojima osi x i y imaju standardno skaliranje. Umjesto `axis`, može se koristiti `semilogxaxis` (za grafove kojima os x ima logaritamsko, a y standardno skaliranje), `semilogyaxis` (za grafove kojima os y ima logaritamsko, a x standardno skaliranje) ili `loglogaxis` (za grafove kojima osi x i y imaju logaritamsko skaliranje) okruženje.

Izgled koordinatnog sustava se pomoću `axis` okruženja može oblikovati raznim parametrima. U Tablici 1 su navedeni i opisani neki od najčešće korištenih parametara.

| | |
|--|---|
| <code>height=<i>duljina</i></code> , <code>width=<i>duljina</i></code> | postavljanje visine i širine koordinatnog sustava |
| <code>xlabel=<i>ime</i></code> , <code>ylabel=<i>ime</i></code> | dodjeljivanje naziva koordinatnim osima |
| <code>title=<i>ime</i></code> | postavljanje naslova |
| <code>axis lines=<i>odabir</i></code> | postavljanje položaja koordinatnih osi, opcije za <i>odabir</i> su: <code>box</code> , <code>left</code> , <code>middle</code> , <code>center</code> , <code>right</code> , <code>none</code> |
| <code>axis equal</code> | postavljanje istog skaliranja za x i y -os |
| <code>xmin=<i>broj</i></code> , <code>xmax=<i>broj</i></code> <code>ymin=<i>broj</i></code> , <code>ymax=<i>broj</i></code> | postavljanje najmanje i najveće vrijednosti na koordinatnim osima |
| <code>xtick={...}</code> , <code>ytick={...}</code> | skup vrijednosti koje su prikazane na koordinatnim osima, vrijednosti su odvojene zarezima |
| <code>ticks=none</code> | isključivanje prikaza vrijednosti na koordinatnim osima |
| <code>grid</code> | prikazivanje koordinatne mreže |
| <code>grid style={<i>boja</i>, <i>debljina_linije</i>, <i>stil_linije</i>}</code> | uređivanje koordinatne mreže: boja linije (Tablica 2.), debljina linije (Tablica 2.) i stil linije (Tablica 2.) |

| | |
|---|---|
| <code>xmajorgrids=true(false),</code> | uključivanje (isključivanje) koordinatnih linija |
| <code>ymajorgrids=true(false),</code> | paralelnih s x , odnosno y -osi |
| <code>extra x ticks={...},</code> | skup dodatnih vrijednosti kroz koje prolaze koordinatne linije |
| <code>extra y ticks={...}</code> | |
| <code>extra tick style={</code> <code>boja, grid,</code> <code>grid style={boja, debljina_linije, stil_linije}</code> | oblikovanje za dodatne vrijednosti: odabir boje (Tablica 2.), prikazujemo koordinatne linije pomoću naredbe <code>grid</code> , a oblikujemo ih kao <code>grid style</code> |
| <code>legend pos=odabir</code> | postavljanje pozicije legende, opcije za <code>odabir</code> su: <code>south west, south east, north west, north east, outer north east</code> |
| <code>legend style={at={(x,y)},</code> <code>legend columns=broj}</code> | pozicioniranje legende po koordinatama, određivanje broja stupaca u legendi |

Tablica 1. Parametri za uređivanje izgleda koordinatnog sustava.

Parametri se međusobno odvajaju zarezom i mogu se koristiti unutar uglatih zagrada nakon naredbe `\begin{axis}` za pojedini koordinatni sustav, ali i unutar vitičastih zagrada nakon naredbe `\pgfplotsset` za globalno uređivanje svih koordinatnih sustava koji se javljaju u dokumentu.

Graf funkcije u koordinatni sustav unosimo pomoću naredbe: `\addplot[parametri]*`; unutar `axis` okruženja.

Pomoću `*` možemo odrediti način zadavanja funkcije i umjesto `*` možemo pisati:

- `{f(x)}` - ako je funkcija zadana s $y = f(x)$
- `{x(t)}, {y(t)}` - ako je funkcija zadana parametarski $x = x(t), y = y(t)$.
- `coordinates {(x1, y1) (x2, y2) . . . (xn, yn)}` - ako znamo samo nekoliko točaka koje pripadaju tom grafu funkcije

Unutar istog koordinatnog sustava možemo imati više grafova funkcija. U tom slučaju za prikaz pojedinog grafa unutar legende potrebno je odmah nakon dodavanja grafa napisati naredbu `\addlegendentry{ime grafa}` ili nakon upisa svih grafova napisati naredbu `\legend{ime grafa1, ime grafa2, ...}`. Također, ako želimo da se na svaki graf primjeni drugačiji stil linije/boje možemo dodati znak `+` nakon naredbe `\addplot`. Možemo i sami definirati izgled grafa funkcije raznim parametrima, od kojih su oni najčešće korišteni prikazani u Tablici 2.

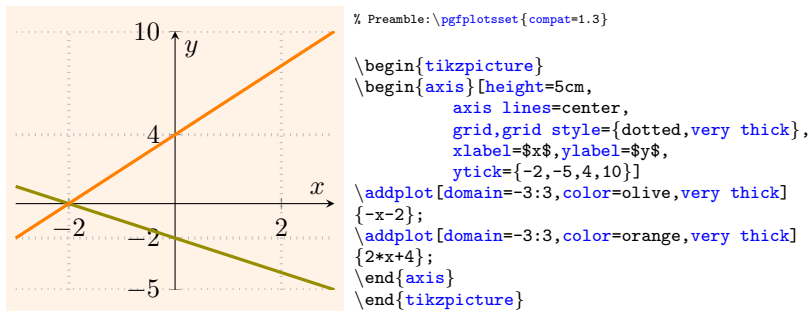
| | |
|---------------------------------|--|
| <code>color=odabir</code> | postavljanje boje grafa, mogući <i>odabiri</i> su neke predefinirane boje: <code>white</code> , <code>black</code> , <code>red</code> , <code>green</code> , <code>blue</code> , <code>cyan</code> , <code>magenta</code> , <code>yellow</code> , <code>gray</code> , <code>brown</code> , <code>lime</code> , <code>olive</code> , <code>pink</code> , <code>purple</code> , <code>violet</code> , <code>teal</code> , itd. |
| <code>line width=duljina</code> | postavljanje debljine linije grafa, umjesto naredbe možemo odabrati i neku od definiranih debljina: <code>ultra thin</code> , <code>very thin</code> , <code>thin</code> , <code>thick</code> , <code>very thick</code> , <code>ultra thick</code> |
| <i>stil linije</i> | opcije su: <code>dashed</code> , <code>solid</code> , <code>dotted</code> , <code>dashdotted</code> , <code>dashdotdotted</code> |
| <code>mark=odabir</code> | izgled točke unutar grafa, mogući <i>odabiri</i> : <code>*</code> , <code>x</code> , <code>+</code> , <code>-</code> , <code>o</code> , <code>star</code> , <code>square</code> , <code>triangle</code> , <code>diamond</code> , <code>halfcircle</code> , <code>pentagon</code> |
| <code>no marks</code> | isključenje označavanja istaknutih točaka |
| <code>domain=a:b</code> | postavljanje domene funkcije, tj. graf funkcije $f(x) = y$ će biti konstruiran samo $x \in [a, b]$ |
| <code>samples=broj</code> | broj vrijednosti nezavisne varijable za koje će se računati funkcijske vrijednosti |
| <code>smooth</code> | koristi se kako bi graf funkcije izgledao glatko bez vidljivih prekida bez obzira na zadani broj točaka |

Tablica 2. Parametri za definiranje izgleda grafa funkcije

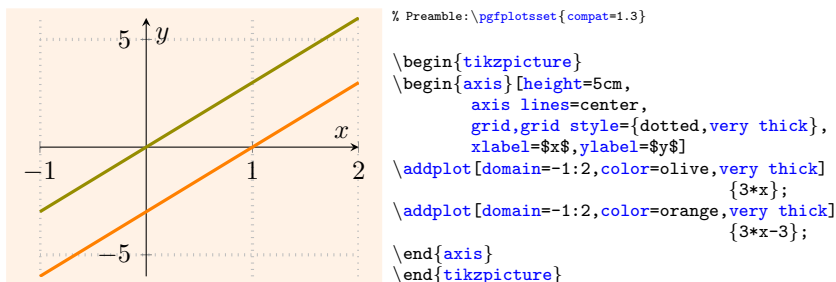
Parametri se međusobno odvajaju zarezom i mogu se koristiti unutar uglatih zagrada nakon naredbe `\begin{addplot}` za definiranje izgleda odgovarajućeg grafa ili unutar uglatih zagrada nakon naredbe `\begin{axis}` za definiranje izgleda svih grafova unutar odgovarajućeg koordinatnog sustava, ali i unutar vitičastih zagrada nakon naredbe `\begin{pgfplotsset}` za globalno uređivanje izgleda svih grafova koji se javljaju u dokumentu.

U sljedećim primjerima ćemo pokazati kako možemo korištenjem prethodno opisanih okruženja, naredbi i parametara konstruirati neke grafove funkcija i krivulje. Također, pokazat ćemo kako možemo konstruirane grafove primijeniti u školskoj matematici pri realizaciji odgojno-obrazovnih ishoda definiranih *Kurikulumom nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije* (2019).

Primjer 1. *Nacrtajmo grafove funkcija $f(x) = 2x + 4$ i $g(x) = -x - 2$.*



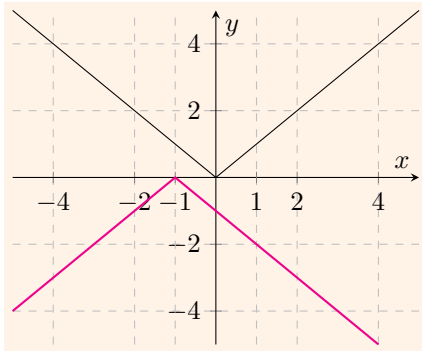
Primjer 2. *Nacrtajmo grafove funkcija $f(x) = 3x$ i $g(x) = 3x - 3$.*



Primjeri 1 i 2 mogu se koristiti za ostvarivanje odgojno-obrazovnog ishoda *Prikazuje pravce i analizira njihove međusobne položaje u pravokutnome koordinatnom sustavu u ravnini* (MAT OŠ D.8.3.). Prema *Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije* taj ishod se ostvaruje u 8. razredu osnovne škole. U svrhu ostvarivanja tog ishoda grafovi iz tog primjera se mogu pokazati učenicima te se od njih može tražiti da odrede jednadžbe pravaca, očitaju koordinate presjeka pravaca te primjene međusobne odnose pravaca za tumačenje broja rješenja sustava dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznicama.

Odgojno-obrazovni ishod *Povezuje različite prikaze linearne funkcije* (MAT SŠ B.1.5., MAT SŠ D.1.1.) se, prema *Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije*, usvaja u 1. razredu srednje škole. Za ostvarivanje tog ishoda možemo se koristiti grafovima iz Primjera 3. Od učenika se može tražiti da povežu funkcije $f(x) = |x|$ i $g(x) = -|x + 1|$ s grafovima prikazanim u koordinatnom sustavu te da odrede s kojim pravcima se podudara graf funkcije g na intervalima $(-\infty, -1]$ i $[-1, \infty)$.

Primjer 3. *Nacrtajmo grafove funkcija $f(x) = |x|$ i $g(x) = -|x + 1|$ u istom koordinatnom sustavu.*

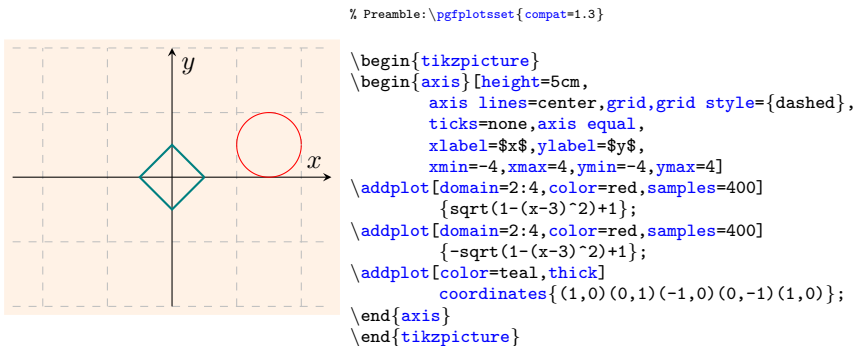


```
% Preamble:\pgfplotsset{compat=1.3}

\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[height=6cm,
axis lines=center,
grid,grid style={dashed},
xlabel=$x$,ylabel=$y$,
extra x ticks={1,-1}]
\addplot[domain=-5:0]{-x};
\addplot[domain=0:5]{x};
\addplot[color=magenta,thick,no marks]
coordinates{(-5,-4)(-1,0)(4,-5)};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```

Primijetimo da smo za konstrukciju grafa funkcije $f(x) = |x|$ nacrtali $y = -x$ za sve $x \in [-5, 0]$ i $y = x$ za sve $x \in [0, 5]$. Za konstrukciju grafa funkcije $f(x) = -|x + 1|$ koristili smo malo drukčiji pristup: koordinate neke tri točke za koje znamo da se nalaze na grafu smo upisali unutar vitičastih zagrada nakon naredbe `coordinates`. Koordinate točaka smo upisali jednu po jednu pri čemu smo ih poredali tako da x -koordinate točaka rastu te smo uključili `no marks` opciju kako se te točke ne bi prikazivale na grafu.

Primjer 4. Nacrtajmo krivulju $(y - 1)^2 + (x - 3)^2 = 1$ te kvadrat s vrhovima u točkama $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$.

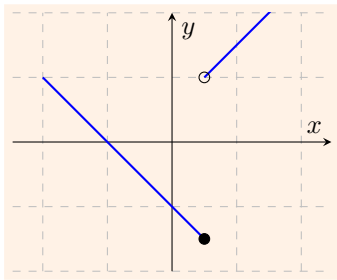


```
% Preamble:\pgfplotsset{compat=1.3}

\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[height=5cm,
axis lines=center,grid,grid style={dashed},
ticks=none,axis equal,
xlabel=$x$,ylabel=$y$,
xmin=-4,xmax=4,ymin=-4,ymax=4]
\addplot[domain=2:4,color=red,samples=400]
{sqrt(1-(x-3)^2)+1};
\addplot[domain=2:4,color=red,samples=400]
{-sqrt(1-(x-3)^2)+1};
\addplot[color=teal,thick]
coordinates{(1,0)(0,1)(-1,0)(0,-1)(1,0)};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```

Primjer 5. Nacrtajmo graf funkcije

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2, & x \leq 2 \\ x + 1, & x > 2 \end{cases}$$



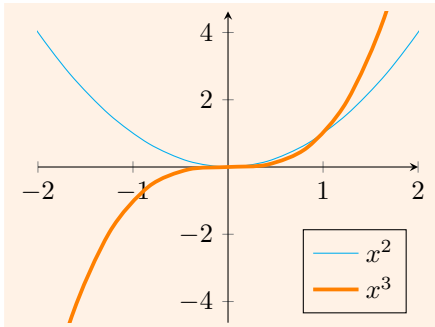
```

% Preamble: \pgfplotsset{compat=1.3}

\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[height=5cm,
axis lines=center,grid,grid style={dashed},
ticks=none,axis equal,
xlabel=$x$,ylabel=$y$,
xmin=-4,xmax=4,ymin=-4,ymax=4]
\addplot[domain=-4:1,color=blue,thick]{-x-2};
\addplot[domain=1:4,color=blue,thick]{x+1};
\addplot[mark=*]coordinates{(1,-3)};
\addplot[mark=o]coordinates{(1,2)};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
    
```

Prethodna dva primjera možemo koristiti za ostvarivanje odgojno-obrazovnog ishoda *Analizira funkciju* (MAT SŠ B.2.2.) koji se prema *Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije* ostvaruje u 2. razredu srednje škole. Može se od učenika tražiti da promotre krivulje sa slike i da pomoću definicije funkcije odrede i argumentiraju predstavljaju li promatrane krivulje grafove funkcija ili ne.

Primjer 6. *Nacrtajmo parabolu $f(x) = x^2$ i kubnu parabolou $f(x) = x^3$ u istom koordinatnom sustavu.*



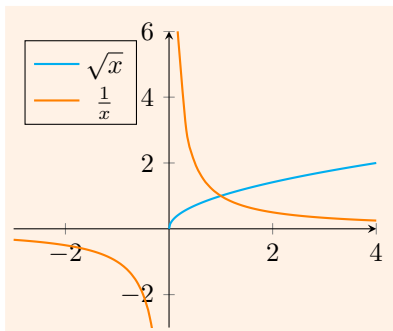
```

% Preamble: \pgfplotsset{compat=1.3, height=5.7cm,
axis lines=center,
legend pos=south east}

\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[xmin=-2,xmax=2]
\addplot[color=cyan,smooth]{x^2};
\addlegendentry{$x^2$};
\addplot[color=orange,
line width=0.05cm,
smooth]{x^3};
\addlegendentry{$x^3$};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
    
```

U Primjeru 6 smo naredbom `pgfplotsset` globalno definirali položaj osi, poziciju legende te visinu svakog koordinatnog sustava unutar dokumenta.

Primjer 7. *Nacrtajmo grafove funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = \sqrt{x}$ u istom koordinatnom sustavu.*



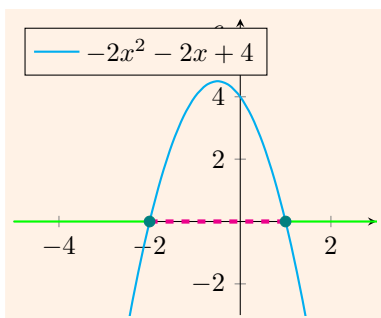
```
% Preamble: \pgfplotsset{compat=1.3}

\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[height=5.5cm,
axis lines=center,legend pos=north west,
xmin=-3,xmax=4,ymin=-3,ymax=6]
\addplot[domain=0:4,color=cyan,
thick,samples=200]{sqrt(x)};
\addplot[domain=-3:0,color=orange,
thick,smooth]{1/x};
\addplot[domain=0:4,color=orange,
thick,smooth]{1/x};
\legend{$\sqrt{x}$,$\frac{1}{x}$};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```

Primjeri 6 i 7 mogu se koristiti za ostvarivanje odgojno-obrazovnog ishoda *Analizira grafički prikaz funkcije* (MAT SŠ B.2.3., MAT SŠ C.2.1.) koji se prema *Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije* ostvaruje u 2. razredu srednje škole. Može se od učenika tražiti da iz grafičkog prikaza funkcija f i g odrede domenu, kodomenu, sliku funkcije te utvrde i objasne jesu li funkcije injektivne, surjektivne ili bijektivne.

Grafove funkcije iz Primjera 8 i 9 možemo koristiti pri ostvarivanju odgojno-obrazovnog ishoda *Primjenjuje kvadratnu funkciju* (MAT SŠ B.2.6., MAT SŠ C.2.2.) koji se prema *Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije* ostvaruje u 2. razredu srednje škole. Iz grafičkog prikaza funkcije učenici bi mogli pronaći rješenje nejednadžbi $f(x) \geq 0$, $f(x) > 0$ te $f(x) \leq 0$ i $f(x) < 0$.

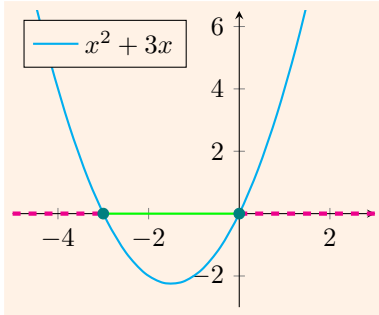
Primjer 8. *Nacrtajmo parabolu $f(x) = -2x^2 - 2x + 4$.*



```
% Preamble: \pgfplotsset{compat=1.3}

\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[height=8cm,
axis lines=center,legend pos=north west,
xmin=-5,xmax=3,ymin=-3,ymax=5.5]
\addplot[domain=-3:3,color=cyan,thick,smooth]
{-2*x^2-2*x+4};
\addlegendentry{$-2x^2-2x+4$};
\addplot[color=magenta,ultra thick,
dashed,no marks]coordinates{(-2,0)(1,0)};
\addplot[color=green,thick,no marks]
coordinates{(1,0)(4,0)};
\addplot[color=green,thick,no marks]
coordinates{(-2,0)(-5,0)};
\addplot[mark=*,color=teal]
coordinates{(1, 0)};
\addplot[mark=*,color=teal]
coordinates{(-2, 0)};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```

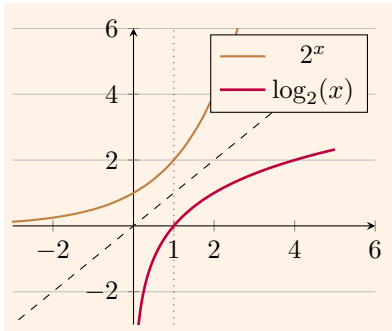
Primjer 9. *Nacrtajmo parabolu $f(x) = x^2 + 3x$.*



```
% Preamble: \pgfplotsset{compat=1.3}

\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[height=5.5cm,
axis lines=center,legend pos=north west,
xmin=-5,xmax=3,ymin=-3,ymax=6.5]
\addplot[domain=-5:5,color=cyan,thick,smooth]
{x^2+3*x};
\addlegendentry{$x^2+3x$};
\addplot[color=green,thick,
no marks]coordinates{(-3,0)(0,0)};
\addplot[color=magenta,ultra thick,dashed,
no marks]coordinates{(-5,0)(-3,0)};
\addplot[color=magenta,ultra thick,dashed,
no marks]coordinates{(0,0)(5,0)};
\addplot[mark=*,color=teal]
coordinates{(0,0)};
\addplot[mark=*,color=teal]
coordinates{(-3,0)};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```

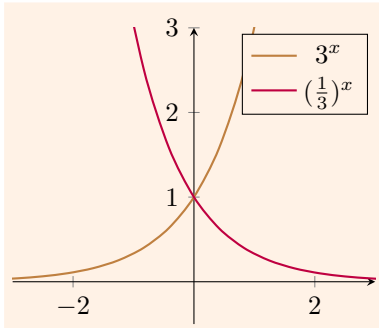
Primjer 10. *Nacrtajmo graf logaritamske funkcije $f(x) = \log_2(x)$ te graf eksponencijalne funkcije $g(x) = 2^x$.*



```
% Preamble: \pgfplotsset{compat=1.3}

\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[height=5.5cm,axis lines=center,
xmin=-3,xmax=6,ymin=-3,ymax=6,
ymajorgrids=true,
extra x ticks={1},
extra x tick style
={grid,grid style={red,dotted}}]
\addplot[color=brown,thick,smooth]{2^x};
\addplot[color=purple,line width=1pt,
samples=200]{log2(x)};
\addplot[dashed]{x};
\legend{$2^x$,$\log_2(x)$};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```

Primjer 11. *Nacrtajmo grafove funkcija $g(x) = 3^x$ i $h(x) = (\frac{1}{3})^x$.*



```
% Preamble: \pgfplotsset{compat=1.3}

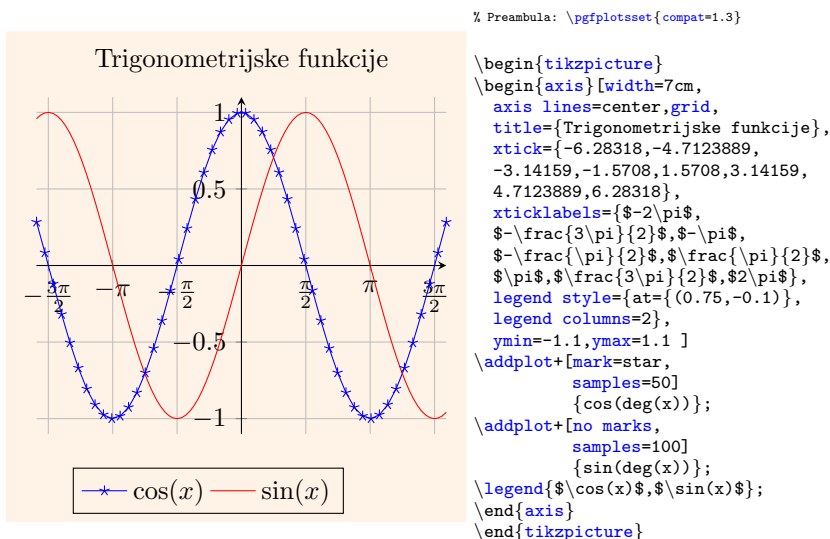
\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[height=5.5cm,axis lines=center,
xmin=-3,xmax=3,ymin=-0.5,ymax=3]
\addplot[color=brown,thick,smooth]{3^x};
\addplot[color=purple,thick,smooth]{0.33^x};
\legend{$3^x$,$(\frac{1}{3})^x$};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```

Primjeri 10 i 11 se mogu upotrijebiti pri ostvarivanju odgojno-obrazovnog ishoda *Analizira eksponencijalnu i logaritamsku funkciju* (MAT SŠ B.3.2.,

MAT SŠ C.3.1.) koji se prema *Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije* ostvaruje u 3. razredu srednje škole. Učenici pomoću grafova mogu otkriti osnovna svojstva eksponencijalne i logaritamske funkcije te mogu pronaći domenu, kodomenu, nultočke funkcija i odrediti intervale monotonosti. Također, koristeći pravac $y = x$, mogu uočiti kako su eksponencijalna i logaritamska funkcija međusobno inverzne funkcije.

U sljedećem primjeru ćemo nacrtati sinusoidu i kosinusoidu.

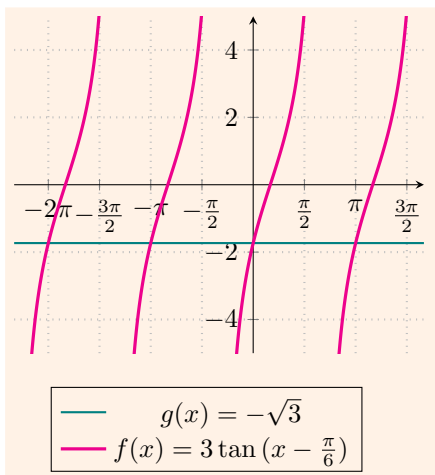
Primjer 12. *Nacrtajmo grafove funkcija $f(x) = \cos(x)$ i $g(x) = \sin(x)$.*



Konstruirane grafove iz Primjera 12 možemo primijeniti kod realizacije odgojno-obrazovnog ishoda *Analizira graf trigonometrijske funkcije* (MAT SŠ B.3.6., MAT SŠ C.3.4.). Prema *Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije* taj ishod se ostvaruje u 3. razredu srednje škole. S učenicima se može ispitati ponašanje funkcije $f(x)$ i $g(x)$ te ispitati svojstva nultočaka funkcije, maksimuma i minimuma funkcije te ispitati tijekom funkcije na intervalu $[-\pi, \pi]$. Na sličan način bismo mogli konstruirati funkcije tangens i kotangens.

Za ostvarivanje odgojno-obrazovnog ishoda *Primjenjuje trigonometrijske jednadžbe* (MAT SŠ B.3.8.) koji se prema *Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije* ostvaruje u 3. razredu srednje škole, možemo se koristiti grafovima iz sljedećeg primjera.

Primjer 13. *Nacrtajmo grafove funkcija $f(x) = 3 \tan(x - \frac{\pi}{6})$ i $g(x) = -\sqrt{3}$.*



```

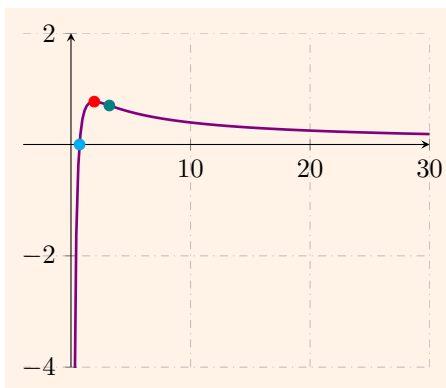
% Preambula: \pgfplotsset{compat=1.3}

\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[width=7cm,axis lines
=center,grid,grid style=dotted,thick],
xtick={-6.28318,-4.7123889,-3.14159,
-1.5708,1.5708,3.14159,4.7123889},
xticklabels={\$-2\pi\$,\$-\frac{3\pi}{2}\$,
\$\pi\$,\$-\frac{\pi}{2}\$,
\$\frac{\pi}{2}\$,
\$\frac{3\pi}{2}\$},
ymin=-5,ymax=5,legend style
={at={(0.85,-0.1)}}]
\addplot[domain=-2.5*\pi+\pi/6:1.5*\pi+\pi/6,
color=teal,thick]{-sqrt(3)};
\addplot[domain=-2.5*\pi+\pi/6:-1.5*\pi+\pi/6,
color=magenta,very thick,samples=2000]
{3*tan(deg(x-\pi/6))};
\addplot[domain=-1.5*\pi+\pi/6:-0.5*\pi+\pi/6,
color=magenta,very thick,samples=400]
{3*tan(deg(x-\pi/6))};
\addplot[domain=-0.5*\pi+\pi/6:0.5*\pi+\pi/6,
color=magenta,very thick,samples=400]
{3*tan(deg(x-\pi/6))};
\addplot[domain=0.5*\pi+\pi/6:1.5*\pi+\pi/6,
color=magenta,very thick,samples=400]
{3*tan(deg(x-\pi/6))};
\legend{\$g(x)=-\sqrt{3}\$,
\$f(x)=3\tan{(x-\frac{\pi}{6})}\$};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
    
```

Konstruirane grafove možemo upotrijebiti kako bi učenici odredili rješenje jednadžbe $3 \tan(x - \frac{\pi}{6}) = -\sqrt{3}$.

Kod realizacije odgojno-obrazovnog ishoda *Primjenjuje trigonometrijske jednadžbe* (MAT SŠ B.3.8.) mogli smo promatrati i grafove iz Primjera 12. U tom slučaju bi učenici iz grafičkog prikaza mogli odrediti rješenje jednadžbe $\sin x = 0$, $\sin x = 1$, $\cos x = 0$, $\cos x = -1$.

Primjer 14. *Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = \frac{3 \ln x + 1}{2x}$.*

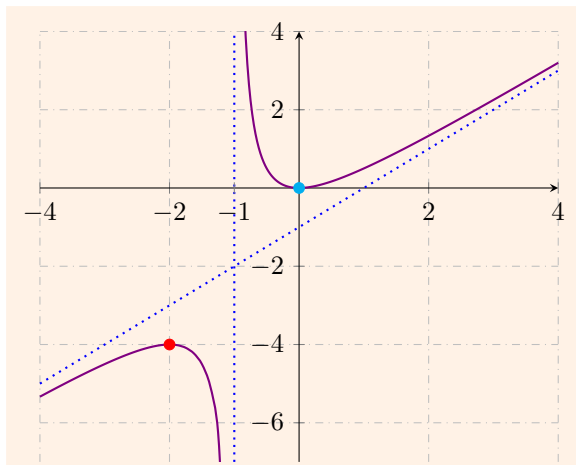


```

% Preambula: \pgfplotsset{compat=1.3}

\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[height=6cm,
axis lines=center,
xmin=-4,
ymin=-4,ymax=2,
grid,grid style=dashdotted]
\addplot[domain=-4:30,color=violet,
line width=1pt,samples=2000]
{(3*\ln(x)+1)/(2*x)};
\addplot[mark=*,color=cyan]
coordinates{(0.72,0)};
\addplot[mark=*,color=red]
coordinates{(1.95,0.77)};
\addplot[mark=*,color=teal]
coordinates{(3.21,0.70)};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
    
```

Primjer 15. Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$.



```
% Preamble: \pgfplotsset{compat=1.3}
```

```
\begin{tikzpicture}
\begin{axis}[axis lines=center,
xmin=-4, xmax=4, ymin=-7, ymax=4,
grid, grid style={dashdotted},
extra x ticks={-1}, extra x tick style={grid,
grid style={blue, thick, dotted}}]
\addplot[domain=-1:4, color=violet, thick,
samples=200]{(x^2/(x+1))};
\addplot[domain=-4:-1, color=violet, thick, smooth]{(x^2/(x+1))};
\addplot[domain=-4:4, color=blue, thick, dotted]{x-1};
\addplot[mark=*, color=cyan] coordinates{(0,0)};
\addplot[mark=*, color=red] coordinates{(-2,-4)};
\end{axis}
\end{tikzpicture}
```

Prilikom ispitivanja tijekom funkcije nastavnik se može poslužiti s grafovima iz prethodna dva primjera za usvajanje odgojno-obrazovnog ishoda *Povezuje derivaciju funkcije i crtanje grafa funkcije* (MAT SŠ B.4.7.). Prema *Kurikulumu nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije* taj ishod se usvaja u 4. razredu srednje škole. U svrhu usvajanja se na konstruiranim grafovima može odrediti domena, istaknuti nultočka, ekstrem, točka infleksije te odrediti intervale pada i rasta funkcije, konveksnost, konkavnost i asimptote funkcije f .

Literatura

- [1] T. Gržinčić, *Pgfplots paket u LaTeXu*, završni rad na Preddiplomskom studiju Matematika, Fakultet za matematiku, Sveučilište u Rijeci, 2022.

- [2] L. K. Lauderdale, M. R. Gluck, *Graphing in LATEX using PGF and TikZ*, Department of Mathematics, University of Florida, SAD
- [3] Ministarstvo znanosti i obrazovanja, *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije*, Zagreb, 2019., URL: <https://mzo.gov.hr/istaknute-teme/odgoj-i-obrazovanje/nacionalni-kurikulum/predmetni-kurikulumi/matematika/746> (Zadnji pristup: 13.6.2023.)
- [4] Overleaf, *Pgfplots package*, URL: https://www.overleaf.com/learn/latex/Pgfplots_package (Zadnji pristup: 26.2.2023.)
- [5] T. Tantau, *The TikZ and PGF Packages*, URL: <https://www.bu.edu/math/files/2013/08/tikzpgfmanual.pdf> (Zadnji pristup: 26.2.2023.)
- [6] Š. Ungar, *Ne baš tako kratak uvod u T_EX, s naglaskom na L^AT_EX₂ε*, Sveučilište J. J. Strossmayera u Osijeku, Osijek, 2002. , URL: https://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/lkratko2e_internet.pdf (Zadnji pristup: 26.2.2023.)

Teja Gržinčić

studentica Fakulteta za matematiku, Sveučilište u Rijeci

E-mail adresa: grzincic.teja@gmail.com

Marija Maksimović

Fakultet za matematiku, Sveučilište u Rijeci

E-mail adresa: mmaksimovic@uniri.hr