ACTA MATHEMATICA SPALATENSIA
Series didactica
Vol.6 (2023) 99–114
https://doi.org/10.32817/amssd.6.7

Zaprimljen: 27. svibnja 2023.
Prihvaćen: 26. rujna 2023.

O površini bicentričnog četverokuta

Mandi Orlić Bachler, Zoran Kaliman

Sažetak

U ovom radu pomoću programskog paketa Wolfram Mathematica izveli smo relaciju, u ovisnosti o paramerima R, r i d, za izračun maksimalne i minimalne površine bicentričnog četverokuta. Opisali smo bicentrični četverokut te izložili do sada izvedene relacije za izračun njegove površine.

Ključni pojmovi: bicentrični četverokut, površina, Fussova relacija.

1. Uvod

Još od kraja 18. stoljeća matematičari su pokušavali za bicentrični mnogokut pronaći relaciju koja povezuje polumjere njemu upisane i opisane kružnice, te udaljenosti između njihovih središta. Odgovarajuće relacije za bicentrični četverokut, peterokut, šesterokut i sedmerokut prvi je pronašao Nicolaus Fuss (1755. − 1826.), stoga te izraze danas nazivamo Fussove relacije. Odgovarajuću relaciju za trokut izveo je Euler. Taj problem uvršten je i među stotinu najvećih problema elementarne matematike [1]. Do danas su mnogi matematičari, na različite načine izveli Fussove relacije za te, ali i druge mnogokute [2]–[7].

U ovom ćemo se radu bavit izračunom površine bicentričnog četverokuta.

Na početku prisjetimo se sljedećih definicija.

Definicija 1. *Konveksni mnogokut je mnogokut koji sadrži spojnicu svakih svojih dviju točaka.*

Definicija 2. *Konveksni mnogokut kojemu se može opisati i upisati kružnica naziva se bicentrični mnogokut.*

Značajan teorem u vezi s bicentričnim mnogokutima iskazao je francuski matematičar Jean Victor Poncelet (1788. – 1826.), a koji glasi:

Teorem 3 (Ponceletov teorem)**.** *Neka su k_1 i k_2 bilo koje dvije kružnice u ravnini tako da je k_2 unutar k_1. Ako postoji bicentrični mnogokut s upisanom kružnicom k_2 i opisanom kružnicom k_1 tada postoji neizmjereno mnogo bicentričnih mnogokuta kojima je k_2 upisana, a k_1 opisana kružnica. Za svaku točku A_1 na kružnici k_1 postoje točke $A_2, \ldots, A_n$ na toj kružnici takve da su $A_1, \ldots, A_n$ vrhovi bicentričnog mnogokuta kojemu je k_2 upisana, a k_1 opisana kružnica.*

2. Površina bicentričnog četverokuta

Bicentrični četverokut je konveksni četverokut koji je istovremno tetivni (njegove stranice su tetive njemu opisanoj kružnici) i tangentni (njegove stranice su tangente njemu upisanoj kružnici) te za njega vrijedi Fussova relacija:

$$\left(R^2 - d^2\right)^2 = 2r^2\left(R^2 + d^2\right), \tag{1}$$

gdje je R polumjer opisane kružnice, r polumjer upisane kružnice, a d udaljenost između središta opisane i upisane kružnice četverokuta [7]. Za izračun površine bicentričnog četverokuta poznato je nekoliko relacija koje iskazujemo sljedećim teoremima.

Teorem 4. *Površina bicentričnog četverokuta, kojemu je R polumjer opisane, a r polumjer upisane kružnice te θ kut između dijagonala iznosi*

$$P = r\left(r + \sqrt{4R^2 + r^2}\right) \cdot \sin\theta\,.$$

Korolar 5. *Za površinu bicentričnog četverokuta, kojemu je R polumjer opisane, a r polumjer upisane kružnice vrijedi*

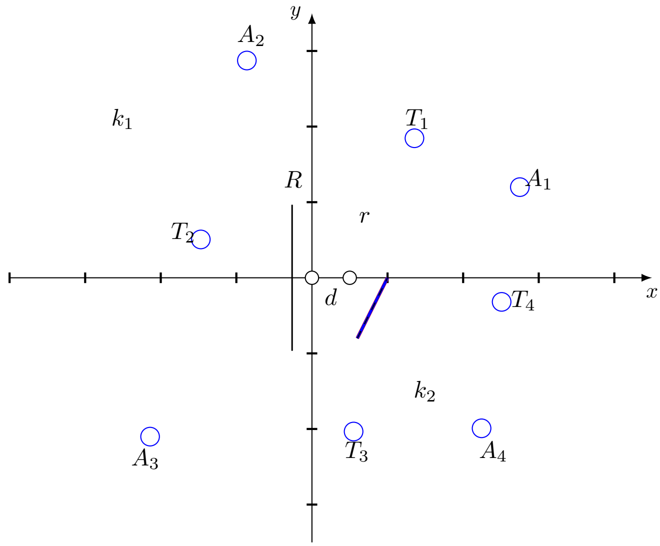
$$P \leq r\left(r + \sqrt{4R^2 + r^2}\right) \tag{2}$$

pri čemu znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je četverokut deltoid.

Prisjetimo se definicije deltoida.

Definicija 6. *Četverokut kojemu su po dvije stranice međusobno jednakih duljina, a dijagonale okomite, naziva se deltoid.*

U literaturi [8] dokazani su teorem 4 i korolar 3. Korolar 5 posljedica je teorema 4, dokazuje činjenicu da od neizmjerno mnogo bicentričnih četverokuta, koji se konstruiraju na način opisan u teoremu 3, onaj s



Slika 1. Na slici je prikazan bicentrični četverokut s vrhovima A_1, A_2, A_3, A_4, gdje je R polumjer opisane kružnice, r polumjer upisane kružnice i d udaljenost između središta upisane i opisane kružnice.

najvećom površinom je upravo bicentrični četvrokut koji je deltoid. Bicentrični deltoid dobit ćemo ako za polaznu točku (prema teoremu 3) uzmemo točku s koordinatama $A_1(R, 0)$. Ostali vrhovi tako dobivenog četverokuta tada su $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(-R, 0)$, $A_4(x_2, -y_2)$. Znači takav bicentrični četverokut simetričan je s obzirom na x os.

Teorem 7. *Za površinu bicentričnog četverokuta, kojemu je R polumjer opisane, a r polumjer upisane kružnice vrijedi*

$$P \geq 2r\sqrt{2r\left(\sqrt{4R^2 + r^2} - r\right)} \tag{3}$$

pri čemu znak jednakosti vrijedi ako i samo ako je četverokut jednakokračni trapez.

Dokaz teorema 7 nalazi se u [9]. Teorem 7 dokazuje činjenicu da od neizmjerno mnogo bicentričnih četverokuta, koji se konstruiraju na način opisan u teoremu 3, onaj s najmanjom površinom je bicentrični jednakokračni trapez. Takav četverokut dobit ćemo ako za polaznu točku uzmemo točku s koordinatama $A_1(r+d, y_1)$. Ostali vrhovi tako dobivenog četverokuta tada su $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(-x_2, -y_2)$, $A_4(r + d, -y_1)$.

Teorem 8. *Bicentrični četverokut sa stranicama $a = |A_1A_2|$, $b = |A_2A_3|$, $c = |A_3A_4|$ i $d = |A_1A_4|$ ima površinu*

$$P = \sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d}\,. \tag{4}$$

Teorem 9. *Bicentrični četverokut u kojem je $e = |T_2A_3| = |A_3T_3|$, $f = |T_3A_4| = |A_4T_4|$, $g = |T_1A_1| = |A_1T_1|$ i $h = |T_1A_2| = |A_2T_2|$ ima površinu*

$$P = \sqrt[4]{e \cdot f \cdot g \cdot h} \cdot (e + f + g + h)\ .$$

Teorem 10. *Bicentrični četverokut kojem je $p = |A_3A_1|$, $q = |A_2A_4|$, $l = |T_1T_3|$ i $k = |T_2T_4|$ ima površinu*

$$P = \frac{k \cdot l \cdot p \cdot q}{k^2 + l^2}\,.$$

Teoremi 8, 9, 10 dokazani su u [10].

2.1. Maksimalna površina bicentričnog četverokuta u ovisnosti o parametrima R, r i d

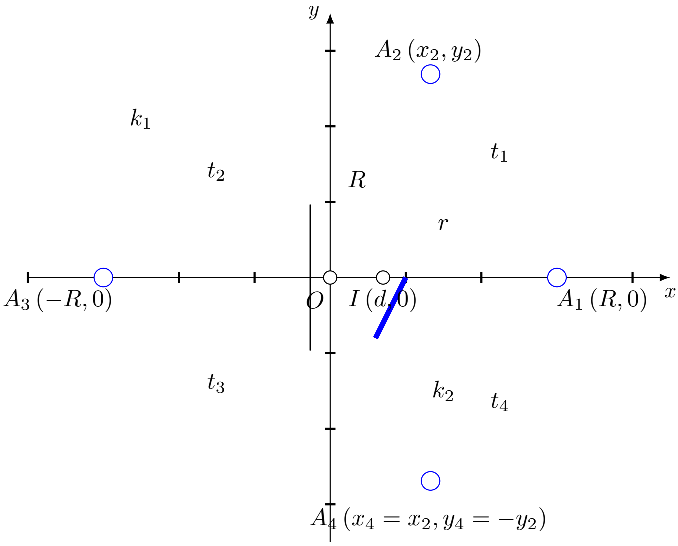
U ovom dijelu rada izvest ćemo relaciju za izračun maksimalne površine bicentričnog četerokuta, ako su poznate vrijednosti polumjera njemu upisane i opisane kružnice, te udaljenosti između njihovih središta. U tu svrhu promatrat ćemo bicentrični četverokut koji je ujedno i deltoid, što nam omogućava korolar 5. Bicentrični četverokut koji promatramo prikazan je na slici 2.

Tvrdnja 11. *Bicentrični četverokut, kojemu je R polumjer opisane kružnice, r polumjer upisane kružnice i d udaljenost između njihovih središta te kojemu je jedan vrh $A_1(R, 0)$ ima površinu*

$$P = \frac{4rR^2\sqrt{d^2 - r^2 - 2dR + R^2}}{(d - R)^2}\,.$$

Dokaz. Neka je zadana kružnica k_2 polumjera r sa središtem u točki $I(d, 0)$ i kružnica k_1 polumjera R sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava. Na kružnici k_1 odaberimo točku $A_1\,(R, 0)$. Zbog simetričnosti točka A_3 ima koordinate $(-R, 0)$. Koordinate točke $A_2\,(x_2, y_2)$ dobit ćemo kao presjek kružnice k_1 i tangente t_1 povučene iz točke A_1 na kružnicu k_2. Jednadžbu tangente t_1 dobivamo iz uvjeta da pravac $y = k \cdot x + l$ prolazi točkom A_1 i uvjeta da je taj pravac tangenta kružnice k_2, odnosno rješavanjem sustav jednadžbi:

$$\begin{aligned} k \cdot R + l &= 0 \\ r^2 \cdot \left(1 + k^2\right) - (k \cdot d + l)^2 &= 0\,. \end{aligned} \tag{5}$$



Slika 2. Na slici je prikazan (deltoid) bicentrični četverokut s maksimalnom površinom.

Slijedi, jednadžba tangente t_1 dana je izrazom:

$$y = \frac{r\,(R-x)}{\sqrt{d^2 - r^2 - 2dR + R^2}}\,. \tag{6}$$

Rješavanjem sustava:

$$\begin{aligned} y &= \frac{r\,(R-x)}{\sqrt{d^2 - r^2 - 2dR + R^2}} \\ R^2 &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

dobivamo koordinate točke $A_2\,(x_2, y_2)$:

$$\begin{aligned} x_2 &= \frac{R(d^2 - 2r^2 + 2dR + R^2)}{(d+R)^2} \\ y_2 &= \frac{2rR\sqrt{d^2 - r^2 + 2dR + R^2}}{(d+R)^2} \end{aligned}$$

S obzirom da promatramo četverokut simetričan s obzirom na x os koordinate točke $A_4\,(x_4, y_4)$ su:

$$\begin{aligned} x_4 &= \frac{R(d^2 - 2r^2 + 2dR + R^2)}{(d+R)^2} \\ y_4 &= -\frac{2rR\sqrt{d^2 - r^2 + 2dR + R^2}}{(d+R)^2} \end{aligned}$$

Zbog simetričnosti površina promatranog četverokuta jednaka je dvostrukoj površini trokuta s vrhovima A_1, A_2 i A_3. Površina trokuta računa se po izrazu:

$$P_{\Delta A_1 A_2 A_3} = \frac{1}{2}\left(x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right) . \tag{7}$$

Nakon uvrštavanja koordinata točka A_1, A_2 i A_3 u izraz (7) dobivamo površinu promatranog bicentričnog četverokuta:

$$P = 2 \cdot P_{\Delta A_1 A_2 A_3} = \frac{4rR^2\sqrt{d^2 - r^2 - 2dR + R^2}}{(d-R)^2} . \tag{8}$$

□

Račun za izvod relacije (8) proveli smo pomoću algoritma izrađenog u programskom paketu Wolfram Mathematica.

```
In[1]:=  xa1 = R;
         ya1 = √(R^2 − xa1^2);
         k1 = x^2 + y^2 == R^2;

In[4]:=  eqta1 =p xa1 + q == ya1;
         eqt =r^2(1 + p^2) − (p d + q)^2 == 0;

In[6]:=  Solve[{eqta1, eqt}, {p, q}];
         {p, q} /. %;
         rjt4 = %[[1]];
         rjt1 = %%[[2]];

In[10]:=  pt4 = rjt4[[1]];
          qt4 = rjt4[[2]];
          pt1 = rjt1[[1]];
          qt1 = rjt1[[2]];

In[14]:=  t1a1 = y == pt1 x + qt1;

In[15]:=  Solve[{t1a1, k1}, {x, y}];
          {x, y} /. %;
          rja1 = %[[1]];
          rj1a2 = %%[[2]];

In[19]:=  xa1 = rja1[[1]];
          ya1 = rja1[[2]];

In[21]:=  xa2 = Simplify[rj1a2[[1]]];
          ya2 = Simplify[rj1a2[[2]]];
```

In[23]:= xa3 = -R;
ya3 = 0;

In[25]:= P = Simplify[xa1(ya2 - ya3) + xa2(ya3 - ya1) + xa3(ya1 - ya2)]

Out[25]= $\dfrac{4rR^2\sqrt{d^2 - r^2 - 2dR + R^2}}{(d-R)^2}$

Komentar: Izraz (8) vrijedi samo za onaj bicentrični četverokut koji zadovoljava svojstva deltoida (definicija 6). Za sve ostale bicentrične četverokute možemo jedino tvrditi da je

$$P < \frac{4rR^2\sqrt{d^2 - r^2 - 2dR + R^2}}{(d-R)^2}\,. \tag{9}$$

Ovu tvrdnju (9) omogućava nam korolar 5.

2.2. Minimalna površina bicentričnog četverokuta u ovisnosti o parametrima R, r i d

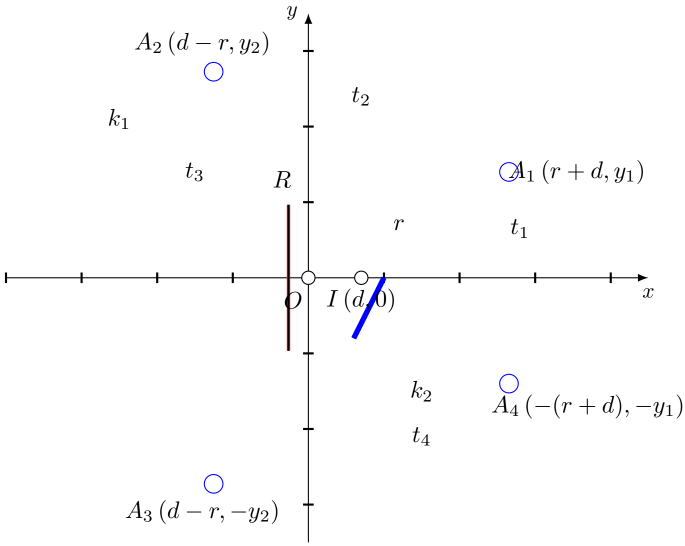
U ovom dijelu rada izvest ćemo relaciju za izračun minimalne površine bicentričnog četerokuta, ako su poznate vrijednosti polumjera njemu upisane i opisane kružnice, te udaljenosti između njihovih središta. U tu svrhu promatrat ćemo bicentrični četverokut koji je ujedno i jednakokračni trapez, što nam omogućava teorem 7. Bicentrični četverokut koji promatramo prikazan je na slici 3.

Tvrdnja 12. *Bicentrični četverokut, kojemu je R polumjer opisane kružnice, r polumjer upisane kružnice i d udaljenost između njihovih središta te kojemu je jedan vrh $A_1(r+d, \sqrt{-d^2 - 2dr - r^2 + R^2})$ ima površinu*

$$P = 2r\left(\sqrt{R^2 - (d-r)^2} + \sqrt{R^2 - (d+r)^2}\right)\,. \tag{10}$$

Dokaz. Cijeli dokaz ove tvrdnje ovdje nećemo iznositi jer se on provodi analogno kao dokaz tvrdnje 11., već dajemo samo osnovne smjernice.

Primijetimo kako jednadžbe tangenti t_1 i t_3 nije potrebno računati rješavanjem sustava (5) jer su one okomite na x os, stoga iznose $t_1 \ldots x = r + d$ i $t_3 \ldots x = d - r$. Nakon što odredimo koordinate svih vrhova, kao



Slika 3. Na slici je prikazan (jednakokračni trapez) bicentrični četverokut s minimalnom površinom.

presjek tangenti i kružnice k_1,

$$
\begin{aligned}
x_2 &= x_3 = d - r \\
y_2 &= -y_3 = \sqrt{-d^2 + 2dr - r^2 + R^2} \\
x_4 &= x_1 = r + d \\
y_4 &= -y_1 = -\sqrt{-d^2 - 2dr - r^2 + R^2}
\end{aligned}
$$

površinu četverokuta računamo po formuli

$$
\begin{aligned}
P = \quad & \tfrac{1}{2}\left((x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (x_2 - x_3)(y_2 - y_3) + (x_3 - x_4)(y_3 - y_4)\right. \\
& \left. + (x_4 - x_1)(y_4 - y_1)\right) \, .
\end{aligned} \tag{11}
$$

$\square$

Komentar: Izraz (10) vrijedi samo za onaj bicentrični četveroku koji je ujedno i simetrični trapez, dok za sve ostale bicentrične četverokute možemo jedino tvrditi, prema teoremu 7., da je

$$
P > 2r\left(\sqrt{R^2 - (d-r)^2} + \sqrt{R^2 - (d+r)^2}\right) .
$$

2.3. Primjer

Ako su poznati parametri R, d i koordinate jednog vrha tada točnu površinu bicentričnog četverokta, nakon što odredimo koordinate presotala tri vrha, možemo izračunati pomoću relacije (11). Algoritam za numerički račun točne površine svakog bicentričnog četverokuta donosimo u sljedećem primjeru.

Primjer 1. *Izračunajmo površinu bicentričnog četverokuta kojemu je jedan vrh u točki* $A_1\left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$, *opisana kružnica je polumjera* $R = 1$ *sa središtem u ishodištu koordinatnog sustava i udaljenost između središta upisane i opisane kružnice jednaka je* $d = \frac{1}{3}$.

Rješenje ovog primjera dajemo kroz račun koji je proveden u programskom paketu Wolfram Mathematica.

In[1]:= fuss4=Expand$[(R^2 - d^2)^2 - 2r^2(R^2 + d^2)]$;

In[2]:= r2:=$\dfrac{(d^2 - R^2)^2}{2(d^2 + R^2)}$;

In[3]:= mali=10^{-11};
$\{R, r, d\}$=$\left\{1, \sqrt{\frac{(d^2-R^2)^2}{2(d^2+R^2)}}, \frac{R}{3}\right\}$
A1t=$\{x1, y1\}$=$\left\{\frac{8R}{10}, \sqrt{R^2 - x1^2}\right\}$

Out[4]= $\left\{1, \frac{4}{3\sqrt{5}}, \frac{1}{3}\right\}$

Out[5]= $\left\{\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right\}$

Određujemo jednadžbu tangente na unutarnju kružnicu k_2.

In[6]:= eqta$[x_, y_]$:=$p\ x + q == y$;
eqt$[r_, d_]$:=$r^2(1 + p^2) - (p\ d + q)^2 == 0$;

In[8]:= rj=Solve[{ eqta$[x, y]$, eqt$[r, d]$}, $\{p, q\}$];
pq=$\{p, q\}$/.rj;
rjt1=pq[[1]];
rjt4=pq[[2]];

In[12]:= pq12=rjt1//. $\left\{x \to x1, y \to y1, r^2 \to \frac{(d^2-R^2)^2}{2(d^2+R^2)},\right.$
$\left. r^4 \to \frac{(d^2-R^2)^4}{(2(d^2+R^2))^2}\right\}$;
Assuming[$\{r > 0, d > 0, R > r + d\}$, FullSimplify[pq12]];
pq14=rjt4//.$\left\{x \to x1, y \to y1, r^2 \to \frac{(d^2-R^2)^2}{2(d^2+R^2)},\right.$
$\left. r^4 \to \left(\frac{(d^2-R^2)^2}{2(d^2+R^2)^2}\right)\right\}$;
FullSimplify[pq14];
N[{pq12, pq14}]

Out[16]= {{-4.07244, 3.85795}, {0.00792107, 0.593663}}

In[17]:= eqt1[$x\_, y\_$]:=pq12[[1]] x+pq12[[2]] ==y;
eqt4[$x\_, y\_$]:=pq14[[1]] x + pq14[[2]] ==y;

In[19]:= N[{ eqt1[x, y], eqt4[x, y] }]

Out[19]=$\{3.85795 - 4.07244x == y, 0.593663 + 0.00792107x == y\}$

Određujemo presjek tangenti s vanjskom kružnicom k_1.

In[20]:= kV[$x\_, y\_$]=$x^2 + y^2 == R^2$;
rj = Solve[{eqt1[x, y], kV[x, y]}, {x, y}];
xy = Assuming[$\{r > 0, d > 0, R > r + d\}$,
FullSimplify[{x, y} /. rj]];
B1t = xy[[1]];
B2t = xy[[2]];
If[EuclideanDistance[B1t, A1t] < mali, A2t=B2t,
A2t=B1t];
"A1t, B1, B2, A2 ="
N[{A1t, B1t, B2t, A2t}]
rj = Solve[{eqt4[x, y], kV[x, y]}, {x, y}];
xy = Assuming[$\{r > 0, d > 0, R > r + d\}$,
FullSimplify[{x, y}/.rj]];
B1t = xy[[1]];
B2t = xy[[2]];
If[EuclideanDistance[B1t, A1t] < mali, A4t=B2t,
A4t=B1t];
"A1t, B1, B2, A4 ="
N[{A1t, B1t, B2t, A4t}]

Out[26]= "A1t, B1, B2, A2 ="

Out[27]= {{0.8, 0.6}, {0.8, 0.6}, {0.986919, -0.161216},
{0.986919, -0.161216}}

Out[33]= "A1t, B1, B2, A4 ="

Out[34]= {{0.8, 0.6}, {0.8, 0.6}, {-0.809404, 0.587252},
{-0.809404, 0.587252}}

Iz točke A_3 određujemo točku A_2.

```
In[35]:= rj = Solve[{eqt1[x, y], kV[x, y]}, {x, y}];
         pq23a=rjt1//.{x→A2t[[1]], y→A2t[[2]]};
         pq23b=rjt4//.x→A2t[[1]], y→A2t[[2]];
         If[EuclideanDistance[pq23a, pq12] < mali,
pq23 = pq23b, pq23 = pq23a];
         "pq12 (t1) pq23a(t1 ii t2), pq23b (t1 ili t2), pq23 (t2) ="
         N[pq12, pq23a, pq23b, pq23]
         eqt2[x_, y_]=pq23[[1]] x + pq23[[2]] == y;
         rj=Solve[{eqt2[x, y], kV[x, y]}, {x, y}];
         xy=Assuming[{r > 0, d > 0, R > r + d},
FullSimplify[{x, y} /. rj]];
         B1t=xy[[1]];
         B2t=xy[[2]];
         If[EuclideanDistance[B1t, A2t] < mali,
A3t = B2t, A3t = B1t];
         "A2t, B1, B2, A3 ="
         N[{A2t, B1t, B2t, A3t}]
```

Out[39]= "pq12 (t1) pq23a(t1 ii t2), pq23b (t1 ili t2), pq23 (t2) ="

Out[40]= {{-4.07244, 3.85795}, {1.12995, -1.27639},
{-4.07244, 3.85795}, {1.12995, -1.27639}}

Out[47]= "A2t, B1, B2, A3 ="

Out[48]= {{0.986919, -0.161216}, {0.28, -0.96},
{0.986919, -0.161216}, {0.28, -0.96}}

```
In[49]:= poly4gon={A1t, A2t, A3t, A4t, A1t};
         yt=xt=Table[0, {5}];
         {xt[[1]], yt[[1]]} = A1t;
         {xt[[2]], yt[[2]]} = A2t;
         {xt[[3]], yt[[3]]} = A3t;
         {xt[[4]], yt[[4]]} = A4t;
```

{xt[[5]], yt[[5]]} = A1t;

In[56]:= Table[{xt[[i]], yt[[i]]}, {i, 1, 5}] // N

Out[56]= {{0.8, 0.6}, {0.986919, -0.161216}, {0.28, -0.96}, {-0.809404, 0.587252}, {0.8, 0.6}}

Računamo površinu četverokuta kao sumu površina trokuta $\Delta A_1A_2A_3$ i $\Delta A_1A_3A_4$. Površine trokuta računamo po formuli (7).

In[57]:= P3a = Abs[1/2 (A1t[[1]] (A2t[[2]]-A3t[[2]])+A2t[[1]] (A3t[[2]] -A1t[[2]])+A3t[[1]] (A1t[[2]]-A2t[[2]]))];
P3b = Abs[1/2 (A1t[[1]] (A3t[[2]] A4t[[2]])+A3t[[1]] (A4t[[2]] -A1t[[2]])+A4t[[1]] (A1t[[2]] - A3t[[2]]))];
P1 = N[P3a + P3b]

Out[59]= 1.59573

Računamo površinu relacijom (4).

In[60]:= a4=A1A2=Assuming[$R > d > 0$, Simplify[$\sqrt{(A1t[[1]] - A2t[[1]])^2 + (A1t[[2]] - A2t[[2]])^2}$]];
b4=A2A3=Assuming[$\{r > 0, R > d > 0\}$, Simplify[$\sqrt{(A2t[[1]] - A3t[[1]])^2 + (A3t[[2]] - A2t[[2]])^2}$]];
c4=A3A4=Assuming[$\{r > 0, R > d > 0\}$, Simplify[$\sqrt{(A4t[[1]] - A3t[[1]])^2 + (A4t[[2]] - A3t[[2]])^2}$]];
d4=A1A4=Assuming[$R > d > 0$, Simplify[$\sqrt{(A1t[[1]] - A4t[[1]])^2 + (A1t[[2]] - A4t[[2]])^2}$]];

In[64]:= P2=Assuming[$\{r > 0, R > d > 0\}$, FullSimplify[$\sqrt{\text{a4 b4 c4 d4}}$]];
N[%]

Out[65]= 1.59573

Računamo površinu relacijama (2) i (9) te provjeravamo da je $P1 = P2 < Pmax1 = Pmax2$.

In[66]:= FullSimplify[P1-P2];
N[%]

Out[67]= { 0. }

In[68]:= Pmax1 = $r\left(r + \sqrt{4R^2 + r^2}\right)$;
N[%]

Out[69]= 1.6

In[70]:= $\text{Pmax2} = \dfrac{4rR^2\sqrt{d^2 - r^2 - 2dR + R^2}}{(d-R)^2}$;
N[%]

Out[71]= 1.6

In[72]:= FullSimplify[Pmax1-Pmax2];
N[%]

Out[73]= { 0. }

Računamo minimalnu površinu relacijama (3) i (10) te provjeravamo da je $P1 = P2 > Pmin1 = Pmin2$.

In[74]:= $\text{Pmin1} = 2r\sqrt{2r(\sqrt{4R^2 + r^2} - r)}$;
N[%]

Out[75]= 1.59009

In[76]:= $\text{Pmin2} = 2r\left(\sqrt{R^2 - (d-r)^2} + \sqrt{R^2 - (d+r)^2}\right)$;
N[%]

Out[77]= 1.59009

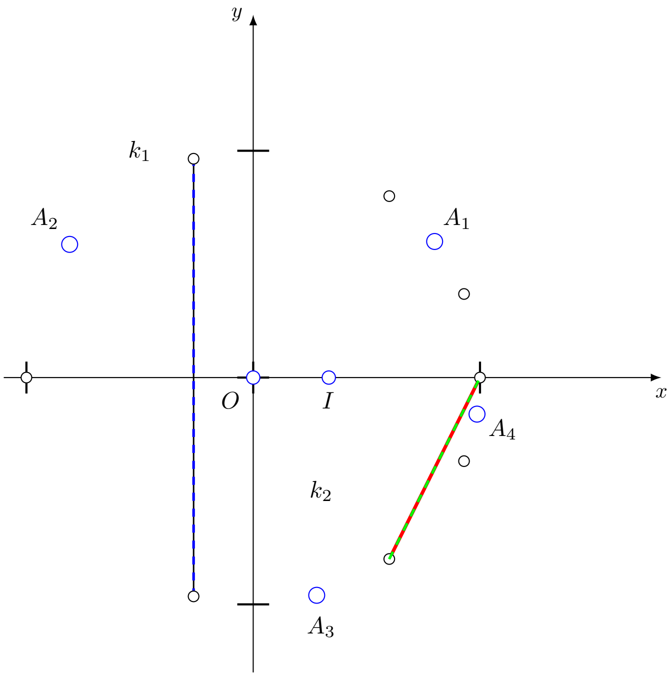
In[78]:= FullSimplify[Pmin1-Pmin2];
N[%]

Out[79]= { 0. }

Komentar: Uvrštavanjem zadanih parametra $R = 1$ i $d = \frac{1}{3}$ u Fussovu relaciju (1) izračunali smo polumjer upisane kružnice $r = \frac{4}{3\sqrt{5}}$. Jednadžbe tangenti

$$
\begin{aligned}
&y = 0.594 + 0.00794x \ldots \quad \text{tangenta kroz vrhove } A_1 \text{ i } A_2,\\
&y = -0.56234 - 1.420274x \ldots \quad \text{tangenta kroz vrhove } A_2 \text{ i } A_3,\\
&y = -1.2764 + 1.1299x \ldots \quad \text{tangenta kroz vrhove } A_3 \text{ i } A_4,\\
&y = 3.8579 - 4.0724x \ldots \quad \text{tangenta kroz vrhove } A_4 \text{ i } A_1,
\end{aligned}
$$

izračunali smo iz uvjeta da pravac $y = kx + l$ prolazi točkom (vrhom) i uvjeta da je taj pravac tangenata kružnice $k_2 \ldots \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + y^2 = \frac{16}{45}$. Preostale vrhove $A_2\,(-0.809404, 0.587252)$, $A_3\,(0.28, -0.96)$ i



Slika 4. Na slici je prikazan bicentrični četverokut iz primjera 1. (crvene boje), deltoid s najvećom površinom (zelene boje) i jednakokračni trapez s najmanjom površinom (plave boje).

$A_4\,(0.986919, -0.161216)$ izračunali smo kao presjek tangenti i vanjske kružnice $k_1 \ldots x^2 + y^2 = 1$ (slika 4).

Površinu tako dobivenog četverokuta izračunali smo na dva načina, relacijama (7) i (4), te smo utvrdili da su dobivene vrijednosti jednake. S obzirom da dobiveni bicentrični četverokut nije deltoid (bicentrični četverokut s najvećom površinom kojeg možemo konstruirati unutar zadanih kružnica) niti jednakokračni trapez (bicentrični četverokut s najmanjom površinom kojeg možemo konstruirati unutar zadanih kružnica), u posljednjem koraku računa provjerili smo da vrijede relacije (2) i (9), odnosno relacije (3) i (10). I zaista, dobili smo da je površina zadanog bicentričnog četverokuta ($P1 = 1.59573$) manja od površine deltoida ($Pmax = 1.6$) te veća od površine jednakokračnog trapeza ($Pmin = 1.59009$), koji se mogu konstruirati unutar tako zadanih kružnica.

3. Zaključak

U ovom radu izveli smo relaciju, u ovisnosti o parametrima R, r i d, za izračun površine najvećeg i najmanjeg bicentričnog četverokuta. U programskom paketu Wolfram Mathematica izveli smo navedenu relaciju, te smo kreirali algoritam za numerički izračun površine bilo kojeg bicentričnog četverokuta kojem je poznat jedan vrh te parametri R i d. Provjeru svojih rezultata usporedili smo s već poznatim relacijama koje je izveo Josefsson.

Literatura

[1] H. Dorrie, *100 Great Problems of Elementary Mathematics*, Dover, New York 1965.

[2] M. Radić, A. Zatezalo, *About some kinds of bicentric polygons and concerning relations*, Math. Maced., Vol. 4 (2006), 47–73.

[3] M. Radić *Certain relations between triangles and bicentric hexagonc*, Rad HAZU, Matematičke znanosti 503, 21–40 (2009) (in Croatian).

[4] M. Orlić, Z. Kaliman, *Analytical Derivation of the Fuss Relations for Bicentric Hendecagon and Dodecagon*, Acta Phisica Polonica A, Vol. 128 (2015).

[5] M. Orlić, Z. Kaliman, N. Orlić, *Using Mathematica in alternative derivation of Fuss relation for bicentric quadrilateral*, 6th International Conference APLIMAT 2007, Bratislava, 2007., 457–462.

[6] M. Orlić, Z. Kaliman, *Mathematica in analytical derivation of Fuss' relation*, 6th International Conference APLIMAT 2007 Bratislava, 2007., 457–462.

[7] M. Orlić, Z. Kaliman, *Problem tetivno-tangencijalnog četverokuta*, Matematičko fizički list, 238 (2009), 2; 86–91.

[8] M. Josefsson, *Maximal Area of a Bicentric Quadrilateral*, Forum Geometricorum, Volume 12 (2012) 237–241.

[9] M. Josefsson, *Minimal area of a bicentric quadrilateral*, The Mathematical Gazette, 99(545), 237–242, 2015.

[10] M. Josefsson, *Calculations Concerning the Tangent Lengths and Tangency Chords of a Tangential Quadrilateral*, Forum Geometricorum, Volume 10 (2010) 119–130.

Mandi Orlić Bachler
Fakultet zdravstvenih studija Sveučilišta u Rijeci,
51000 Rijeka, Viktora Cara Emina 5, Hrvatska,
Tehničko veleučilište u Zagrebu, Katedra za matematiku,
10000 Zagreb, Av. V. Holjevca 15, Hrvatska
E-mail adresa: `mandi.orlic@tvz.hr`

Zoran Kaliman
Fakultet za fiziku Sveučilišta u Rijeci,
51000 Rijeka, Ulica Radmile Matejčić 2, Hrvatska
E-mail adresa: `zoran.kaliman@gmail.com`